

На правах рукописи

ВАСИН Андрей Васильевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРЫВНЫХ  
ТЕЧЕНИЙ И ИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЕ  
СООРУЖЕНИЯ**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ»

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени

доктора технических наук

САНКТ–ПЕТЕРБУРГ

2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова»

Научный консультант:

доктор технических наук, профессор

Голоскоков Дмитрий Петрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации», профессор кафедры прикладной математики Береславский Эдуард Наумович;

доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова», профессор кафедры гидротехнических сооружений, конструкций и гидравлики Гапеев Анатолий Михайлович;

доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа Широков Николай Алексеевич.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет».

Защита диссертации состоится «26» декабря 2013 г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 223.009.03 в ФГБОУ ВПО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова» по адресу: 198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, д.5/7, к. 235.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова».

Автореферат разослан «24» сентября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат технических наук, доцент

Е.Г. Барщевский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Проблема разработки правильных и удобных методов расчета воздействия потоков жидкости на гидротехнические сооружения возникает постоянно. Особый интерес представляют водоводы с поворотами, поскольку, именно, каналы такой формы присутствуют на реальных гидротехнических сооружениях. В поворотных отделах возникают ввиду вязкости вихревые или даже турбулентные течения, где развитые методы потенциального течения идеальной жидкости не применимы. Исследование же вязкостных моделей жидкости с использованием уравнений Навье-Стокса в настоящее время далеко от завершения, и носит полуэкспериментальный характер с определением большого числа опытных коэффициентов и разбиением сложных областей на более простые. Инженеры – проектировщики поставлены в трудное положение. С одной стороны достаточно давно выведены уравнения Навье-Стокса, с другой стороны аналитическому решению поддаются исключительные случаи, входящие в «золотой фонд гидродинамики» [1]. В расчетах гидравлических характеристик при процессах наполнения и опорожнения шлюзов исходили из основного уравнения одномерного потока жидкости. При этом галерею делили на участки и приближенно считали скорость на каждом участке постоянной и равной средней скорости на участке. Главное требование для применения одномерного уравнения движения о выравнивании средних скоростей основывалось на лабораторных исследованиях распределения скоростей в потоке по поперечному сечению. Одномерный подход не мог дать кинематических картин движения жидкости, оставались неисследованными зоны отрыва вихревых течений, которые наблюдались экспериментально [5], не исследовалось влияние распределения скоростей на элементы конструкций гидротехнических сооружений. По этой причине разработка приближенных моделей и вычислительных методов, альтернативных решению исходных

трехмерных уравнений гидродинамики, является актуальной проблемой. Заметим, что в настоящее время при наличии уравнений Навье-Стокса, расчет напряженно-деформированного состояния затвора производится в основном на гидростатическую нагрузку, что совершенно недопустимо.

Оказывается, оставаясь в рамках идеальной жидкости – уравнений Эйлера, можно без применения опытных коэффициентов вязкости, только на основе вихревых течений получить математические модели течения жидкости, пригодные для расчетов и моделирования при движении потоков при наполнении и опорожнении шлюзовых камер, и оценить динамическое воздействие на конструкции ГТС.

**Степень разработанности.** Хорошее согласование с опытом в областях простой формы дает модель Лаврентьева-Шабата [2] склеивания вихревых и потенциальных течений. Известно математическое развитие данной задачи, но приложения математической модели Гольдштика ограничиваются модельными формами камер и галерей. Для применения данной модели к течению жидкости в реальных водопропускных сооружениях с поворотами и препятствиями, для получения результатов, полезных для проектирования и эксплуатации ГТС, требуется построение модификаций модели Лаврентьева-Шабата, которые отсутствуют для областей произвольной формы.

Кроме того большие трудности представляет разработка численных методов для решения задачи Гольдштика, поскольку в областях сложной формы нет других методов получения числовых результатов, отличных от численных методов. Многие исследователи отдают предпочтение методу конечных элементов, имеются коммерческие продукты ANSYS и Flow3d, разработчики которых утверждают, что это абсолютно автоматизированные системы на пути модель – алгоритм – программа. В данной работе применяется метод граничных элементов. Известны преимущества и недостатки обоих методов, не вступая в полемику, скажем, что метод доказательства

существования решения задачи Гольдштика, представленный в данной работе, опирается на методы теории потенциала и теории граничных интегральных уравнений. Именно поэтому, мы отдаем в дальнейшем предпочтение МГЭ, поскольку не возникает проблем с точностью численного решения краевой задачи (проблемы подобного рода в работе обусловлены только величиной шага разбиения и возможностями вычислительной техники). Все требования точности вычислений выполнены и проверяются на тестовых примерах. Последнее является необходимым условием функционирования программы расчета и применения ее для проектирования и повышения эксплуатационных характеристик действующих ГТС.

Приложение разработанной кинематической картины отрывных течений для вычисления характеристик напряженно-деформированного состояния (НДС) различных конструкций гидротехнических сооружений опирается на математическую модель ребристой полой оболочки. Конструкция «оболочка – ребра» рассматривается как континуальная, но при этом возможен локальный учет подкрепляющих элементов типа ребер жесткости или включений других назначений, входящих в основную тонкостенную конструкцию. Основой этого подхода является теория обобщенных функций.

**Цель работы и задачи исследования.** Основной целью работы является совершенствование методов расчета гидравлических и гидродинамических характеристик в обходных галереях судоходных шлюзов при процессах наполнения и опорожнения. Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие основные задачи:

1. исследование математической модели Лаврентьева-Шабата об отрывных течениях идеальной жидкости в галереях с препятствиями и поворотами;
2. приложение разработанной модели к построению кинематической картины движения жидкости в обводных галереях шлюзовых камер;

3. доказательство существования решения и доказательство сходимости итерационного процесса к точному решению;
4. получение достоверных численных результатов о распределении скоростей в обходных галереях шлюзовых камер, что является теоретическим обоснованием для проектирования и конструирования обходных галерей шлюзовых камер;
5. исследование распределения гидродинамических нагрузок в областях галерей, непосредственно примыкающих к гидрозатворам при различных режимах работы последних;
6. расчет динамических характеристик НДС плоского гидрозатвора стоечного и ригельного типов и сравнение их с характеристиками в статичном режиме;
7. разработка и построение алгоритма и программной реализации численных результатов;
8. оценка точности разработанной математической модели и программы; сравнение разработанного алгоритма на основе метода граничных интегральных уравнений с методом на основе комплексной интерполяции;
9. представление полученных результатов в форме пользовательского графического интерфейса.

**Методы исследования** заключаются в развитии теории и построении модели на основе существующих и новых технологий для расчета с применением известных лабораторных испытаний и компьютерного эксперимента.

Основой теоретических методов являются положения теории граничных интегральных уравнений, гидродинамической модели Лаврентьева-Шабата идеальной жидкости, методов Фурье и Навье решения уравнений в частных

производных и метода итераций. Расчеты производились с использованием оригинальных программ, созданных в символьной среде Maple.

**Научная новизна.** В настоящей работе получены приложения математической модели Лаврентьева-Шабата к движению идеальной жидкости в обходных галереях шлюзов. Доказано существование решения обобщенной краевой задачи Гольдштика о сопряжении вихревых течений идеальной жидкости. Метод доказательства дает алгоритм для численной реализации решения краевой задачи на основе метода итераций и метода граничных элементов. Проведен сравнительный анализ воздействия динамических и статических нагрузок на характеристики НДС затворов затопленных обходных галерей.

**Теоретическая и практическая значимость.** Построена кинематическая картина распределения скоростей в каналах обходных галерей шлюзов, согласованная с опытными лабораторными измерениями, служащая обоснованием по проектированию и конструированию форм обходных галерей шлюзов для улучшения эксплуатационных свойств последних. В частности, дано обоснование действующих конструкций в форме балок и выступов для гашения скоростей потока в выходных каналах затопленных галерей. Конструкции такого рода эксплуатируются на шлюзах Нижнесвирского гидроузла. На основе полученного распределения скоростей вычислены динамические нагрузки на затворы в галереях. Выполнен расчет динамических характеристик НДС гидрозатворов при различных режимах работы последних (ранее подобные исследования проводились исключительно в статике). Полученные расчеты применялись для моделирования явления вибрации, возникающего в процессе подъема затвора. Разработан алгоритм и программная реализация алгоритма; полученные результаты представлены в форме пользовательского графического интерфейса.

**Основные новые научные результаты, полученные в работе и выносимые на защиту.**

1. В рамках математической модели Лаврентьева-Шабата об отрывных течениях идеальной жидкости построена кинематическая картина распределения скоростей в каналах произвольной формы.
2. Данная модель применяется для описания движения идеальной жидкости в обходных галереях шлюзовых камер. Дано теоретическое обоснование опытных лабораторных исследований, что является обоснованием по проектированию и конструированию обходных галерей шлюзов для улучшения эксплуатационных свойств последних.
3. Предложен алгоритм численной реализации модели на основе метода граничных элементов. Создана и зарегистрирована в ФСИС программа на ЭВМ для расчета отрывных областей методом граничных элементов в среде Maple.
4. Для модельных областей дана оценка точности разработанного метода.
5. С помощью полученной кинематической картины вычислены динамические нагрузки на гидрозатворы затопленных обходных галерей. Дано сравнение полученных результатов с результатами, рассчитываемыми по известным методикам и СНиПам.
6. Построена математическая модель напряженно-деформированного состояния затворов обходных галерей под действием динамических нагрузок.
7. В рамках рассматриваемой модели течения дано объяснение явления кавитации. Получены конкретные результаты и даны методические рекомендации по устранению явления кавитации.
8. Представление полученных результатов в форме пользовательского графического интерфейса.

**Таким образом, диссертация удовлетворяет следующим пунктам из паспорта специальности:**

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

5. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

7. Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математической модели.

#### **Достоверность и апробация результатов.**

**Внедрение.** Результаты диссертационной работы нашли практическое применение в проектных работах по инновационным направлениям на ЗАО «Канонерский судоремонтный завод», в СПКТБ «Ленгидросталь», в ГУМРФ они используются при подготовке специалистов по направлению «Прикладная математика и информатика», разработана и зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности программа.

**Публикации.** Результаты работы опубликованы в научно-технических изданиях. Всего опубликовано 24 статьи (из них 22 статьи в журналах, рекомендованных ВАК), одна монография и 9 тезисов докладов. Все результаты, входящие в текст диссертации выполнены автором лично, в совместных работах личный вклад автора составляет 70 %.

**Апробация.** Основные положения диссертационной работы представлялись на научных семинарах кафедры математики и кафедры прикладной математики ГУМРФ и докладывались на Всероссийской научно-методической конференции СПб, СПГУВК, 1994; на III международной

конференции «Новое в охране труда и окружающей среды», Алматы, 1998; на международной конференции, посвященной юбилею курорта «Сестрорецк», СПб, 1999; на XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П.Дьяконова, Смоленск, 2010; на Юбилейной XIII Санкт-Петербургской международной конференции «Региональная информатика (РИ-2012)», Санкт-Петербург, 24-26 октября 2012 г; на Российской летней школе «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ2), 6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик, на Герценовских чтениях – 2013 г. «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» 15-20 апреля 2013г, СПб; на Международной конференции «Нелинейные уравнения и комплексный анализ», 18-22 марта 2013 г., Уфа; на IV межвузовской научно-практической конференции "Современные тенденции и перспективы развития водного транспорта России» 15-16 мая 2013 г. в ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова.

**Структура и объем работы.** Диссертация представлена в форме рукописи, состоящей из введения, пяти глав, заключения и 3 приложений. Общий объем рукописи 319 стр., в том числе 105 рисунков, 17 таблиц и список использованных источников из 174 наименований.

## **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.**

**Первая глава** диссертации посвящена обзору основных научных достижений в области численного моделирования течения потока через определенные гидротехнические сооружения и влияния этого потока на основные характеристики конструкций данных сооружений.

**Вторая глава** диссертации посвящена теоретическим аспектам модели Лаврентьева-Шабата [2], которая описывает плоское течение жидкости при обтекании препятствия. Данная модель наиболее всего отвечает течению жидкости в водопропускных галереях шлюзовых камер. В данной модели

идеальной жидкости движение делится на две зоны: зону основного потока и зону отрывного течения. Течение в зоне основного потока предполагается потенциальным, а области отрывных вихревых течений присутствуют в малых частях за некоторым естественным препятствием, будь-то выступ, или полуприподнятый затвор обходной галереи, или каверна на дне камеры. Условие постоянства завихренности является естественным упрощением (принцип Прандтля-Батчелора [3]) для предельного течения вязкой жидкости, когда вязкость стремится к нулю. То, что линия раздела отрывного течения, которая в данном случае является линией тока, не известна, представляет основную трудность в задаче Лаврентьева-Шабата.

Во втором параграфе доказывається, что задача Лаврентьева-Шабата сводится к некоторой краевой задаче Римана для аналитических функций, поэтому возможно применение комплексного метода граничных элементов [7,8].

В третьем параграфе исследуется вариант задачи Лаврентьева-Шабата задача Гольдштика [3,9-11], которая состоит в решении разрывного нелинейного (квазилинейного) уравнения эллиптического типа

$$\Delta\psi = \omega \frac{(1 - \operatorname{sgn}\psi)}{2}. \quad (1)$$

Математические модели движения жидкости в прямолинейных каналах с выступами основаны на решении задачи Гольдштика. Для галерей с поворотами модель Лаврентьева-Шабата недостаточно точно отражает опытные измерения [5], а именно такие галереи сконструированы на действующих судоходных шлюзах. В четвертом параграфе объясняется, почему требуется усовершенствование модели Лаврентьева-Шабата. Данное уточнение заключается в сопряжении двух вихревых областей. В отличие от исходной задачи область основного потока носит ярко выраженный вихревой характер. В области отрывного течения возникает дополнительная вихревая область с собственной завихренностью, не совпадающей с завихренностью основного

течения. В пятом параграфе доказывается существование решения обобщенной задачи Гольдштика.

**Теорема 2.1.** Пусть заданы ограниченная область  $D$  на плоскости, положительная константа  $\omega_1$  и неотрицательная функция  $\varphi$  на границе области  $\partial D$ . Тогда для достаточно больших величин  $\omega_0$  существует функция  $\psi$ , удовлетворяющая решению обобщенной задачи Гольдштика

$$\begin{cases} \Delta \psi = \omega_0 \frac{(\operatorname{sgn}(1-\psi)-1)}{2} + \omega_1 \frac{(1-\operatorname{sgn}(\psi-1))}{2}, \\ \psi|_{\partial D} = \varphi \end{cases}, \quad (2)$$

с непустой областью  $D_0 \subset D$ , где  $\psi > 1$ .

В доказательстве используется метод [3,11] непрерывной аппроксимации задачи с разрывной нелинейностью линейными разрывными задачами. Данный метод доказательства существования решения одновременно дает метод расчета и построения отрывной области. Важное замечание представляет утверждение о непустоте области  $D_0$ . Известно, что в задаче Гольдштика нет единственности решения (величина завихренности служит спектральным параметром), и имеются тривиальные решения, когда одна из областей вырождается. Данные положения подробно обсуждаются в разделе про вихри Рэнкина.

В **третьей главе** диссертации разрабатывается алгоритм построения оператора Грина задачи Гольдштика и обобщенной задачи Гольдштика в произвольных областях. Решение задачи Гольдштика сводится к итерационному процессу из линейных разрывных задач Пуассона для уравнения Лапласа, каждая из которых решается методом граничных элементов. В первом параграфе разрабатывается алгоритм решения задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = \chi_G \\ u|_{\Gamma} = u_0 \end{cases}$$

для индикатора подобласти  $G \subset G_0$ . По принципу суперпозиции для линейных уравнений частное решение неоднородной задачи Дирихле выбирается в виде потенциала площади – свертки с фундаментальным решением для оператора Лапласа:

$$V(z) = -\frac{\omega}{2\pi} \iint_{G_0} \ln \frac{1}{|z-\zeta|} dA(\zeta).$$

Внутренний интеграл вычисляется аналитически, так что размерность задачи для применения численных методов при вычислении интегралов (квадратурных формул) также уменьшается на единицу. Гармоническая функция – общее решение однородной задачи для уравнения Лапласа с определенными граничными условиями находится в виде потенциала двойного слоя:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v(\zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{|z-\zeta|} d\zeta,$$

где  $\eta$ - выбранное направление нормали к поверхности и  $v$  – неизвестная плотность на  $\Gamma$ . Плотность потенциала находим из граничного сингулярного интегрального уравнения

$$u(z_0) = -\frac{v(z_0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v(\zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{|z_0-\zeta|} d\zeta.$$

Последняя формула не имеет места в угловых точках области, требуются корректировки данного уравнения в зависимости от величины угла. На самом деле можно при численной реализации оставить формулу для гладких граничных точек, но аккуратно следить за тем, чтобы узловые точки при интерполяции не совпадали с угловыми точками границы области.

Во втором параграфе выполняется дискретизация численного решения сингулярного уравнения с разбиением границы  $\Gamma$  на граничные элементы  $\Gamma_j$  граничными точками  $\{z_i\}_{i=1}^n$ , которые называются узлами. Интегрируемые функции интерполируются ступенчатыми функциями. Поскольку такого рода

интерполяция применяется под знаком интеграла, то незачем использовать более сложную и громоздкую интерполяцию кусочно-линейными функциями [7, 8], на точность квадратурных формул это не влияет. Записывая уравнение в каждом из узлов  $z_i$ , получим систему линейных уравнений относительно неизвестных плотностей  $\{v_j\}_{j=1}^n$  в граничных точках. Система решается с использованием математического пакета Maple. После вычисления искомой плотности значение функции  $u$  в точке  $z = (x, y)$ ,  $z \notin \Gamma$ , достаточно далекой от границы, может быть вычислено квадратурами для потенциала двойного слоя. Для точки  $z = (x, y)$ , близкой к границе, сказывается сингулярность интеграла потенциала двойного слоя, поэтому можно воспользоваться геометрическим смыслом потенциала двойного слоя от индикатора дуги.

В третьем параграфе дается решение смешанной задачи Пуассона для уравнения Лапласа в произвольной области. Специфика задач гидродинамики в том, что на входе и выходе канала, как правило, значения функции тока не известны. При этом условие Неймана, заданное на входе-выходе является однородным и не улучшает число обусловленности задачи. Проследим основные отличия при решении данной краевой задачи от рассмотренной в пунктах 3.1-3.2. Формула Грина для гармонических функций дает

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_0 \ln \frac{1}{|\zeta - z|} |d\zeta| - \psi_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} |d\zeta| \right).$$

При предельном переходе при  $z \rightarrow \Gamma$  (с теми же замечаниями об угловых точках) и дискретизации получим систему линейных уравнений относительно неизвестных значений гармонической функции и ее нормальной производной в точках  $z_j$ :

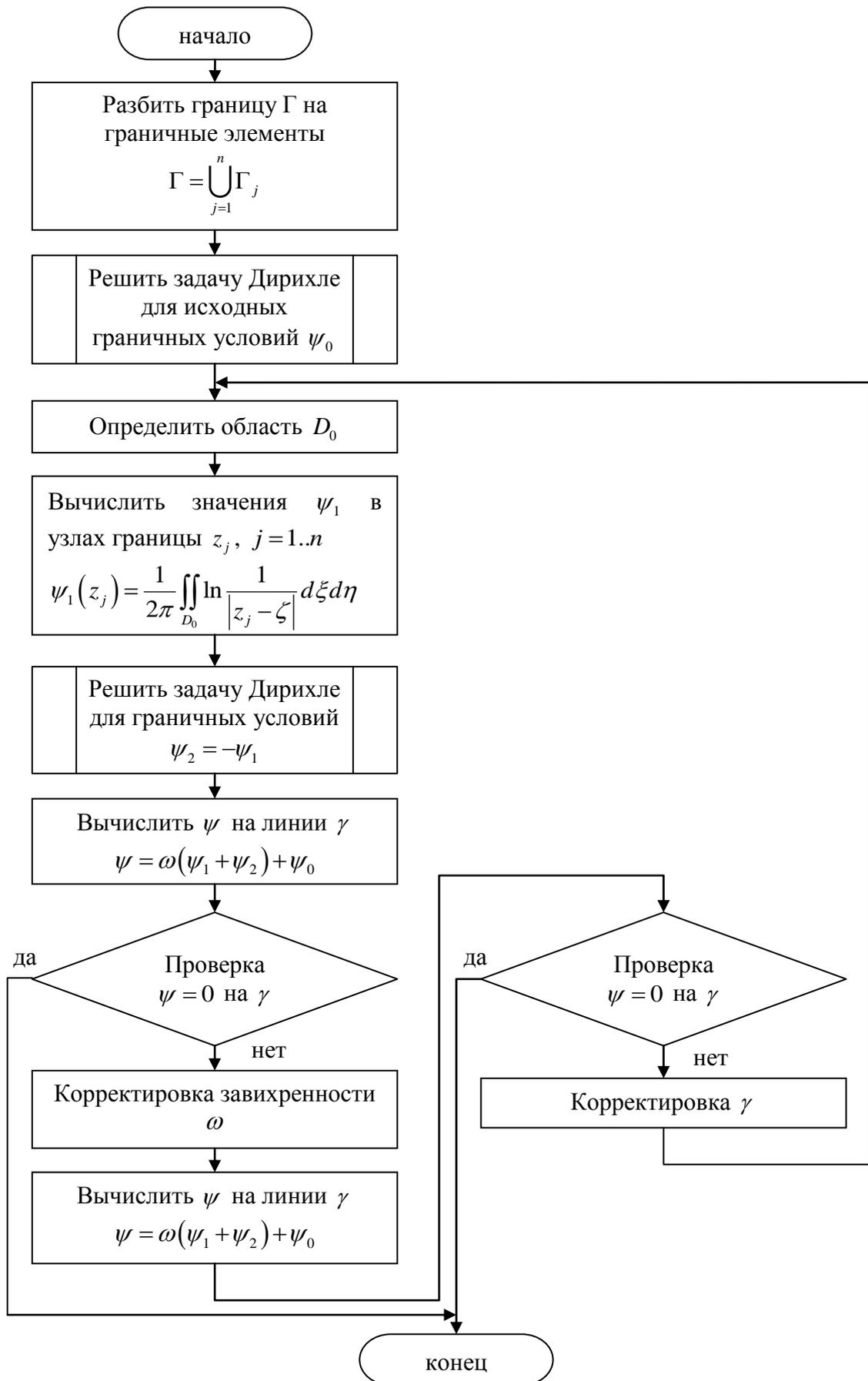
$$\begin{aligned} \psi_0(z_j) = & \frac{1}{2\pi} \sum_i \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_0(z_i) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \ln \frac{1}{|\zeta - z_j|} |d\zeta| - \frac{1}{2\pi} (-\pi \psi_0(z_j) + \\ & + \sum_{i \neq j} \psi_0(z_i) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{|\zeta - z_j|} |d\zeta|) \end{aligned}$$

Разделяя известные и неизвестные значения гармонической функции и ее нормальной производной, и учитывая, что в каждом узле – середине граничного элемента нам известно только значение функции или ее нормальной производной, решаем в символьной среде MAPLE при использовании пакета LinearAlgebra.

В четвертом параграфе конструируется алгоритм решения задачи Гольдштика (1) в произвольной области. Зададим начальную область  $D_0$ , в которой функция  $\psi_1$  удовлетворяет уравнению Пуассона  $\Delta \psi = \omega$ , а в области  $D_1$  гармонична, кроме того функция  $\psi_1$  непрерывно дифференцируема, удовлетворяет граничным условиям, но на линии раздела областей  $D_0$  и  $D_1$  может не обращаться в нуль. Найдем линию нулевого уровня функции  $\psi_1$ , которая ограничивает некоторую область  $D_1$ . Далее итеративно определим последовательность функций

$$\psi_n = \psi_0 - \frac{\omega}{2\pi} \int_{D_n} G(, z) dA(z) \quad (3)$$

где  $G(, z)$  – функция Грина для уравнения Пуассона с заданными краевыми условиями для полной области  $D$ . Последовательность функции  $\psi_n$  сходится к непрерывно дифференцируемой функции  $\psi$ , а последовательность областей  $D_n$  сходится к области  $D$ , для которых выполняются условия задачи Гольдштика. На линии раздела вихревого и потенциального течений функция  $\psi$  должна обращаться в нуль, поэтому на этом шаге будем корректировать и границу, и величину завихренности. На рис. 1 показана схема исправления линии раздела.



Блок схема для задачи Гольдштика

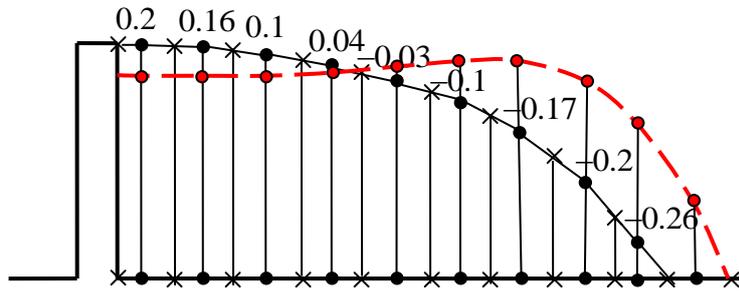


Рис. 1. Исправление линии раздела.

В пятом параграфе выполнена оценка точности разработанного метода граничных элементов для решения задачи Гольдштика. Известных примеров отрывной области вихревых течений, которые можно построить аналитически, очень мало. Проблема – в сильном нелинейном переплетении в уравнении функций тока и завихренности. Для нашей задачи лучше всего подходит тест на основе вихря Рэнкина [1]. Данное течение строится аналитически и описывается как

$$\psi = \begin{cases} \frac{\omega}{4}(r^2 - a^2) + \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{a}{R} + C, & r \leq a, \\ \frac{\omega a^2}{2} \ln \frac{r}{R} + C, & a \leq r \leq R. \end{cases}$$

При фиксированной завихренности  $\omega > 4Ce/R^2$  может быть два различных решения, в случае равенства – одно. На рис. 2 указана зависимость величины завихренности от радиуса окружности, разделяющей области вихревого и потенциального течений в круге при  $C=1$ ,  $R=1$ . Предлагаемая итерационная схема должна давать при определенных условиях оба решения для вихрей Рэнкина. Для проверки точности метода в качестве начальной области вихревого течения возьмем область в форме круга определенного радиуса  $0 < r < 1$ . Вне круга течение предполагается потенциальным. Процесс итераций с поиском линии уровня задается следующей итерационной формулой типа

$$\psi_r = 1 - \frac{\omega}{2\pi} \int_{D_r} G(w, z) dA(z), \quad (4)$$

где  $D_r$  – круг радиуса  $r$ , а  $G(w, z)$  – функция Грина для единичного круга.

Функции  $\psi_r$  являются решением разрывного уравнения Пуассона

$$\Delta \psi_r = \begin{cases} 0, & z \notin D_r \\ \omega, & z \in D_r \end{cases}$$

с граничным условием  $\psi_r(w) = 1$  при  $|w| = 1$ . Но решением задачи Гольдштика эти функции будут только при  $r = a_1$  или  $r = a_2$ . Если же радиус области интегрирования не совпадает ни с одним из указанных, то формула (4) задает итерационную схему для нахождения радиуса круга, представляющего новую область интегрирования.

На рис.3 построен график зависимости радиуса нулевой линии уровня от радиуса круга интегрирования (при заданной завихренности  $\omega = 20$ ). Точки 2 и 3 как раз представляют решения для двух вихрей Рэнкина. Соответствующие им значения радиуса области, равные  $a_1$  и  $a_2$ , являются неподвижными точками данного отображения. Точки 1 и 4 соответствуют двум тривиальным решениям, когда в круге наблюдается потенциальное течение с пустой областью завихренности (1) и вихревое течение во всем круге (4). Вид данной кривой объясняет, почему итерационная схема дает решение только для правой ветки вихрей Рэнкина (из рис.2). Дело в том, что здесь работает стандартная теорема о неподвижной точке, когда производная отображения не превосходит по абсолютной величине 1. Для того чтобы получить сходимость для отрывных течений малого радиуса (для левой ветки рис.2) требуется несколько иная схема метода граничных интегральных уравнений с корректировкой величины завихренности на каждом шаге итеративного процесса. В противном случае, если начальный радиус взять из интервала  $0 < r < a_1$ , то вихря Рэнкина не получим, а решение сойдется к тривиальному потенциальному с пустой вихревой областью. Такой эффект замечен Гольдштиком, где для поиска

второй неподвижной точки предполагается исследовать определенный функционал энергии. Им замечено, что к результату приводят локальные экстремумы функционала, а абсолютные максимум и минимум дают лишь тривиальные течения. Все это усложняет поиск второго решения. На самом деле, хороший результат дает применение метода простой итерации для обратной функции.

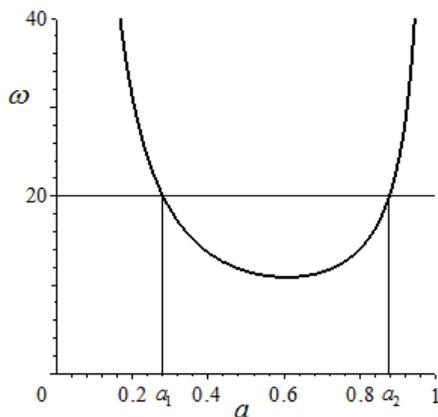


Рис. 2. Зависимость завихренности от радиуса вихревой области.

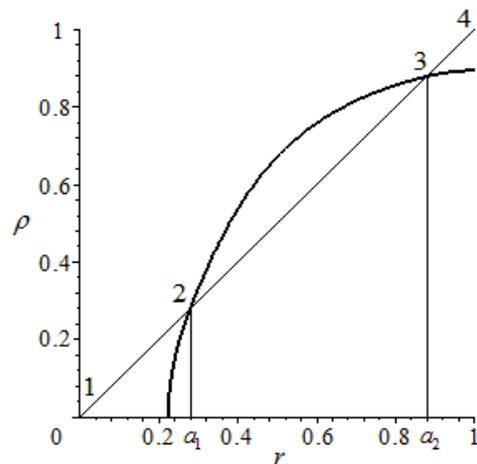


Рис. 3. Зависимость радиуса нулевого уровня от радиуса области интегрирования.

Интерполяционные задачи на основе формулы Келдыша-Седова [2] исследуются в шестом параграфе. В седьмом параграфе сравнивается точность двух методов граничных элементов: использующего теорию граничных интегральных уравнений и использующего комплексную интерполяцию.

В **четвертой главе** построены основные отрывные течения в камерах различной формы. В первом параграфе примером описанной техники является модель плоского течения идеальной жидкости в прямоугольной камере с выступом, которая послужит эталоном для моделирования течения жидкости в реальных галереях шлюзовых камер. На рис. 4 представлены области отрывных течений для различных профилей скорости на входе и выходе. В левой части

для функции тока имеем  $\psi = \sqrt{y/7}$  и в правой части  $\psi = y^2/49$  на входе и выходе, соответствующие большим скоростям на верхней или на нижней стенке на рис. 4.

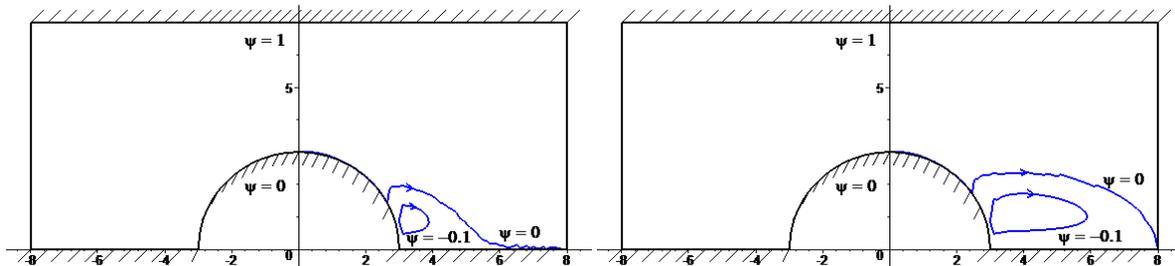


Рис. 4. Вид камеры с отрывными течениями.

Во втором параграфе исследуется течение идеальной жидкости в камере с прямоугольной траншеей с плоским дном. Именно для камер подобной формы уделено большое внимание в работах [2, 3, 9]. Главный вычислительный эксперимент заключается в моделировании кинематической картины в траншее прямоугольного сечения 1:5 с закреплением концов кривой, представляющей линию, отделяющую отрывное вихревое течение. Метод простой итерации дает решение с рис. 5. Для получения решения на рис. 6 требуется итерационная схема с корректировкой завихренности на каждом шаге. В данном случае получается несвязная вихревая зона. Из двух решений с большей вихревой зоной (рис. 5) и с меньшей – несвязной (рис. 6) физический смысл имеет именно второе. Метод обратной итерации с корректировкой завихренности как

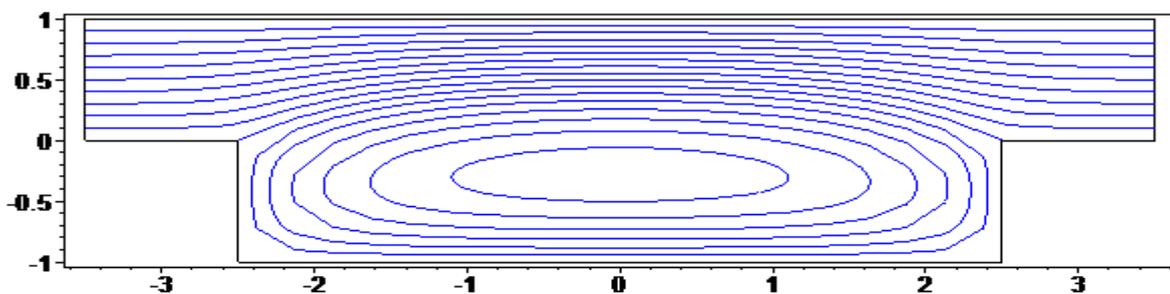


Рис. 5. Большая зона отрывного течения.

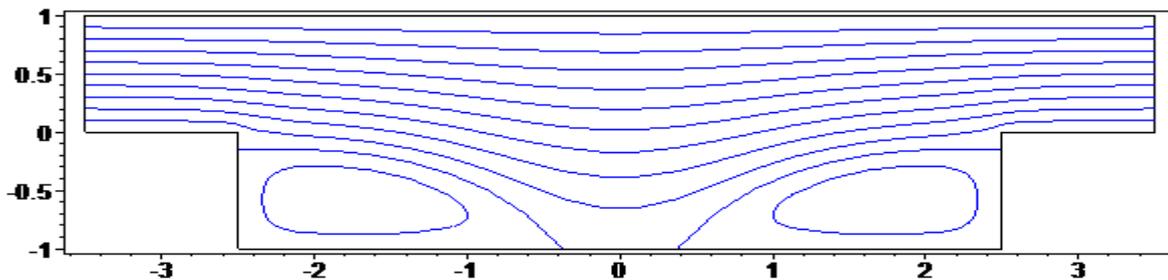


Рис. 6. Малая зона отрывного течения.

раз позволяет отсечь первое постороннее решение.

В третьем параграфе исследуется обобщенная задача Гольдштика. Настоящий раздел имеет практический интерес для построения кинематической картины в реальных водопроводных галереях шлюзовых камер для сопряжения вихревых течений разных знаков. Скорости жидкости на выпуклой стенке больше чем на вогнутой. Малый выступ приводит к искривлению границы камеры и поэтому течение в галерее распадается на два независимых вихревых движения, а для функции тока имеем краевую задачу (2). На следующих рисунках изображены кинематические картины течения в круговых камерах. Цель данного численного эксперимента оценить насколько наличие выступа позволяет изменить распределение скоростей в области за выступом.

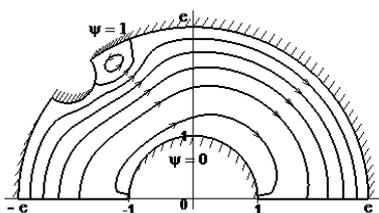


Рис. 7. Камера с выступом.

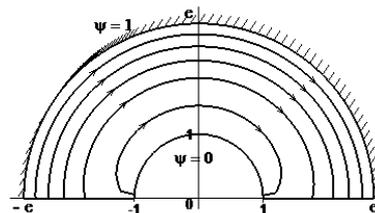


Рис. 8. Камера без выступа.

На рис. 7 течение жидкости состоит из двух зон с различными завихренностями. Наблюдается два вихревых течения (первое с завихренностью  $\omega_1 = -1.1$  в основной части камеры, второе с завихренностью  $\omega_1 = 11.596$  представляет отрывное течение). Процесс итераций осуществлялся

с корректировкой завихренности, поэтому вихревая область корректно определилась. Для сравнения на рис. 8 изображена кинематическая картина течения в камере без выступа. Здесь отсутствует отрывная область и картина течения иллюстрирует решение обычного уравнения Пуассона с заданными граничными условиями.

Вычислительные сложности данной задачи приводят к тому, что метод простой итерации дает решение обобщенной задачи Гольдштика, но данное решение не имеет физического смысла. На рис. 9 показаны примеры математических, но не физических решений (с пустой областью отрывного течения и с областью отрывного течения, заполняющего почти всю камеру).

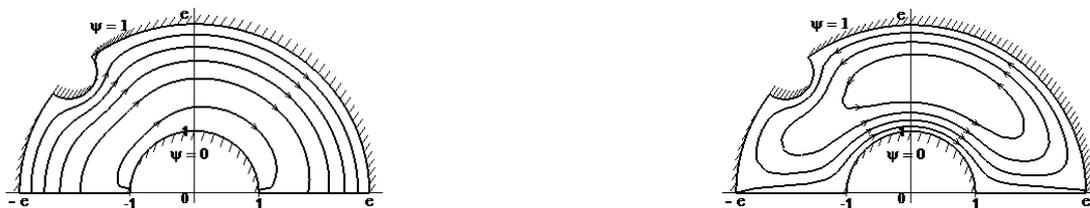


Рис. 9. Посторонние решения задачи Гольдштика.

В шестом параграфе дано первое приложение для проектных работ, а именно построена кинематическая картина течения на выходных каналах конструкции типа Нижнесвирского гидроузла, имеющих гасители скоростей потока. При изучении предложенных гасителей были произведены лабораторные исследования [5] скоростей потока в выходных отверстиях галерей как без применения гасителей, так и с ними. Но математического обоснования опыта Городенского не было предложено. На рис. 10 изображены построенные области отрывных течений в камере с выступом и без выступа. Форма областей максимально приближена к формам каналов из обходных галерей шлюзовых камер. Стенки каналов представляют собой дуги окружностей, но в отличие от модельного случая, когда канал имеет кольцевую форму, теперь дуги окружностей не являются концентрическими. В нашем числовом опыте рассмотрены два вида выступа: с вогнутой стороной со

стороны течения и с противоположной стороны. Данные различия не принципиальны в достижимом эффекте. Оба вида выступов достаточно хорошо выполняют функцию по гашению скоростей. Кроме того оба данных выступа лучше чем выступ округлой формы.

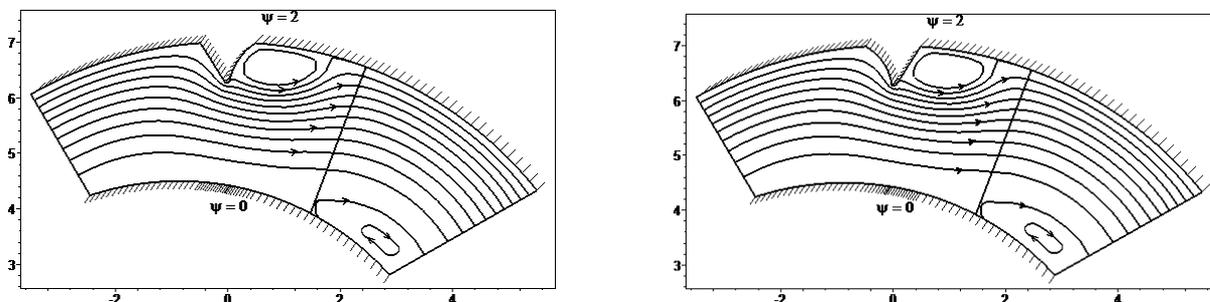


Рис. 10. Кинематика в галереях с двумя видами выступа.

Собственно по кинематическим картинкам трудно судить об эффекте, к которому приводит конструкция выступа. С такой целью необходимо вычислить не значения функции тока, а величины скоростей жидкости при различных сечениях камеры. С этой целью зададим профиль скоростей на входе камеры, так, чтобы на внешней стенке камеры скорости были существенно больше чем на внутренней стенке. Именно эти скорости необходимо погасить в рамках разрабатываемой модели. Данная эпюра скоростей представляется одинаковой в камерах с выступом и без. На рис. 11 приведены эпюры скоростей при сечении по прямой, отмеченной на рис. 10 (данный разрез находится после области отрывного течения и соответствует реальному выходу из камеры). Наибольшие абсолютные скорости в камерах с выступом существенно меньше (в 1.5 раза), чем в камере без выступа. Расчеты соответствуют опытным данным. Наблюдаемый эффект уменьшения скоростей на стенках камеры напоминает эффект прилипания вязкой жидкости. Заметим, что все наши построения выполнены для идеальной жидкости, тем не менее, использование вихревых течений дает подобные результаты.

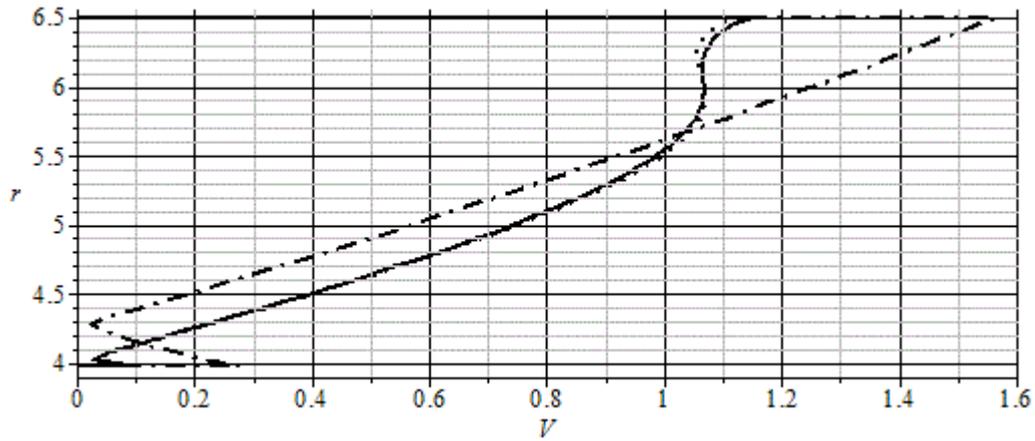


Рис. 11. Эпюры скоростей. Пунктиром и сплошной линией обозначены эпюры скоростей в галереях с двумя видами выступа, а штрихпунктирной линией – для галереи без выступа.

В пятой главе построенные кинематические картины распределения скоростей находят приложение к расчету гидродинамических нагрузок на водопропускные ворота в обводных галереях шлюзовых камер при процессах наполнения и опорожнения шлюзовых камер через затопленные обходные галереи (рис. 12)

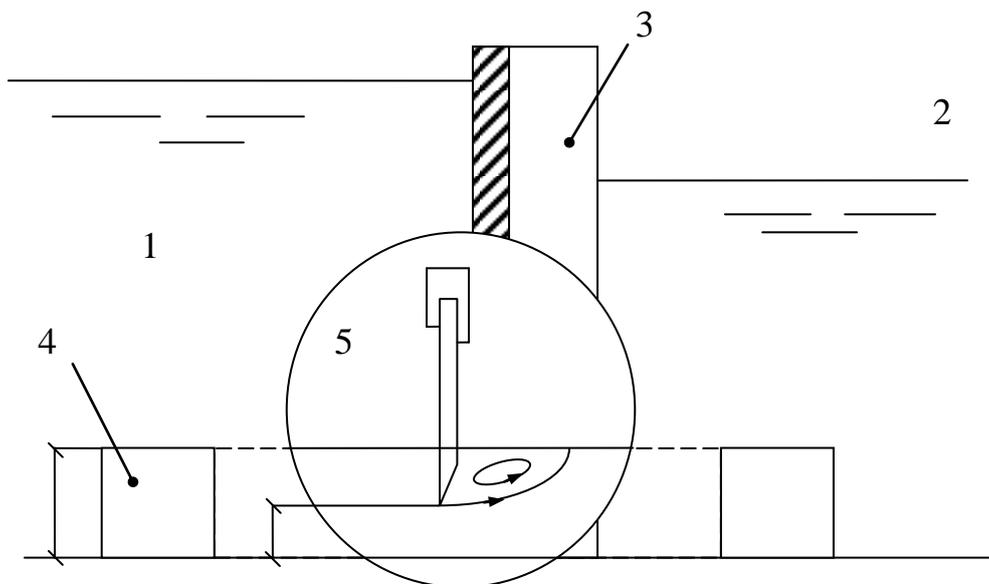


Рис. 12. Схема шлюза. 1 – Подводящий канал; 2 – Камера шлюза; 3 – Верхние ворота; 4 – Водопроводная галерея; 5 – Плоский затвор.

Вихревая область, формирующаяся за затвором (выделено окружностью 5 на рис.12), влечет целесообразным использование модели Лаврентьева-Шабата. В численном эксперименте для модели водопроводной галереи построена кинематическая картина движения потока (рис. 13). На нижней стенке функция тока  $\psi_n = 0$ , на верхней стенке функция тока  $\psi_g = 20$ , на входе/выходе функция тока меняется линейно  $\psi = 7.4y$ , средняя скорость на входе и на выходе равна  $7.4 \text{ м/с}$ .

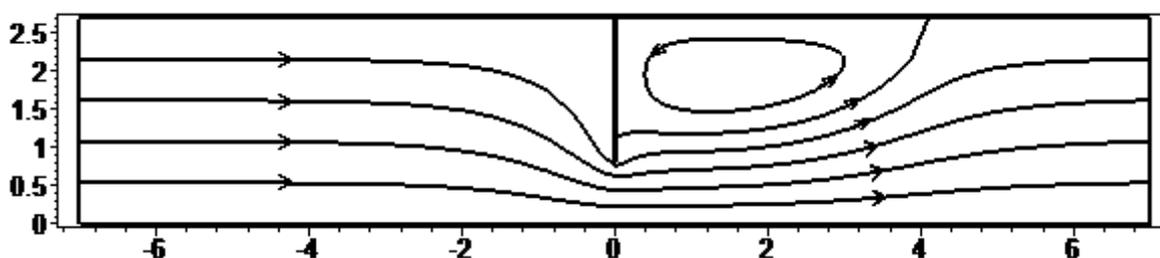


Рис. 13. Построенная при моделировании картина течения.

Полученная картина течения и, как следствие, распределение скоростей позволяет определить величину гидродинамического давления на затвор. Важность вычисления данного параметра обусловлена тем, что при затопленной галерее гидростатические составляющие общей гидродинамической нагрузки с разных сторон на затвор уравниваются. Кроме того, схема потенциального течения также дает, ввиду симметрии, одинаковое распределение скоростей на разных сторонах затвора, а это влечет одинаковые давления на разных сторонах затвора на одном уровне. С другой стороны, опытные измерения показывают, что в процессе подъема затвор испытывает вибрацию. Ни гидростатические, ни потенциальные модели движения жидкости не дают правильного объяснения этого явления. Применение модели Лаврентьева-Шабата дает не симметричное распределение скоростей, что ведет к не симметричным гидродинамическим нагрузкам на затвор. На рис. 14 изображен график результирующей силы давления на затвор для полученного течения. Сразу заметим, что данный график давлений

существенно отличается от гидростатических нагрузок, которые в основном используются при расчетах напряженно-деформированного состояния затворов. Величины результирующих давлений уменьшаются по мере открытия затвора, но главным является наличие постоянного действующего момента сил давлений, испытываемого затвором.

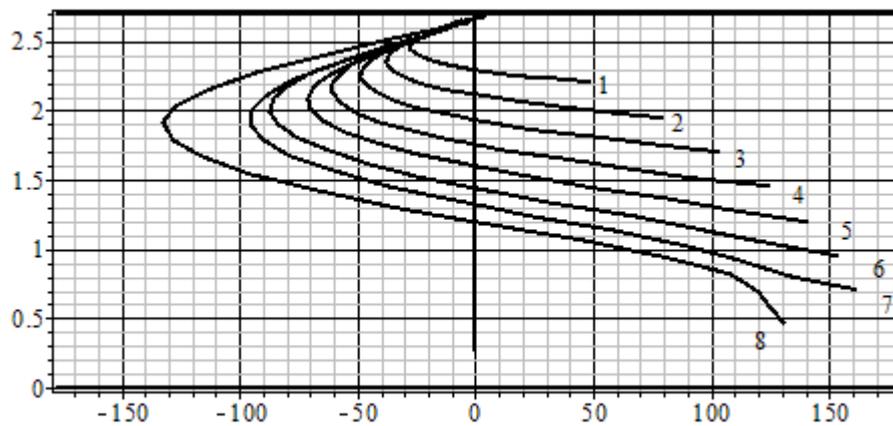


Рис. 14. Результирующее давление на затвор при различных режимах высоты поднятия. 1 –  $h = 0.8$ ; 2 –  $h = 0.7$ ; 3 –  $h = 0.6$ ; 4 –  $h = 0.5$ ; 5 –  $h = 0.4$ ;  
6 –  $h = 0.3$ ; 7 –  $h = 0.2$ ; 8 –  $h = 0.1$ .

В работе рассчитано давление на затвор для различных значений расхода, (рис. 15). Увеличение расхода влечет увеличение входных скоростей, что, в свою очередь, влечет увеличение абсолютных скоростей в области затвора.

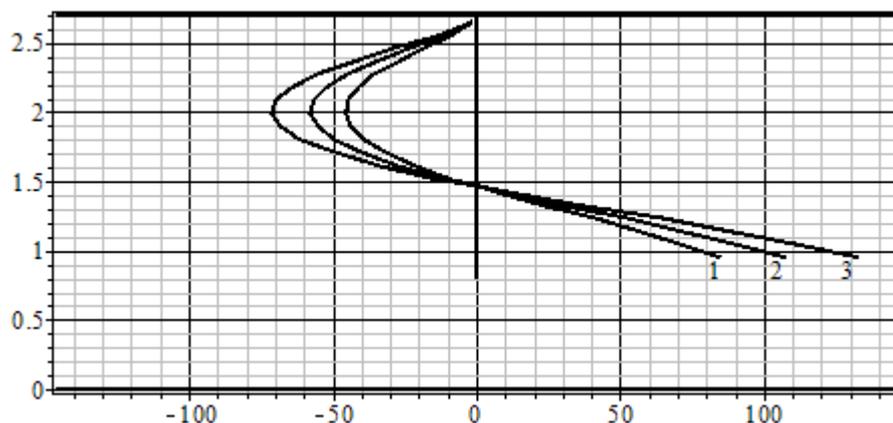


Рис. 15. Зависимость давлений от входных скоростей. 1 – график для  $\psi = 16$ ;  
2 – график для  $\psi = 18$ ; 3 – график для  $\psi = 20$ . Давление отмечено в кПа.

Отметим, что найденные величины давлений достаточно велики для учета нагрузок на гидрозатвор, поскольку соизмеримы по величине с гидростатическими нагрузками на гидрозатвор.

Во втором параграфе исследуются модели напряженно-деформированного состояния (НДС) в рамках технической теории упругости. Плоские гидрозатворы рассматриваются в рамках теории пластин с перекрестной системой ребер жесткости [4, 6]. Влияние ребер учитывается в соответствующих уравнениях в виде дополнительных слагаемых, содержащих дельта-функции и ее производные в смысле теории распределений. Последнее позволяет освободиться от дополнительных предположений о взаимодействии пластины (оболочки) с подкрепляющими элементами и, тем самым, упрощаются граничные условия (условия сопряжения различных плоских элементов конструкции затвора). С другой стороны требуется теория для решения уравнений в частных производных, содержащих дельта-функции. Дифференциальное уравнение «технической» теории упругости для прогиба имеет вид

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D} - \sum_{i=1}^{K_1} \lambda_{1i} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta(y - y_i) - \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - x_j),$$

где  $\lambda_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, K_1$ ;  $\lambda_{2j}$ ,  $j = 1, \dots, K_2$ . – коэффициенты жесткости. Дельта-функции  $\delta(y - y_i)$  и  $\delta(x - x_j)$  нужны для склейки решений по ребрам на отдельных участках. В данной главе мы отступаем от основного метода граничных элементов и, ввиду простой формы области, решение ищем в виде однократных рядов Фурье по обоим переменным:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{my}(y) \sin \alpha_m x = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nx}(x) \sin \beta_n y$$

По принципу суперпозиции решение линейного уравнения представим в виде трёх слагаемых — решения  $w_0(x, y)$  уравнения гладкой, неподкрепленной пластины

$$\Delta^2 w_0 = \frac{q}{D},$$

решения  $w_1(x, y)$  уравнения с правой частью – линейной комбинацией  $\delta$ -функций по  $y$

$$\Delta^2 w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \lambda_{1i} \alpha_m^4 w_{my}(y_i) \delta(y - y_i) \sin \alpha_m x,$$

решения  $w_2(x, y)$ , подобного предыдущему уравнению с заменой  $y$  на  $x$ :

$$\Delta^2 w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \beta_n^4 w_{nx}(x_j) \delta(x - x_j) \sin \beta_n y.$$

Решения последних уравнений совершенно аналогичны. Для коэффициентов Фурье уже получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$\nabla_{\beta_m}^4 w_m(x) = \frac{q_m(x)}{D} - \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m(x) \delta(x - x_j),$$

где  $q_m(x)$  коэффициенты Фурье нагрузки  $q(x, y)$ , с обыкновенным дифференциальным оператором четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

$$\nabla_{\beta_m}^4 = \frac{d^4}{dx^4} - 2\beta_m^2 \frac{d^2}{dx^2} + \beta_m^4.$$

Снова по принципу суперпозиции, но для обыкновенного линейного уравнения, общее решение уравнения представим в виде суммы трёх слагаемых, содержащих линейные комбинации функций Хевисайда

$$w_m(x) = \sum_{k=1}^4 C_k Z_{\beta_m k}(x) + w_m^*(x) - \sum_{j=1}^{K_2} \theta(x - x_j) \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m(x_j) \Delta(x - x_j),$$

где  $\{Z_{\beta_m k}(x)\}$  — фундаментальная система решений однородного уравнения,  $C_k$  — произвольные постоянные интегрирования; и функции

$$\Delta(x - x_j) = \frac{1}{2\beta_m^3} \{ \beta_m(x - x_j) \cosh \beta_m(x - x_j) - \sinh \beta_m(x - x_j) \}$$

Теперь для получения общего решения необходимо выразить числовые коэффициенты  $w_m(x_j)$ , что осуществляется подстановкой значений  $x = x_j$ . Такая форма общего решения будет содержать только произвольные постоянные интегрирования, которые затем определяются из граничных условий. Полученная система линейных уравнений решается в пакете MAPLE.

При реализации рассчитаем деформации, изгибные напряжения и другие динамические характеристики затворов в водопропускных галереях шлюзов с расчетной схемой (рис. 16).

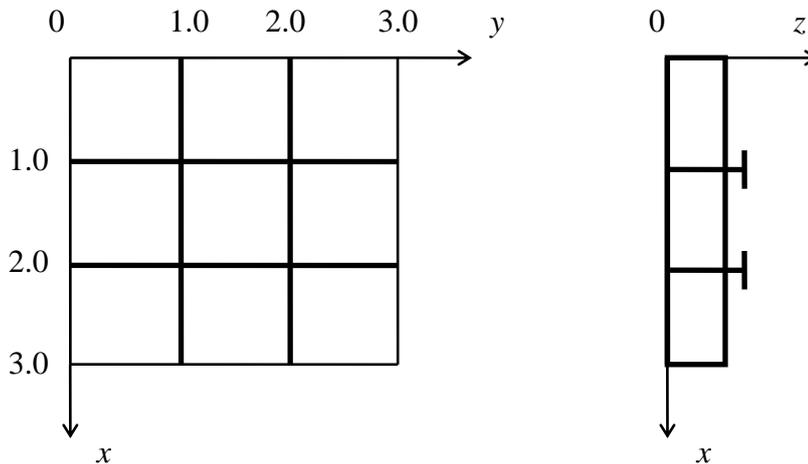


Рис. 16. Расчетная схема.

Представленные результаты графиков прогибов, существенно различные для различных режимов работы затвора, как на рис. 17 (слева прогибы при

закрытом затворе, справа – при открытом на 30%). Величины разносторонних прогибов соизмеримы с прогибами, испытываемыми при гидростатической нагрузке, в результате чего, по мере открытия затвора приводят к вибрации.

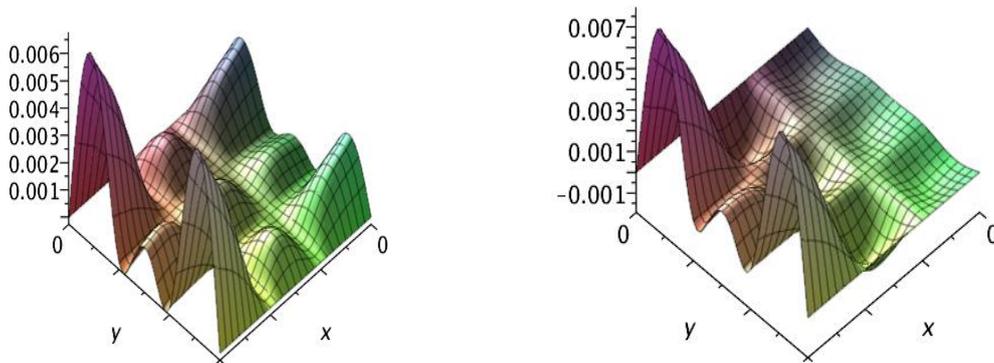


Рис. 17. Прогибы затвора в статике и динамике.

В четвертом параграфе исследована математическая модель явления кавитации. При обтекании затвора в водопропускной галерее за ним происходит сжатие потока (рис. 18). В сжатом сечении струи скорость потока повышается, и при определенных условиях давление за затвором может принять недопустимо низкие значения, при которых в потоке возникает кавитация. Данные вычисления контрастируют с вычислениями предыдущего

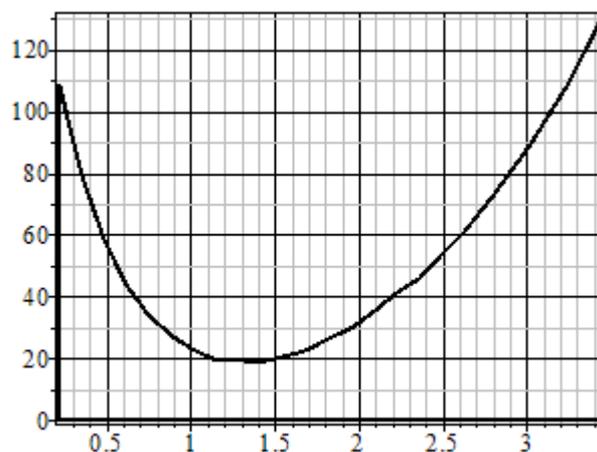


Рис. 18. Давление в кПа на линии раздела.

параграфа. Представлены расчеты (рис. 18) в рамках разработанной модели для давлений на линии раздела областей с вихревым и потенциальным течением.

В **шестой главе** диссертации представлены результаты о создании пользовательского графического интерфейса в математических пакетах Maple (первый параграф), MatLab (второй параграф). Интерфейс предназначен для удобного ввода исходных данных и получения в результате вычислений картины течения и предполагается использовать в учебных целях на факультете информационных технологий и гидротехническом факультете ГУМРФ при моделировании течений идеальной жидкости. На рис.19 представлен пример интерфейса в Maple.

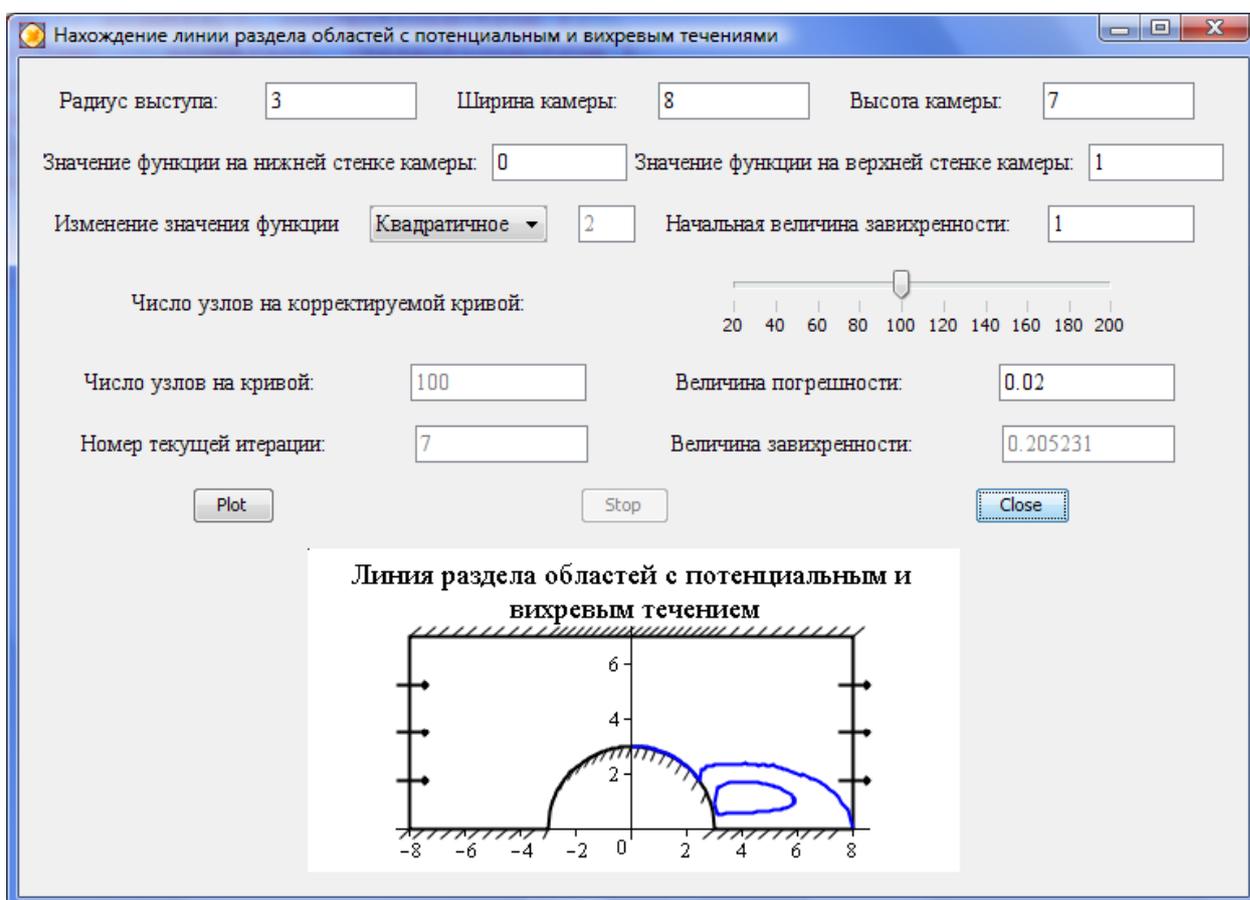


Рис. 19. Интерфейс в Maple

В **Приложении 1, 2, 3** представлены листинги программ для интерфейсов в средах Maple и MatLab и программы «Метод интегральных уравнений для

расчета вихревых течений в водопропускных галереях шлюза». В программе реализованы: ввод данных, их обработка и анализ, сохранение результата. Выходные формы соответствуют требованиям федеральных органов. Область применения: бюджетные организации. Тип ЭВМ: IBM PC. Язык программирования: символьная среда MAPLE. Операционная система: Windows98/NT/2000/2003/XP/Vista/7.

**Заключение.** В данной работе метод граничных элементов применяется для численного моделирования отрывных течений в задачах гидравлики. В качестве основной модели подробно исследуется модель Лаврентьева-Шабата, которая наиболее удобна для исследования течений идеальной жидкости в камерах с выступами, с кавернами, в поворотных галереях гидротехнических сооружений. Даны качественные оценки и получены количественные результаты распределения скоростей в затопленных водопропускных галереях судоходных шлюзов. Последнее дало возможность исследовать динамические характеристики, испытываемые затворами гидротехнических сооружений. Получены следующие результаты

1. Исследована математическая модель Лаврентьева-Шабата в применении к движению потока при наполнении шлюзовых камер через водопропускные галереи.
2. Разработана математическая модель и построена кинематическая картина отрывных течений в каналах произвольной формы: в кавернах, в областях за затворами, в обходных поворотных галереях.
3. Дано теоретическое обоснование опытных лабораторных исследований и действующих конструкций в виде балок и отклоняющих выступов для гашения скоростей в водопропускных сооружениях Нижнесвирского гидроузла. Доказана соответствующая теорема существования отрывных течений в поворотных галереях.

4. Разработан алгоритм численной реализации модели на основе метода граничных элементов. Создана и зарегистрирована в ФСИС программа на ЭВМ для расчета отрывных областей методом граничных элементов.
5. Для модельных областей на основе вихрей Рэнкина дана оценка точности разработанного метода. Дано сравнение двух методов граничных элементов: метода на основе граничных интегральных уравнений и метода комплексной интерполяции.
6. С помощью полученной кинематической картины вычислены гидродинамические нагрузки на затворы затопленных обходных галерей.
7. Построена математическая модель напряженно-деформированного состояния затворов обходных галерей под действием динамических нагрузок при различных режимах работы. Дано сравнение полученных результатов с традиционных исследований в статичном режиме.
8. В рамках рассматриваемой модели течения дано объяснение явления вибрации затвора и кавитации за затвором.
9. Создан пользовательский интерфейс для ввода исходных данных и получения в результате вычислений картины отрывных течений для выполнения курсовых студенческих работ факультетов информационных технологий и гидротехнического в среде Maple и MatLab.

#### **Список использованных источников**

1. Мелешко В.В. Динамика вихревых структур./ В.В.Мелешко., М. Ю. Константинов. – Киев: Наукова Думка. - 1993. -290с.
2. Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели./ Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1977. - 416с.
3. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. / Гольдштик М.А. - Новосибирск: Наука, Сиб. Отделение. – 1981. - 368 с.

4. Голоскоков Д.П. Численно-аналитические методы расчета упругих тонкостенных конструкций нерегулярной структуры./ Голоскоков Д.П. – СПб.: Изд-во Кардакова. - 2006. -218с.
5. Городенский Н.Б. Гаситель вредных скоростей воды в выходных галереях судоходных шлюзов./ Городенский Н.Б., Эндер Г.В. - Авторское свидетельство на изобретение №36916. - 31.05.1954.
6. Михайлов Б.К. Деформированность и устойчивость пространственных пластинчатых систем с разрывными параметрами./ Михайлов Б.К., Кипиани Г.О. - С-Петербург: Стройиздат. – 1996. - 443 с.
7. Громадка Т. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах./ Громадка Т., Лей Ч. - М.: Мир. - 1990. – 303 с.
8. Афанасьев, К. Е. КМГЭ для решения плоских задач гидродинамики и его реализация на параллельных компьютерах. / К. Е. Афанасьев, С. В. Стуколов. - Кемерово: Изд-во КемГУ, 2001. - 206 с.
9. Потапов Д.К. О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае / Потапов Д.К.// Вестн. СПбГУ. Сер. 10 (Прикладная математика. Информатика. Процессы управления). 2004. Вып. 4. С. 125–132.
10. Потапов Д.К. О решениях задачи Гольдштика./ Потапов Д.К.//Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – т.15. – вып.4.
11. Вайнштейн И.И. Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М.А. Гольдштика // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, 2011, N4(3), 320–331.

**Основные результаты Васина А.В. в научных журналах, входящих в перечень ВАК:**

1. Васин А.В. Об одном необходимом условии для интерполяции функциями класса Липшица./Васин А.В. //Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А. Стеклова. – 2004. – т. 315.
2. Vasin A.V. A necessary condition of interpolation by functions of the Lipschitz classes. /Vasin A.V. //Journal of Mathematical Sciences. – 2006. – v.134.
3. Васин А.В. Граничная интерполяция в слабых классах Липшица. / Васин А.В. //Исследования по линейным операторам и теории функций.36: Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А. Стеклова.– 2008. – т.355.
4. Vasin A.V. Boundary interpolation of weak Lipschitz classes./Vasin A.V. //Journal of Mathematical Sciences. –2009. –v.156.
5. Васин А.В. Расчет методом граничных элементов потоков жидкости в модельных областях./Васин А.В., Болбин С.Н. // Журнал университета водных коммуникаций. – 2011. – Вып.2(10).
6. Васин А.В. К вопросу о течении жидкости в водопроводных галереях шлюзовых камер./Васин А.В.// Журнал университета водных коммуникаций. – 2011. – Вып.3(11).
7. Васин А.В. Нахождение линии раздела областей с потенциальным и вихревым течением./Васин А.В., Тимофеева О.А. //Журнал университета водных коммуникаций. – 2012. – Вып. 2(14).
8. Васин А.В. Математическое моделирование опыта Н.Б.Городенского о вихревых течениях в шлюзовых камерах. /Васин А.В.//Журнал университета водных коммуникаций.–2012.–Вып.3(15).
9. Васин А.В. Моделирование зон вихревых течений в обводных галереях шлюзовых камер./Васин А.В., Тимофеева О.А. //Гидротехническое строительство. –2013, № 2.

10. Васин А.В. Определение линии раздела областей вихревых течений. /Васин А.В.//Вестник С-Петербургского Университета. Серия 10. (Прикладная математика. Информатика. Процессы управления). –2013. –№1.
11. Васин А.В. Приложение задачи Гольдштика к расчету гидродинамических нагрузок на гидрозатворы обходных галерей. /Васин А.В.//Речной транспорт (XXI век). –2013. –№2.
12. Васин А.В. Оценка точности метода граничных элементов в задачах математического моделирования движения потока по обводным галереям шлюзов. / Васин А.В. //Морские интеллектуальные технологии. – 2013. – №2(20).
13. Васин А.В. Построение математической модели динамических нагрузок на затворы обходных галерей. / Васин А.В., Голоскоков Д.П., Тимофеева О.А. // Журнал университета водных коммуникаций. – 2013. – Вып.3(19).
14. Васин А.В. Сравнение влияний динамических и гидростатических нагрузок на гидрозатворы обводных галерей. /Васин А.В., Голоскоков Д.П., Тимофеева О.А.// Журнал университета водных коммуникаций, . – 2013. – Вып.4(20).
15. Васин А.В. Проекторы на  $L^p$ -пространства полианалитических функций. /Васин А.В. //Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А. Стеклова.–1991. –т.190.
16. A.V.Vasin. Projections on  $L^p$ -Spaces of Polyanalytic Functions. /Vasin A.V.//Journal of Mathematical Sciences.–1994. –v.71.
17. Vasin A.V. Bounded projections onto spaces of area integrable polyanalytical functions. /Vasin A.V.//Indiana University Mathematical Journal.–1994. –v.43.
18. Васин А.В. Полианалитические формы на компактных римановых поверхностях. /Васин А.В. //Записки научных семинаров ПОМИ им.В.А.Стеклова.–1997. –т.247.
19. A.V.Vasin. Polyanalytic forms on compact Riemann surfaces./VasinA.V.// Journal of Mathematical Sciences. –2000. –v.101.

20. Васин А.В. Предельное множество фуксовой группы и лемма Дынькина. /Васин А.В. //Записки научных семинаров ПОМИ им.В.А.Стеклова. –2003. –т.303.
21. A.V.Vasin. The Limit Set of a Fuchsian Group and Dyn'kin's Lemma. /A.V.Vasin.//Journal Mathematical Sciences. –2005.–v.129.
22. Васин А.В. Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля. /Васин А.В., Кисляков С.В., Медведев А.Н.//Алгебра и анализ. –2013. – т.25.– вып.3.

**Монографии:**

23. Васин А.В. Задача Лаврентьева-Шабата моделирования отрывных течений./Васин А.В. – СПб.:Изд-во ГУМРФ имени С.О. Макарова. – 2013. – 143 с.

**Публикации в других изданиях:**

24. Васин А.В. О симметричности ортогональности в нормированных пространствах. /Васин А.В.// Методы прикладной математики в инженерных расчетах. – СПб: Изд-во СПГУВК. – 1999.
25. Васин А.В. Автоматизация моделирования отрывных течений в обводных галереях шлюзовых камер./Васин А.В. //Вестник ИТАРК.–2012, –№1(3).

**Публикации в материалах конференций:**

26. Васин А.В. О полианалитических функциях на римановых поверхностях.//Материалы Всерос.научн.метод.конф, СПб,СПГУВК,1994.
27. Богатушин В.Я. Моделирование сложных динамических объектов в виде систем линейных дифференциальных уравнений./ Богатушин В.Я., Васин А.В. //Материалы 3 межд. конф «Новое в охране труда и окружающей среды», Алмааты, 1998.
28. Богатушин В.Я. Моделирование сложных динамических объектов в виде систем линейных дифференциальных уравнений./ Богатушин В.Я., Васин

- А.В. // Материалы межд. конф. посвящ. юбилею курорта «Сестрорецк», СПб,1999.
29. Болбин С.Н. Задача течения жидкости по обводному каналу шлюза./ Васин А.В., Болбин С.Н. //Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI межд. научн. конференции, посвященной 70-летию профессора В.П.Дьяконова.-Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. Вып.11-342с.
30. Васин А.В. О полианалитических функциях на компактных римановых поверхностях. /Васин А.В. //Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI межд. научн. конференции, посвященной 70-летию профессора В.П.Дьяконова.-Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. Вып.11.-342с.
31. Васин А.В. Обобщение задачи Гольдштика о вихревых течениях./ Васин А.В.//Региональная информатика (РИ-2012). Юбилейная XIII Санкт-Петербургская международная конференция. Санкт-Петербург, 24-26 октября 2012г.: Материалы конференции. СПОИСУ. – СПб, 2012.-420с.
32. Васин А. Математические модели прикладных NP-полных задач./Васин А.В, Нырков А.П., Соколов С.С.//Труды Российской летней школы «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ2), 6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик. – Казань: Изд-во «Фолиантъ», 2010.-216с.
33. Васин А. В. Математическое моделирование динамических нагрузок на гидрозатворы. /Васин А.В.//Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2013. Материалы научной конференции, 15-20 апреля2013г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2013. – 292с.
34. Kislyakov S.V. The loss of smoothness twice for outer function compared to its module./Kislyakov S.V., Medvedev A., Vasin A.V. //Международная конференция «Нелинейные уравнения и комплексный анализ», 18-22 марта 2013г., Уфа. – Уфа, 2013.