



ИНЖЕНЕРНО-ПРОМЫШЛЕННАЯ
БИБЛИОТЕКА



ПЁШЛЬ Т., проф.

КУРС ГИДРАВЛИКИ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва — 1931

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

ИНЖЕНЕРНО-ПРОМЫШЛЕННАЯ БИБЛИОТЕКА

ПЁШЛЬ Г., проф.

КУРС ГИДРАВЛИКИ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И ВЫСШИХ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО Г. А. ВОЛЬПЕРТ,

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. В. Э. КЛАССЕН

с 148 ЧЕРТ. В ТЕКСТЕ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА — 1931

ВВЕДЕНИЕ.

Основные понятия.

1. Приложение законов механики твердого тела к жидкостям и газам. Основанием для механики жидких и газообразных тел является весьма достоверное предположение, что для применимости основных законов механики, например, уравнений движения Ньютона, условий равновесия, принципа Даламбера и т. п., свойства (природа) частицы тела, точнее говоря, ее агрегатное состояние, несущественны. Так, например, ускорение вполне определяется совокупностью действующих на частицу сил и массой частицы; равновесие существует, если сумма действующих сил равна нулю и т. д. Возможность такого применения законов механики твердого тела к механике жидкостей и газов основывается на том, что для какого-нибудь момента времени каждую частицу жидкости можно предположить затвердевшей и применить к ней законы механики твердого тела (принцип затвердевания). Конечно, при этом прежде всего должен быть принят во внимание особый род сил, действующих на каждую частицу жидкости, распространенной внутри некоторого объема, а затем уже соответствующим образом должно быть представлено, как будет вести себя частица под действием этих сил.

Сущность принятых относительно свойств жидких частиц предположений выражается уравнениями, которые могут быть составлены для состояния равновесия и движения этих частиц. Путем сравнения результатов, полученных решением этих уравнений, с выводами, полученными из соответствующих опытов, следует решить, правильны ли были принятые в основу положения и могут ли они быть достаточными в намеченной для рассмотрения области; в противном случае необходимы дополнительные вспомогательные предположения, вводимые для объяснения физического состояния жидкостей. В дальнейшем мы увидим, что в некоторых вопросах гидравлики достаточно весьма простых предположений, в то время как в других необходимо расширение этих предположений в только что указанном смысле.

2. Свойства жидкостей. а) Идеальные и реальные жидкости. Из всех физических свойств жидкости прежде всего следует указать на крайне легкую подвижность ее частиц. Сопrotивление, которое надо преодолеть при перемещении двух соседних частиц относительно друг друга, в общем случае настолько мало, что в некоторых вопросах можно пренебрегать им; а это сопротивление есть не что иное как внутреннее трение жидкости. В таком случае говорят об идеальной жидкости, и к числу вопросов, при изучении которых жидкость может полагаться таковой, относятся, за исключением рассматриваемых в гидростатике, следующие: истечение жидкостей, определение давления струи на стенки сосуда, который она омывает (напр., на рабочее колесо турбины), и случаи удара и смешения, происходящие внутри жидкости.

В остальных вопросах гидравлики, и как раз наиболее важных в практическом отношении, необходимо принять во внимание и вводить в вычисления внутреннее трение или вязкость жидкости, которая в этом случае называется реальной. К таким вопросам относятся: движение воды в трубах, каналах, реках, через плотины и, в особенности, — определение

сил, с которыми жидкость действует на двигающиеся в ней тела, иными словами — определения сопротивления, оказываемого жидкостью движению этих тел.

Для воды статическое сопротивление сдвигу, которое можно рассматривать как наибольшую величину трения прилипающего слоя воды (оно зависит также и от капиллярности), оказалось равным $2,63 \text{ кг/м}^2$, что и позволяет во всех гидростатических расчетах не принимать во внимание касательных сил. Относительно законов трения для движущейся жидкости см. п. 37.

б) Несжимаемость жидкостей. Реальные жидкости (вода и пр.) даже при применении больших давлений сжимаются настолько мало, что при всех гидравлических расчетах эти жидкости можно считать несжимаемыми, обладающими постоянным объемом¹⁾.

Противоположностью им являются газы, которые стремятся заполнить весь предоставляемый им объем, от величины которого будет зависеть их плотность.

Плотностью ρ называют количество массы, приходящейся на единицу объема. Если масса M распределена по объему \mathfrak{B} равномерно, то плотность определится равенством:

$$\rho = \frac{M}{\mathfrak{B}} \dots\dots\dots(1)$$

Размерность плотности в технической системе единиц:

$$[\rho] = \frac{[M]}{[\mathfrak{B}]} = \frac{[KL^{-1}T^2]}{[L^3]} = [KL^{-4}T^2],$$

единица плотности: $1 \text{ кг сек}^2/\text{м}^4$.

В случае неравномерного распределения массы по объему \mathfrak{B} под плотностью ρ понимается предел отношения $\frac{\Delta M}{\Delta \mathfrak{B}}$, когда \mathfrak{B} стремится к нулю, при чем ΔM есть масса, приходящаяся на $\Delta \mathfrak{B}$, значит,

$$\rho = \lim_{\Delta \mathfrak{B} \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta \mathfrak{B}} = \frac{dM}{d\mathfrak{B}} \dots\dots\dots(2)$$

Через γ в дальнейшем будет обозначаться вес единицы объема жидкости, в технической системе единиц — вес одного кубического метра жидкости; значит, $\gamma = \frac{G}{\mathfrak{B}}$ и так как вес $G = Mg$, то

$$\gamma = \rho g \dots\dots\dots(3)$$

Размерность $\gamma = \frac{[K]}{[L^3]}$, единица — 1 кг/м^3 .

Для воды в технических единицах $\gamma = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho = \frac{\gamma}{g} \sim 100 \text{ кг сек}^2/\text{м}^4$. Для воздуха, находящегося под нормальным барометрическим давлением (760 мм ртутного столба) и при 0°C ,

$$\gamma = 1,293 \text{ кг/м}^3, \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1,293}{9,81} \sim \frac{1}{8} \text{ кг сек}^2/\text{м}^4.$$

Сжимаемость воды при увеличении давления на 1 кг/см^2 и при применении давлений

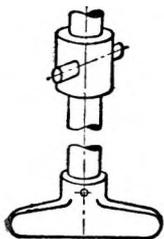
от 0 до 200 кг/см^2 при 0°C равна	от $\frac{525}{10^7}$ до $\frac{488}{10^7}$
от 0 до 200 кг/см^2 при 20°C равна	от $\frac{491}{10^7}$ до $\frac{438}{10^7}$

первоначального объема; например, 1 литр воды при 0°C при повышении давления от 0 до 1 кг/см^2 уменьшается в объеме на $0,0525 \text{ см}^3$.

Изменение плотности следует принимать во внимание только для газов и паров, соответствующим образом при этом выражая ее зависимость от других физических факторов, в особенности, от давления и температуры. Для реальных жидкостей, напр., для воды, как уже было сказано, ρ и γ следует принимать постоянными.

¹⁾ За исключением гребера Weegen'a, который построен на свойстве сжимаемости жидкости. Прим. ред.

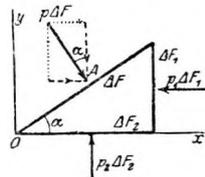
3. Гидромеханическое давление. Любая органическая часть \mathfrak{V} покоящейся жидкости, заключенной в каком-нибудь сосуде, должна со стороны окружающей жидкости подвергаться определенному воздействию, чтобы не прийти в движение под влиянием собственного веса. Это воздействие выполняется поверхностными силами, которые действуют вдоль границы объема \mathfrak{V} перпендикулярно к каждому элементу этой границы (поверхности) и направлены внутрь объема. Силу, с которой окружающая жидкость действует на какую-нибудь часть поверхности сдавливаемого ею объема, называют давлением жидкости ΔD . На единицу поверхности содержащую в себе точку A , которая лежит внутри ΔF , приходится сила $\frac{\Delta D}{\Delta F}$; выражение



Черт. 1.

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta D}{\Delta F} = \frac{dD}{dF} \dots\dots\dots(4)$$

называют гидромеханическим давлением (или просто давлением) в точке A . Это выражение должно давать всегда одно и то же предельное значение независимо от вида кривой, ограничивающей рассматриваемую часть поверхности, если только эта часть взята достаточно малой. При этом переход к пределу совершается так, что все точки кривой, ограничивающей ΔF , сдвигаются в рассматриваемую точку A . Подобное же рассуждение применимо и по отношению к плотности, при переходе к предельному значению в выражении (2).



Черт. 2.

Из выражения (4) следует, что гидромеханическое давление p принимает одно и то же значение для любой плоскости, проходящей через рассматриваемую точку A . Чтобы убедиться в этом, представим себе вблизи точки A маленькую трехгранную призму и напишем для нее условия равновесия. На ΔF действует сила $p \cdot \Delta F$, на боковые грани — силы $p_1 \cdot \Delta F_1$ и $p_2 \cdot \Delta F_2$ (силы, распределенные по объему, как бесконечно малые высших порядков, можно не рассматривать). Проектируя силу $p \cdot \Delta F$ на направления осей x и y , получаем:

$$p \cdot \Delta F \cdot \sin \alpha = p_1 \cdot \Delta F_1, p \cdot \Delta F \cdot \cos \alpha = p_2 \cdot \Delta F_2,$$

а так как $\Delta F_1 = \Delta F \cdot \sin \alpha$, $\Delta F_2 = \Delta F \cdot \cos \alpha$, то из этих уравнений следует:

$$p_1 = p_2 = p \dots\dots\dots(5)$$

Итак, давление p в данной точке одинаково во всех направлениях. Следовательно, давление p есть уже не вектор, как это следовало из первоначального определения, а только функция места, т. е. скаляр.

Следует добавить, что p есть непрерывная и дифференцируемая функция места; значит, если в какой-либо точке $A(x, y, z)$ жидкости давление равно $p(x, y, z)$, то в бесконечно близкой к A точке $A_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ давление p_1 отличается от p на бесконечно малую величину и равно

$$p_1 = p + \Delta p, \text{ где } \Delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z.$$

Это соотношение нам потребуется при выводе условий равновесия и уравнений движения.

Итак, если функция $p = p(x, y, z)$ известна, известно и давление жидкости на заданную поверхность Δf (например на поверхность, примыкающую к стенке сосуда); оно равно $p \cdot \Delta f$ и направлено перпендикулярно к Δf . Этим замечанием мы воспользуемся при определении давления жидкости на стенку сосуда, ее заключающего, или на часть этих стенок. В гидравлике вообще редко рассматриваются жидкости сами по себе, наоборот, почти всегда изучается взаимодействие между жидкостью и твер-

дыми телами, которые ограничивают жидкость или же сами омываются жидкостью.

Размерность давления — $\frac{[K]}{[L^2]}$. Его техническая единица — 1 кг/см^2 , которая часто называется технической атмосферой и обозначается: 1 „At“

Согласно замечанию, сделанному в п. 2, для жидкостей плотность ρ не зависит от давления p , в то время как для газов такая зависимость существует и при изотермическом изменении состояния газа (т.е. когда при расширении и сжатии газа температура его остается постоянной) она выражается законом Бойля-Мариотта о пропорциональности p и ρ :

$$\rho = c p, \dots \dots \dots (6)$$

где c есть некоторая постоянная.

При изучении газов часто вместо плотности ρ вводится удельный объем v , т. е. объем в m^3 (или cm^3) 1 кг газа при давлении p . Тогда $\rho v = 1$ или $gsv = 1$ и уравнение (6) примет вид:

$$p v = \frac{1}{c g} = \text{const} \dots \dots \dots (6')$$

Такая форма закона изотермического изменения состояния газа вполне эквивалентна формуле (6).



ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ГИДРОСТАТИКА.

В содержание этой части книги входят: 1) условия равновесия жидкостей и понятия, при этом возникающие, при чем преимущественно рассматриваются тяжелые несжимаемые жидкости; 2) определение давлений, производимых жидкостью на плоские и кривые стенки, и 3) наиболее существенные вопросы плавания и статической устойчивости плавающих тел. Попутно затронуты некоторые проблемы о равновесии сжимаемых жидкостей.

I. Равновесие. Поверхности равного давления.

4. Условия равновесия. Прежде всего найдем аналитическое выражение гидромеханического давления p , определению которому мы дали в п. 3, для всех точек распространенной внутри некоторого объема жидкости, на которую действуют заданные объемные силы ¹⁾. В качестве таковых в большинстве случаев приходится рассматривать только вес жидкости или же силы инерции, в частности — центробежную силу. Эти силы мы будем относить к единице массы жидкости, на которую они действуют, так что равнодействующая их определится ускорением b , компоненты которого по осям произвольной прямоугольной системы координат обозначим через X, Y, Z . В таком случае на частицу жидкости с массой ΔM действует сила $b \cdot \Delta M$ ($X \cdot \Delta M, Y \cdot \Delta M, Z \cdot \Delta M$). Выделим в рассматриваемой жидкости частицу в форме маленького цилиндра, образующая которого параллельна оси x , а объем его равен $\Delta F \cdot \Delta x$, следовательно, его масса $\Delta M = \rho \cdot \Delta F \cdot \Delta x$. Кроме объемных сил на частицу действуют еще давления жидкости вдоль всей поверхности цилиндра. Давления на основания цилиндра соответственно равны $p \cdot \Delta F$ и $(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta x) \cdot \Delta F$; давления же на боковую поверхность перпендикулярны к оси x и не дают составляющей в ее направлении. Проектируя действующие силы на ось x , получим:

$$p \cdot \Delta F - (p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x) \cdot \Delta F + X \cdot \rho \cdot \Delta F \cdot \Delta x = 0$$

и аналогичным путем для осей y и z

$$p \cdot \Delta F - (p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \Delta y) \cdot \Delta F + Y \cdot \rho \cdot \Delta F \cdot \Delta y = 0,$$

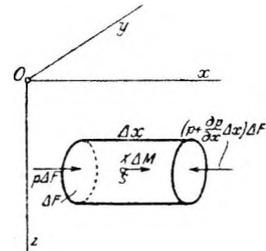
$$p \cdot \Delta F - (p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta z) \cdot \Delta F + Z \cdot \rho \cdot \Delta F \cdot \Delta z = 0$$

или по сокращении:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \dots\dots (7)$$

Получили выражения для приращения давления в направлениях x, y, z .

Так как направление взятой системы прямоугольных осей было совершенно произвольным, смысл написанных уравнений можно выразить следующими словами: приращение давления в каком-нибудь направлении s равно произведению плотности ρ на компонент активного ускорения в этом направлении.



Черт. 3.

Автор называет эти силы «массовыми» („Massenkräfte“).

Прим. ред.

Так как три дифференциальных уравнения (7) служат для определения одного неизвестного p , они не могут быть независимыми, а должны быть эквивалентны одному уравнению. Чтобы его найти, умножим уравнения (7) соответственно на dx , dy , dz и сложим. Одновременно мы получим условия, которым должны удовлетворять X , Y , Z , чтобы вообще могло существовать состояние равновесия жидкости. По выполнении указанных операций слева у нас будет полный дифференциал давления dp , и уравнение представится так:

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) \dots \dots \dots (8)$$

Для несжимаемой, капельной жидкости $\rho = \text{const}$, интегрирование этого уравнения дает:

$$p = p_0 + \rho \int_{A_0}^A (Xdx + Ydy + Zdz) \dots \dots \dots (9)$$

Таким образом, давление p в любой точке A определяется через давление p_0 в какой-нибудь другой точке A_0 и „линейный интеграл ускорения“, взятый вдоль какого-нибудь пути, проходящего через эти точки. На основании тех же соображений, которые в динамике привели нас к установлению принципа живой силы, мы можем заключить и здесь, что однозначное решение для p получается только в том случае, если интеграл, входящий в уравнение (9), не зависит от пути, т. е., когда выражение $Xdx + Ydy + Zdz$ есть полный дифференциал. Пусть $Xdx + Ydy + Zdz = dW$; но в таком случае

$$X = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial W}{\partial z}, \dots \dots \dots (10)$$

и должны иметь место следующие соотношения между частными производными от X , Y , Z :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \dots \dots \dots (11)$$

Одновременно это есть те условия, которым должны удовлетворять компоненты ускорения b , чтобы вообще при его наличии могло существовать равновесие жидкости. Итак, компоненты X , Y , Z должны быть частными производными от функции W , которая здесь играет ту же роль, какую полная работа или потенциал — в динамике. Уравнение (8) представится теперь так: $dp = \rho dW$, а уравнение (9) —

$$p = p_0 + \rho(W - W_0) \dots \dots \dots (12)$$

где интегральная постоянная определена условием: $W = W_0$ при $p = p_0$.

Соединяя внутри жидкости все точки с равными значениями давления p , получим поверхности равного давления $p = \text{const}$; они идентичны с поверхностями уровня, под которыми понимают поверхности, соответствующие равным значениям потенциала W .

Поверхности равного давления образуют семейство поверхностей и обладают следующими свойствами:

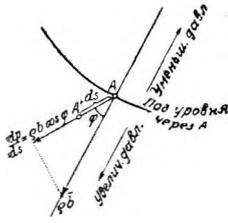
1. В какой-либо точке A вектор b (X , Y , Z) перпендикулярен к той поверхности семейства, которая проходит через точку A . Вдоль этой поверхности $dp = 0$, и если проекции линейного элемента, на ней расположенного, обозначить через dx , dy , dz , то условие перпендикулярности выразится как раз соотношением:

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) = 0 \dots \dots \dots (13)$$

2. Две поверхности равного давления нигде не могут пересекаться или касаться. Действительно, так как каждой поверхности соответствует определенное значение постоянного в уравнении $p = \text{const}$, то точке пересечения или касания следовало бы приписать оба значения этой постоянной (или постоянного потенциала $\square\square\square$ чего, конечно, сделать нельзя. Если век-

тор ускорения \vec{b} образует с каким-нибудь направлением $\overline{AA'} = ds$ в точке A угол φ , то уравнение (8) можно записать в следующей форме:

$$dp = \rho b \cdot \cos \varphi \cdot ds \text{ или } \frac{dp}{ds} = \rho b \cdot \cos \varphi, \dots \dots \dots (14)$$



Черт. 4.

т. е., как уже было раз сказано, приращение давления в каком-нибудь направлении равно произведению плотности ρ на компонент ускорения активных сил во взятом направлении.

Для $\varphi = 0$, т. е. для направления, совпадающего с нормалью в точке A к поверхности уровня, приращение давления будет наибольшим; оно называется градиентом давления и возрастает всегда в направлении \vec{b} . Производная по какому-нибудь направлению ds скалярной функции p дает приращение давления $\frac{dp}{ds}$ в этом направлении, и величина эта равна компоненту градиента давления в этом же направлении. Давление в соседней к A точке A' будет равно $p + \frac{dp}{ds} \cdot \Delta s$, если через Δs обозначить расстояние $\overline{AA'}$.

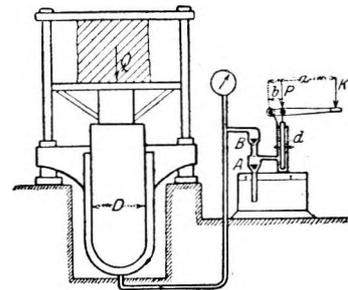
5. Сжатые жидкости. Если в каком-нибудь месте жидкости искусственным путем (например увеличением нагрузки поршня, введенного в жидкость через плотно пригнанное отверстие, или нагнетательным насосом) увеличить давление на некоторую величину δ и довести его до p_0 , то ровно на такую же величину увеличится давление и в остальных точках жидкости, в чем легко убедиться при помощи уравнения (9). В гидравлических прессах применяются давления от 1000 кг/см^2 и более, в то время, как собственный вес воды лишь при 10 метрах водяного столба дает давление в 1 кг/см^2 . Поэтому при незначительной высоте рассматриваемой жидкости можно с большим приближением принять, что во всей жидкости

$$p = p_0 \dots \dots \dots (15)$$

Это есть закон Паскаля о равенстве давлений внутри сжатой жидкости.

Из этого закона следует: сила, действующая на поршень, введенный в сжатую жидкость через отверстие с поперечным сечением F , всегда равна $F \cdot p_0$, какой бы формы ни был погруженный в жидкость поршень.

Пример 1. В гидравлических прессах с устройством, изображенным на черт. 5, отношение силы P , действующей на маленький поршень с диаметром d к грузу Q , действующему на большой поршень с диаметром D , определяется отношением площадей поршней, которое, в свою очередь, определяется отношением квадратов диаметров; поэтому имеем $\frac{Q}{P} = \frac{D^2}{d^2}$, $Q = P \cdot \frac{D^2}{d^2}$. Если P возникает от действия силы K , приложенной к концу рычага, то



Черт. 5.

$$Ka = Pb \text{ и поэтому } Q = \frac{aD^2}{bd^2} \cdot K \dots \dots \dots (16)$$

Действие пресса вполне понятно. При ходе маленького поршня вверх открывается всасывающий клапан A , питательный же клапан B закрывается; при обратном ходе поршня (вниз) клапан A закрывается, B открывается.

Вследствие трения, возникающего в кожаных манжетах насоса, значение Q , даваемое формулой (16), уменьшается приблизительно на 20—25%; значит, коэффициент полезного действия гидравлического пресса колеблется от 0,80 до 0,75.

6. Тяжелые жидкости. Если ось z направить вертикально вниз, то компонентами ускорения объемных (Massenkräfte) сил, действующих на жидкость, будут:

$$X = 0, Y = 0, Z = g.$$

Уравнение (8) дает: $dp = pgdz$; интегрируем его, и так как $pg=\gamma$, получим:

$$p = p_0 + \gamma z, \dots \dots \dots (17)$$

при чем интегральная постоянная p_0 определена так, что она дает давление в какой-нибудь точке жидкости, находящейся в плоскости $z = 0$. Поверхностями равного давления (а также поверхностями уровня) будут горизонтальные плоскости, в том числе и „свободная поверхность“ жидкости. Если плоскость xy совместить со свободной поверхностью, то в таком случае $p = p_0$ для $z = 0$, и p_0 равно атмосферному давлению воздуха на этой поверхности.

Решив уравнение (17) относительно z , получим:

$$z = \frac{p - p_0}{\gamma} \dots \dots \dots (18)$$

z есть высота, соответствующая разности давлений $p - p_0$, и называется высотой, соответствующей давлению, или пьезометрической высотой.

Разность давлений $p - p_0 = 1 \text{ кг/см}^2$ в разных жидкостях измеряется разными высотами, в зависимости от веса единицы объема γ жидкости. Например, для

- ртути. $\gamma = 13,6 \text{ кг/дм}^3, \frac{p - p_0}{\gamma} = \frac{1}{0,0136} = 73,5 \text{ см},$
- воды $\gamma = 1 \text{ кг/дм}^3, \frac{p - p_0}{\gamma} = \frac{1}{0,001} = 1000 \text{ см} = 10 \text{ м},$
- воздуха при 13°С и $\frac{p - p_0}{\gamma} = \frac{10000}{1,188} = 8418 \text{ м}$
- 1 кг/см^2 давления: $\gamma = 1,188 \text{ кг/м}^3.$

Пример 2. Высота нормальной атмосферы. Для давления воздуха, равного давлению 760 мм ртутного столба (Hg) при 0°С , употребляется название „нормальная атмосфера“ (1 „Ат“). Так как при этих условиях вес единицы объема воздуха $\gamma = 1,293 \text{ кг/м}^3$, давление ртутного столба высотой в 76 см равно:

$$\gamma z = 0,0136 \cdot 76 = 1,033 \text{ кг/см}^2,$$

то нормальное давление воздуха может измеряться следующими высотами:

- ртути. $z = 76 \text{ см}$
- воды $= \frac{1,033}{0,001} = 1033 \text{ см} = 10,33 \text{ м},$
- воздуха ($\gamma = 1,293 \text{ кг/м}^3$) $= \frac{10333}{1,293} \cong 8000 \text{ м}.$

Необходимо, следовательно, составить столб воздуха из 8000 кубов, объем каждого из которых равен 1 м^3 , при чем воздух должен находиться при „нормальных“ условиях, т. е. при 0°С и 76 см Hg, чтобы получить нормальное давление воздуха. Эта „высота нормальной атмосферы“ принимается в основу при приближенных расчетах полета свободных аэростатов, правда, при поднятии их только на небольшую высоту.

При соприкосновении двух покоящихся жидкостей разных плотностей (или жидкости и газа) давление p по обе стороны границы имеет одну и ту же величину, — на границе двух жидкостей давление одно и то же для обеих жидкостей.

Уравнение (7) можно представить графически; получится так называемая кривая давления. Для однородной тяжелой жидкости эта кривая будет прямой, наклоненной под углом α (черт. 6), который определяется равенством:

$$\text{tg } \alpha = \gamma. \dots \dots \dots (19)$$

Пример 3. Расслоенные жидкости. Если несколько несмешивающихся жидкостей влиты в один сосуд, то они располагаются друг над другом сообразно их весам единицы объема $\gamma, \gamma_1 \dots$. Как видно из чертежа 6, на поверхностях раздела будут давления:

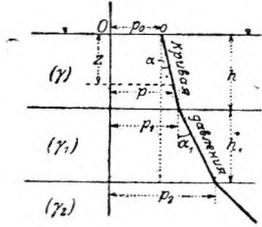
$$p_1 = p_0 + \gamma h; \quad p_2 = p_1 + \gamma_1 h_1 = p_0 + \gamma h + \gamma_1 h_1 \text{ и т.д.}$$

Кривая давления изображена на том же чертеже 6.

Пример 4. Равновесие жидкости в U—образной трубке. Поверхности уровня тяжелой жидкости будут горизонтальными плоскостями и в том случае, когда жидкость налита в сосуд произвольной формы, например, U—образной (сообщающиеся сосуды).

а) Если давления p_0 и p_1 ($< p_0$) на свободной поверхности в обоих коленах различны (черт. 7), тогда разность высот h определится из условия равенства давлений в каком-нибудь более низком сечении; имеем:

$$p_0 = p_1 + \gamma h, \text{ откуда } h = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} \dots \dots \dots (20)$$



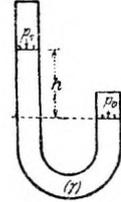
Черт. 6.

Этим соотношением пользуются в так называемых микроманометрах — жидких манометрах, употребляемых для измерения малых давлений (с отсчетом по нониусу и микроскопу).

Чтобы разность высот была ясно различима и при очень малых разностях давлений, для манометра следует брать жидкость с малым γ (воду, алкоголь и т. п.).

б) Если более высокое колено сделать закрытым и выкачать оттуда воздух, то можно принять $p_1 \sim 0$; тогда из формулы (20) получим:

$$h = \frac{p_0}{\gamma} \dots \dots \dots (21)$$

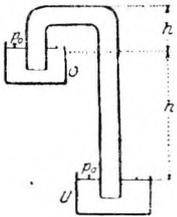


Черт. 7.

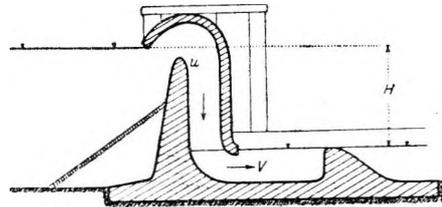
В этом случае манометр называется барометром и употребляется для измерения атмосферного давления.

с) Обстоятельством, что давление воздуха в состоянии уравновесить столб воды высотой немногим более 10 м, пользуются в сифонах, употребляемых для переливания воды из сосуда с более высоким уровнем в сосуд с более низким уровнем. Сифон имеет вид перевернутой U—образной трубки (черт. 8). Чтобы вода в сифоне не разрывалась, рабочая высота h сифона должна быть не больше 10 м (для других жидкостей предельное значение h , конечно, будет другим).

В последнее время сифон употребляется в плотинах и водохранилищах (сифонные плотины) в качестве автоматического регулятора уровня воды (черт. 9). Существенным для при-



Черт. 8.

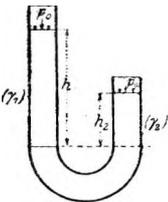


Черт. 9.

менению в этих случаях сифона оказывается то, что отверстие для вытекания лежит ниже нижнего бьефа, и истечение происходит под водою (п. 21 с.). Когда уровень верхнего бьефа находится на высоте, указанной на черт. 9, вода переливается через плотину, не попадая в сифон, при чем расход воды при этом переливании зависит только от разности высот верхнего бьефа и порога плотины U (см. п. 22). При дальнейшем же поднятии верхнего бьефа начинает действовать сифон; вода переливается по нему, и когда вертикальная часть его трубы сплошь заполнится водой, она высосет весь воздух, и сифон работает полностью. Величина V скорости истечения будет зависеть теперь от всей разности H высот верхнего и нижнего бьефов; поэтому запруженная вода стекает значительно быстрее, чем при обыкновенном водосливе.

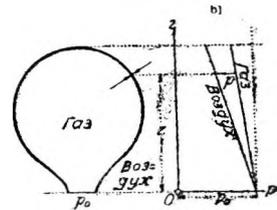
д) Если в U—образную трубку налить две несмешивающиеся жидкости с разными весами единицы объема γ_1 и γ_2 ($> \gamma_1$) и если давления на свободных поверхностях в обоих коленах трубки одинаковые, то разность высот жидкостей в обоих коленах определится из условия равенства давлений в каком-нибудь сечении трубки (через оба колена); например,

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2, \text{ следовательно, } \frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \dots \dots (22)$$



Черт. 10.

Пример 5. Распределение давления в свободном аэростате. Если отверстие для наполнения аэростата открыто, то газ, наполняющий аэростат, имеет в этом отверстии тоже давление p_0 что и внешний воздух. В следующих



Черт. 11.

кверху сечениях давление начинает убывать как во внешнем воздухе, так и в газе, наполняющем аэростат; но в воздухе, вследствие большего веса единицы его объема, оно будет убывать быстрее, чем в газе внутри аэростата. Кривые давления для воздуха и газа построены на чертеже 11. Для каждой высоты z избыток давления,

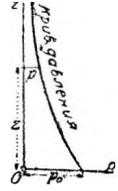
направленный изнутри наружу, определится отрезком p . Сумма вертикальных слагающих этих избытков давлений дает поддерживающую силу (статическую) аэростата. Избыток давления будет наибольшим в наивысшей точке аэростата, где и удобнее всего устанавливать клапан, необходимый для спуска.

Пример 6. Распределение давления в тяжелом газе. Для газа, температура которого везде одинакова, в уравнении (8) надо заменить ρ , согласно уравнения (6), через cp . Направив ось z вертикально вверх, будем иметь: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$ и $dp = -cpgdz$

или $\frac{dp}{p} = -cg dz$. Интегрируя, получим $\log p = -cgz + C$ или, положив, что при $z = 0$ давление p равно нормальному воздушному давлению p_0 :

$$p = p_0 e^{-cgz} \dots \dots \dots (23)$$

т. е. давление в тяжелом газе, температура которого везде одинакова, изменяется по закону показательной функции. Кривой давления будет показательная кривая (черт. 12). Если, в частности, взят атмосферный воздух, то столб его, простирающийся в данном случае до бесконечности, дает в силу своего собственного веса в точке $z = 0$ то же давление, что и нормальная (однородная) атмосфера вышиною в 8000 м (пример 21).



Черт. 12.

7. Тяжелые жидкости под действием дополнительного ускорения.

То обстоятельство, что все явления механики — здесь, например, распределение давления или вид поверхностей уровня жидкости — не должны зависеть от равномерного движения всей жидкости в целом (принцип относительности механики Галилея-Ньютона), в гидростатике выражается тем, что в уравнения для давления в жидкости входят только ускорения, но не скорости.

Но уравнение (7) и (8) остаются в силе и в том случае, когда жидкость движется с ускорением, если только, согласно принципу Даламбера, к ускорениям активных сил (например силы тяжести) присоединить ускорения пассивных сил — сил инерции. Если при этом движущаяся в целом жидкость должна быть в состоянии равновесия, то эти вновь вводимые ускорения, возникающие от инерции массы жидкости, 1) не должны зависеть от времени и 2) должны удовлетворять условиям (11).

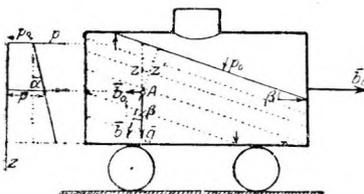
Несколько подобного рода случаев встречается на практике; они разобраны в нижеследующих примерах.

Эквивалентность тяжелой и инертной массы, утверждаемая теорией относительности, находит себе вполне естественное подтверждение в одинаковом действии ускорений, возникающих от тяжести и от инерции.

Пример 7. В вагоне-цистерне, движущемся по горизонтальному пути с равномерным ускорением b_0 , равнодействующее ускорение в каждой точке A внутри жидкости после установления равновесия (черт. 13), равно $b = \bar{b}_0 + g$; так как поверхности уровня перпендикулярны к направлению b , то они образуют семейство параллельных плоскостей, наклоненных к горизонтальной плоскости под постоянным углом α , определяемым из равенства $\text{tg } \alpha = \frac{b_0}{g}$.

Давление в какой-нибудь точке A определится уравнением:

$$p = p_0 + \rho bz' = p_0 + \rho \frac{g}{\cos \beta} \cdot z \cos \beta = p_0 + \rho z \dots \dots \dots (24)$$



Черт. 13.

(так как $b = \frac{g}{\cos \beta}$, $z' = z \cos \beta$) и, следовательно, зависит только от глубины точки A под свободной поверхностью жидкости в вертикальном направлении. Распределение давления по вертикальному направлению изобразится опять прямой, наклоненной под углом α ($\text{tg } \alpha = \gamma$). В точках, где какая-нибудь поверхность уровня пересекает стенки сосуда (боковые стенки, пол или потолок), давления одинаковы.

При равнозамедленном движении (торможении) поверхности уровня наклонены в сторону, обратную направлению движения.

Приведенные рассуждения, относящиеся только к состоянию равновесия, конечно, не дают возможности судить о расположении свободной поверхности жидкости в случае вне-

запного или постепенного изменения ускорения, например, при переходе в постоянную скорость или при переходе от таковой к замедленному движению. (Если ускорение длится недостаточно долго, то в этом случае свободная поверхность жидкости вовсе не успевает принять положения равновесия).

Пример 8. Равномерно-вращательное движение жидкости. На каждую частицу массы жидкости, находящейся в равномерно-вращательном движении, кроме ускорения g действует еще центробежное ускорение $x\omega^2$, направленное перпендикулярно к оси и во внешнем направлении от нее. Если взять систему осей $Oxyz$ (y направлено перпендикулярно к чертежу, черт. 14), то $Y=0$ и можно ограничиться определением формы меридиональной кривой в плоскости xz . В этом случае $X = x\omega^2$, $Z = -g$, и дифференциальным уравнением меридиональной кривой поверхности уровня будет:

$$\frac{dp}{\rho} = Xdx + Zdz = 0 = x\omega^2 dx - g dz.$$

Интегрирование его дает:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} (z - z_0) \dots \dots \dots (25)$$

Интегральная постоянная определяется условием: $z=z_0$ при $x = 0$.

Меридиональные кривые образуют семейство конгруэнтных парабол, соответствующих разным значениям z_0 и получаемых одна из другой при передвижении их параллельно оси z . Поверхности уровня вполне определяются заданием z_0 . Если, в частности, парабола z_0 является свободной поверхностью жидкости, на которую действует, например, постоянное давление воздуха p_0 , то давление в какой-нибудь точке $A(x, z)$ определится из уравнения:

$$p = p_0 + \rho \left[\frac{1}{2} x^2 \omega^2 - g (z - z_0) \right] \dots \dots \dots (26)$$

Распределение давления вдоль какой-нибудь параллели к оси z ($x = \text{const}$) опять изобразится прямой, наклоненной под углом α , при чем опять $\text{tg} \alpha = \rho g = \gamma$. Заметим, что p согласно уравнения (26), возрастает с уменьшением z .

Если в состоянии покоя высота жидкости в сосуде равна h , то при помощи уравнение (25) легко найти зависимость между h и высотой H , до которой жидкость подыметься при вращении сосуда с угловой скоростью ω . Уравнение (25) для точки $B(x = R, z = H)$ дает:

$$H - z_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g};$$

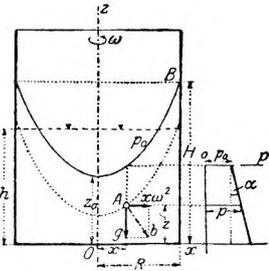
так как объем жидкости остается постоянным, то

$$R^2 \pi h = R^2 \pi z_0 + \frac{1}{2} R^2 \pi (H - z_0), \text{ или } H - z_0 = 2(h - z_0) = \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Итак,

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}, H = h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

В этом примере рассматривается установившееся состояние движения всей жидкости в целом, о возникновении которого ничего не говорится; во всяком случае идеальная жидкость, находящаяся в цилиндрическом сосуде, не может прийти в движение от того, что цилиндрический сосуд (без поперечных стенок) приведен во вращение вокруг своей оси.



Черт. 14.

II. Давление на плоские и кривые стенки.

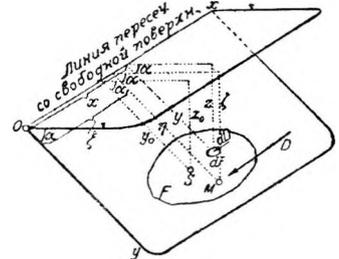
8 и 9. Плоские стенки. Центр давления. Сила, с которую жидкость действует на какую-нибудь часть поверхности стенки, ограничивающей жидкость, вычисляется как сумма элементарных сил, действующих на отдельные элементы этой поверхности. На глубине ζ на единицу площади действует согласно уравнения (17) давление, большее давления на свободной поверхности или на наружной стороне рассматриваемой стенки на величину $\rho = \gamma z$ (вместо $p-p$ написано для простоты p). Поэтому на элемент dF (черт. 15) действует элементарная сила давления $dD = p dF = \gamma z \cdot dF$; так как все эти элементарные силы параллельны между собою и направлены в одну сторону, а интеграл $\int z dF$ равен $z_0 F$, где F есть площадь той части стенки, давление на которую вычисляется, а z_0 — расстояние центра тяжести этой

площади до свободной поверхности жидкости, то равнодействующее давление на поверхность F будет:

$$D = \gamma z_0 F. \dots \dots \dots (27)$$

Таким образом, равнодействующее давление на плоскую площадь F направлено перпендикулярно к F и равно произведению давления γz_0 в центре тяжести площади F на величину этой площади.

Точку пересечения M поверхности F с линией действия D , т. е. точку приложения давления D , называют центром давления. Его координаты ξ, η по отношению к системе осей Oxy , в которой Ox совпадает с линией пересечения плоскости, проходящей через F , со свободной поверхностью, определяются применением теоремы о моментах: для всякой оси момент равнодействующей силы равен сумме моментов составляющих сил. Имеем



Черт. 15.

$$\left. \begin{array}{l} \text{для оси } y: D\xi = \int x \cdot dD \text{ или } \gamma z_0 \cdot F\xi = \gamma \int xz \cdot dF \\ \text{для оси } x: D\eta = \int y \cdot dD \text{ или } \gamma z_0 \cdot F\eta = \gamma \int yz \cdot dF \end{array} \right\} \dots (28)$$

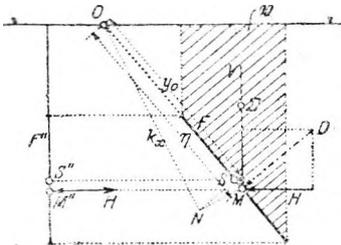
Если α есть угол между плоскостью F и свободной поверхностью жидкости, то z_0 и z можно заменить соответственно через $y_0 \sin \alpha$ и $y \sin \alpha$. После этой замены в уравнение (28) войдут интегралы $\int xy dF$ и $\int y^2 dF$. Первый из них есть центробежный момент (геометрический) площади F относительно пары осей Oxy , а второй, $\int y^2 dF$, есть момент инерции (геометрический) площади F относительно оси x . Введем обозначения:

$$\int xy dF = D_{xy}; \quad \int y^2 dF = Fk_x^2 = F(y_0^2 + k_0^2),$$

где через k_x и k_0 обозначены радиусы инерции относительно x и оси, ей параллельной и проходящей через S . Теперь из уравнения (28) находим:

$$\xi = \frac{D_{xy}}{Fz_0}; \quad \eta = \frac{k_x^2}{y_0} = y_0 + \frac{k_0^2}{y_0} \dots \dots \dots (29)$$

Второе из этих уравнений показывает, что центр давления M лежит всегда глубже, чем S , но расстояние между ними (по вертикали) становится тем меньше, чем больше y_0 , т. е. чем глубже находится под свободной поверхностью жидкости рассматриваемый участок стенки F .



Черт. 16.

Если смачиваемая жидкостью площадь имеет ось симметрии в вертикальной плоскости, то, совместив ось y с этой осью симметрии, будем иметь: $D_{xy} = 0$; но тогда и $\xi = 0$, т. е. у симметричных смачиваемых стенок, расположенных указанным образом, центр давления лежит на оси симметрии, и для определения его положения достаточно одной второй из формул (29).

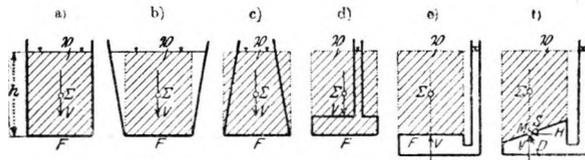
Из тех же формул (29) видно, что положение M на смачиваемой площади F не зависит от a ; следовательно, при вращении F около линии пересечения плоскости Oxy со свободной поверхностью M сохраняет свое положение. Поэтому в некоторых из нижеприведенных примерах ограничимся рассмотрением только вертикальных смачиваемых стенок. Для симметричных площадей M , между прочим, совпадает с центром качания.

Давление на вертикальные стенки называют боковым давлением, давление на горизонтальные стенки — донным.

Далее, горизонтальную составляющую давления D называют горизонтальным давлением H , вертикальную составляющую — вертикальным давлением V (черт. 16; эти названия останутся и в случае кривых стенок, п. 10). Центр давления M плоской площади обладает как раз тем свойством, что через него проходят направления, по которым действуют H и V , т. е. разложение D на силы H и V производится как раз в точке M . Иными словами H есть давление на проекцию F'' площади F на вертикальную плоскость, а V есть вес вертикального столба жидкости с объемом \mathfrak{B} , расположенного над площадью F до свободной поверхности жидкости, т. е.

$$V = \gamma \mathfrak{B} \dots \dots \dots (30)$$

На чертеже 17 даны примеры для пояснения этого правила. Направление линии действия V всегда проходит через центр тяжести Σ столба жидкости \mathfrak{B} , расположенного над F до свободной поверхности и к тому же



Черт. 17.

совершенно безразлично, существует ли этот столб жидкости в действительности или нет (черт. 17-е и 17-ф), гидростатический парадокс).

Положение H (черт. 16) определяется центром давления M'' площади F' , при чем M'' есть проекция M на вертикальную плоскость; точкой

же приложения V служит центр тяжести Σ столба жидкости \mathfrak{B} .

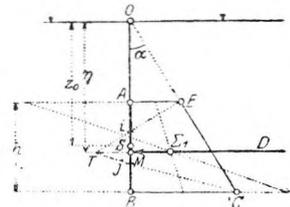
При заданных y_0 и k_x легко найти M графически, что и сделано на черт. 16: восставляют из S перпендикуляр к F , из точки O описывают радиусом k_x дугу, пересекающую SN в точке N , в N восставляют перпендикуляр к ON , который и пересечет смачиваемую стенку в искомом центре давления M . Действительно, из прямоугольного треугольника ONM следует: $ON^2 = OS \cdot OM$ или $k_x^2 = y_0 \cdot OM$, т. е. $OM = \eta$.

Пример 9. Для прямоугольника с основанием b и высотой h , расположенного в вертикальной плоскости (черт. 18), при чем центр тяжести его лежит на глубине z_0 под свободной поверхностью, формулы (27) и (29) дают:

$$D = \gamma z_0 b h; \quad \eta = y_0 + \frac{h^2}{12y_0} \dots \dots \dots (31)$$

(так как $k_0^2 = \frac{h^2}{12}$ и $z_0 = y_0$).

Для прямоугольника центр давления M может быть непосредственно найден следующим образом: отметим на чертеже для каждой глубины z существующее там давление в горизонтальном направлении слева направо от вертикали OB ; получится так называемая трапеция нагрузки $ABCE$, сторона которой EC наклонена к AB под углом α ($\text{tga} = \gamma$). Площадь этой трапеции дает величину равнодействующего давления D на прямоугольник. Положение D определяется центром тяжести Σ_1 трапеции, т. е. равнодействующее давление D проходит через центр тяжести Σ_1 . Для определения этого центра тяжести величина угла α не имеет значения. Очень просто найти Σ_1 следующим построением: делим AB на три равных части и точки i, j соединяем с E и C указанным на черт. 18 способом; точка пересечения T прямых iE и jC будет искомой. Если прямоугольник верхним основанием достигает свободной поверхности жидкости, центр давления лежит на расстоянии $2/3$ высоты h от свободной поверхности.



Черт. 18.

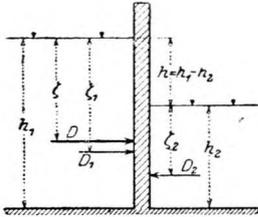
Указанное построение для нахождения центра давления M применимо и для прямоугольников, как угодно наклоненных.

Пример 10. Найти величину давления на стенку, разделяющую жидкость на две части, а также определить координату точки приложения этого давления; размер стенки, перпендикулярный к чертежу, равен l . Имеем (черт. 19):

$$D_1 = \frac{1}{2} \gamma l h_1^2, \quad D_2 = \frac{1}{2} \gamma l h_2^2, \quad D = D_1 - D_2 = \frac{1}{2} \gamma l (h_1^2 - h_2^2).$$

Далее, $\zeta_1 = \frac{2}{3} h_1$, $\zeta_2 = \frac{2}{3} h_2$, и теорема моментов для какой-нибудь точки, лежащей на свободной поверхности более высокой жидкости, дает:

$$D \zeta = D_1 \zeta_1 - D_2 (h + \zeta_2), \quad \text{откуда} \quad \zeta = \frac{2}{3} h_1 - \frac{h_2^2}{3(h_1 + h_2)}.$$



Черт. 19.

Пример 11. Давление на участок стенки, с обеих сторон которой находится жидкость, например, на изображенный на чертеже 20 шит, равно разности давления D_1 и D_2 :

$$D_1 = \gamma F z_0, \quad D_2 = \gamma F (z_0 - h), \\ D = D_1 - D_2 = \gamma F h;$$

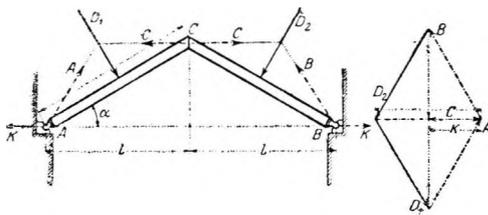
оно зависит, следовательно, только от разности высот свободных поверхностей жидкости по обе стороны стенки. Теорема моментов дает уравнение:

$$D \zeta = D_1 \zeta_1 - D_2 (h + \zeta_2);$$

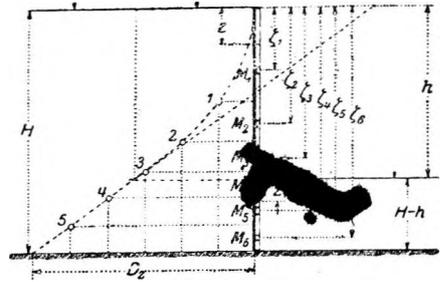
после подстановки в него значений $\zeta_1 = z_0 + \frac{k_0^2}{z_0}$, $\zeta_2 = z_0 - h + \frac{k_0^2}{z_0 - h}$ получим: $\zeta = z_0$.

В случае равенства весов единицы объема обеих жидкостей, разделенных шитом, площадью нагрузки для F будет параллелограмм, и поэтому равнодействующее давление пройдет через центр тяжести S площади F .

Пример 12. Шлюзные ворота. Для определения давления на оси вращения A, B шлюзных ворот (черт. 21) предварительно надо найти равнодействующее давление воды D_1, D_2 на каждое полотнище ворот; они получатся, как разность давлений воды на полотнища с обеих сторон. Эти давления D_1, D_2 образуют нагрузку шлюзных ворот, которые в закрытом положении представляют из себя трехшарнирную арку, давления на шарниры которой A, B, C находятся по правилам строительной механики. Если полотнища ворот симметричны, как на чертеже 21, то давление на шарнир C может иметь только направление \overline{AB} . В таком случае давления на A и B определяется непосредственно при помощи многоугольника сил, изображенного на черт. 21-б. На стенки канала, перпендикулярно к ним, действуют проекции K, K' давлений A и B . Если вращение в A и B происходит на двух цапфах, то составляющие горизонтальных сил, действующих на эти цапфы, получатся после определения глубины точек приложения и D_1 и D_2 , т. е. глубины соответствующих центров давлений.



Черт. 21.



Черт. 22.

Пример 13. Дан шит, разделяющий жидкость на две части. Одна, слева, имеет глубину H , другая, справа, — глубину $H - h$ (черт. 22). Длина шита равна l . Требуется разделить его на n частей так, чтобы каждая n -ая часть его площади выдерживала от жидкости одинаковое давление: тогда в каждой из этих площадей можно поместить горизонтальные скрепляющие балки одинаковых профилей.

На часть плоскости шита, расположенную между верхним и нижним бьефами, действует равнодействующее давление: $D = \gamma F z_0 = \gamma l z \cdot \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \gamma l z^2$ (при условии, что верхнее ребро этой части совпадает со свободной поверхностью жидкости; z — ширина этой полосы). Значит, между верхним и нижним бьефами давление распределяется по закону параболы и кривая давления может быть изображена параболой (черт. 21). Для всей части шита до нижнего правого бьефа равнодействующее давление равно $D_{z=h} = \frac{1}{2} \gamma l h^2 = D_0$.

Ниже нижнего бьефа гидромеханическое давление в каждой точке равно γ^h (см. пример 11),

поэтому равнодействующее давление на площадь произвольной высоты z_1 (считаемую от нижнего бьефа), равно $D_1 = \gamma z_1 \cdot h$.

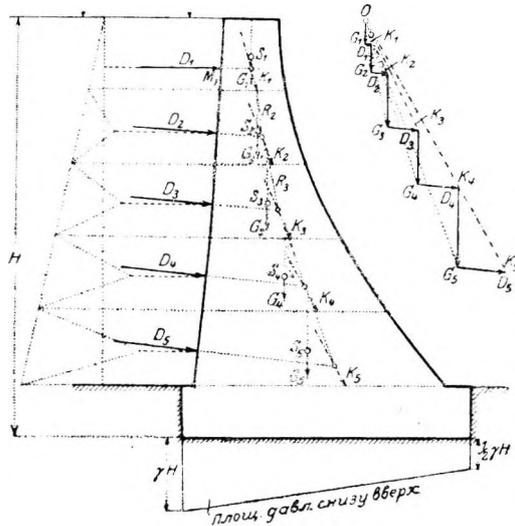
Равнодействующее же давление на участке шита $(h+z_1)l$ равно $D_0 + D_1$. Это давление графически изобразится прямой линией, которая касается ранее полученной параболы в точке $z = h$, так как

$$\left(\frac{dD}{dz} \right)_{z=h} = \gamma h = \frac{dD_1}{dz_1}.$$

Итак, если щит надо разделить на n равнонагруженных участков, поступают следующим образом: равнодействующее давление D_2 , отложенное по дну слева от щита, делят на n равных частей (на черт. 22 $n = 6$) и из точек деления восстанавливают перпендикуляры до пересечения с кривой распределения давления. Разности высот между точками пересечения 1, 2, ... определяют искомые участки; в их центрах давления M_1, M_2, \dots следует помещать горизонтальные балки крепления. Для участков, которые целиком лежат ниже нижнего бьефа центры давления совпадают с центрами тяжести (см. пример 11).

Пример 14. Расчет плотины (подпорной стенки). Указанный в примере 9 способ нахождения центра давления для прямоугольника применяется также при определении нагрузки (внешних сил), действующих на подпорную стенку плотины, что является предварительной работой для определения размеров плотины. Если она со стороны воды искривлена слабо (черт. 23), то всю ее смачиваемую поверхность можно разделить на узкие прямоугольные полосы и давление воды на каждую такую полосу определять способом, указанным в примере 9.

Отдельные центры давления M_1, M_2, \dots легче всего получить выполнением указанного построения по отношению к проекциям отдельных полос на вертикальную плоскость. К давлениям D_1, D_2, \dots на отдельные полосы прибавляются еще собственные веса G_1, G_2, \dots соответствующих частей подпорной стенки. Получаем: $\overline{G_1 + D_1} = \overline{K_1}$, $K_1 + \overline{G_2} = \overline{R_2}$, $R_2 + D_2 = \overline{K_2}$ и т. д., способом, ясным из рассмотрения многоугольника сил на чертеже 22-б. Ломаная линия, составленная из отрезков $\overline{K_1}, \overline{R_2}, \overline{K_2}, \overline{R_3}$ и т. д., дает направление действий только что упомянутых отдельных сумм $\overline{G_1 + D_1}, \overline{K_1 + \overline{G_2}}$ и т. д.; она может быть получена построением многоугольника сил около полюса O .



Черт. 23.

При расчете безопасности и устойчивости плотины надо учитывать еще следующее обстоятельство: вода, просачиваясь через земляное дно у плотины, проникает под горизонтальную подошву подпорной стенки; образуются ключи, оказывающие на стенку давление, направленное снизу вверх. Распределение этого давления вдоль подошвы стенки большей частью представляется прямой линией; следовательно, площадью нагрузки будет трапеция, большая боковая сторона ее (у внутреннего края подошвы) равна приблизительно $p = \gamma H$, меньшая же (у наружного края) — приблизительно $\frac{1}{2} \gamma H$. Вид этой площади нагрузки, в особенности величина давления у внешнего края подошвы, прежде всего зависит от геологических свойств грунта.

Пример 15. У круга с радиусом r_1 центр которого находится на глубине z_0 под свободной поверхностью жидкости, центр давления лежит на вертикальной оси симметрии, так как $k_0^2 = \frac{r^2}{4}$, то

$$\gamma = y_0 + \frac{k_0^2}{y_0} = y_0 + \frac{r^2}{4y_0} \dots \dots \dots (32)$$

Пример 16. Треугольник, а) Для определения центра давления треугольника ABC , расположенного в жидкости произвольным образом, проще всего воспользоваться следующим правилом: если площадь треугольника распределить поровну между тремя точками и поместить эти точки в серединах сторон рассматриваемого треугольника, то у этих трех точек будет с треугольником не только общий центр тяжести, но и равные моменты инерции (геометрические) относительно любой оси плоскости и равные центробежные моменты (геометрические) относительно любой пары ортогональных осей.

Если расстояния середин сторон от свободной поверхности жидкости равны h_1, h_2, h_3 , то

$$z_0 = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}.$$

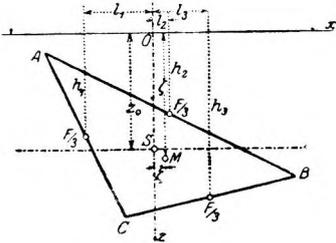
Обозначим расстояния середин сторон от вертикали, проходящей через S , через l_1, l_2, l_3 . Тогда пользуясь приведенным выше правилом и формулами (29), можно сразу же написать выражения для координат ξ и ζ центра давления M :

$$\xi = \frac{h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_3 l_3}{h_1 + h_2 + h_3}, \quad \zeta = \frac{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}{h_1 + h_2 + h_3} \dots \dots \dots (33)$$

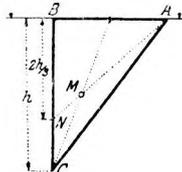
Теория моментов инерции дает способы графического определения ξ и ζ .

б) Если основание данного треугольника лежит на горизонтальной поверхности воды, другая же сторона перпендикулярна к ней (черт. 25), то в этом случае центр давления находится совсем просто. Разобьем треугольник на горизонтальные полосы; геометрическим местом центров давления этих полос будет медиана AB ; разбивая же треугольник на вертикальные полосы, получим в качестве геометрического места центров давления этих полос линию, соединяющую вершину A с точкой N , причем $BN = \frac{2}{3} h$ (см. пример 9). Точка пересечения этих прямых и дает искомый центр давления M .

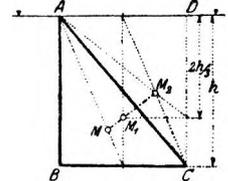
с) Теперь легко найти центр давления треугольника с расположением, указанным на черт. 26. Центр давления прямоугольника $ABCD$ находится в точке M_1 , центр давления верхнего треугольника ABC , как было найдено выше, — в M_2 . Искомый же центр давления M треугольника ABC должен лежать на пересечении прямой $M_1 M_2$ и прямой, соединяющей вершину A с серединой противоположной стороны BC .



Черт. 24.



Черт. 25.



Черт. 26.

Если требуется определить давление на плоскую поверхность более сложной формы поступают следующим образом: разбивают данную поверхность на такие части (узкие прямоугольники, треугольники и т. п.), для которых давление легко определить и по величине и по направлению. Складывая по правилам статики эти составляющие давления, получают равнодействующее давление.

10. Кривые стенки. Как и в случае плоских стенок, под давлением жидкости на кривую стенку понимают сумму давлений жидкости на отдельные элементы рассматриваемой стенки. Для плоских стенок эта сумма приводилась к одной равнодействующей силе; для кривых же стенок в общем случае получается динама, называемая динамой давления. В последнем можно убедиться, хотя бы определяя давление на поверхность, состоящую из двух плоских несимметричных стенок, наклоненных друг к другу. Эта динама получается путем сложения отдельных давлений известным из статики способом приведения их к какой-нибудь точке пространства. В некоторых частных случаях эта динама приводится к одной равнодействующей силе, например, для стенки цилиндра с горизонтальной осью (см. пример 17) или для произвольной части шаровой поверхности.

Для определения давления совершенно безразлично, ограничена ли поверхность, подвергающаяся давлению, какою-нибудь кривою, — таковой поверхностью является, например, часть стенки, или же эта поверхность замкнутая, например, поверхность погруженного в жидкость тела. В первом случае границей поверхности, подвергающейся давлению, может быть, между прочим, замкнутая кривая, лежащая на свободной поверхности жидкости.

Зная величины и направления проекций давлений на отдельные элементы стенки по трем осям прямоугольной системы координат (с вертикальной осью z) и моменты относительно этих осей, легко определить динаму давления. Сумму элементарных давлений в направлениях x и y называют горизонтальными давлениями по этим направлениям, сумму давлений по оси z — вертикальным давлением. В особых случаях, когда

вместо динамы получается одна равнодействующая, конечно, вполне достаточно указания вертикального давления и только одного из горизонтальных.

а) Для определения горизонтального давления в направлении оси x имеем (см. черт. 27):

$$dH = dD \cdot \cos \varphi = \gamma z \cdot dF \cos \varphi = \gamma z dF''$$

(dF — элемент поверхности, dF'' — проекция его на вертикальную плоскость, перпендикулярную к Ox); отсюда:

$$H = \gamma z_0 F'' \dots \dots \dots (34)$$

Расстояние линии действия H от свободной поверхности определяется применением теоремы моментов для какой-нибудь точки, лежащей на свободной поверхности жидкости; в результате получаем:

$$z = \frac{k_x^2}{z_0} = z_0 + \frac{k_0^2}{z_0} \dots \dots \dots (35)$$

где k_x — радиус инерции площади F относительно линии пересечения плоскости F'' со свободной поверхностью.

Значит, горизонтальное давление H на данный участок кривой поверхности в направлении оси x равно боковому давлению на проекцию F'' площади F рассматриваемого участка на перпендикулярную к оси x плоскость.

Для замкнутых поверхностей и поверхностей, ограниченных замкнутыми кривыми, лежащими на свободной поверхности, всегда $H=0$.

б) Для определения вертикального давления имеем:

$$dV = dD \cdot \sin \alpha = \gamma z \cdot dF \sin \alpha = \gamma z dF' = \gamma \cdot \mathfrak{B} d.$$

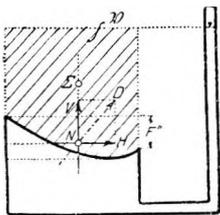
(через $dF' = dF \cdot \sin \alpha$ обозначена горизонтальная проекция элемента dF , а через $d\mathfrak{B} = z \cdot dF'$ — объем вертикального столба жидкости над поверхностью элемента dF до свободной поверхности; истинный объем этого столба, отнюдь не являющегося прямым цилиндром, разнится от $z \cdot dF'$ на бесконечно-малую величину 2-го порядка). Отсюда:

$$V = \gamma \mathfrak{B} \dots \dots \dots (36)$$

где \mathfrak{B} есть объем всего столба жидкости над площадью F до свободной поверхности. Точка приложения V найдется опять применением теоремы моментов для любой точки O :

$$V\xi = \int x dV \text{ или } (\text{так как } V = \gamma \mathfrak{B}, dV = \gamma d\mathfrak{B}) \mathfrak{B}\xi = \int x d\mathfrak{B}.$$

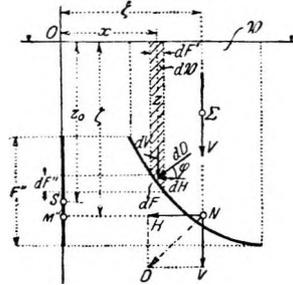
Итак, вертикальное давление V на кривую площадь F равно весу столба жидкости с объемом \mathfrak{B} над этой площадью; точка приложения V находится в центре тяжести Σ объема \mathfrak{B} .



Черт. 28.

Это правило применимо и в том случае, когда столба жидкости \mathfrak{B} в действительности не существует; пример этому дан на чертеже 28. Точка пересечения V и H в случае кривой стенки не лежит на последней.

Применяя полученные выводы к телам или совсем окруженным жидкостью или частично примыкающим к стенке сосуда или же только частично погруженным в жидкость, найдем, что вертикальное давление жидкости на такие тела всегда направлено снизу вверх и равно весу жидкости, объем которой равен объему погруженного тела (или той части его, которая находится под водой).



Черт. 27.

Это и есть известный закон Архимеда; его можно формулировать еще иначе: всякое тело, погруженное в жидкость, подвергается со стороны последней давлению, которое направлено снизу вверх, определяется по величине и направлению весом и центром тяжести вытесненного объема \mathfrak{B} и называется поддерживающей силой. О применении этого закона к плавающим телам см. п. 11.

Пример 17. Часть стенки, подвергающаяся давлению жидкости, имеет вид горизонтального полуцилиндра (с длиной l , радиусом r , черт. 26). Определить действующее на него горизонтальное давление. Имеем: $H = \gamma \cdot 2rl \cdot z_0$; линия действия H лежит на глубине

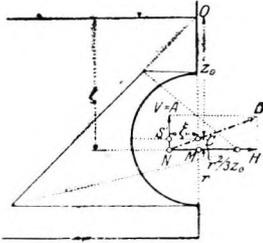
$$\zeta = z_0 + \frac{(2r)^2}{12z_0} = z_0 + \frac{r^2}{3z_0}.$$

Вертикальное давление (поддерживающая сила), проходящее через точку S , равно

$$V = \gamma \frac{r^2 \pi}{2} l, \text{ при чем } \xi = \frac{4r}{3\pi}.$$

Давления на отдельные элементы поверхности полуцилиндра все пересекают ось цилиндра и потому приводятся к одной равнодействующей D , проходящей через точку C . В самом деле, составляя моменты относительно точки C , получаем:

$$H (\zeta - z_0) = V \cdot \xi \text{ или } H \cdot \frac{r^2}{3z_0} = V \cdot \frac{4r}{3\pi}.$$



Черт. 29.

Пример 18. Поплавок, изображенный на черт. 30, служит для автоматического открывания и закрывания клапана или вентиля, как только вода в сосуде достигает определенного уровня. Пусть вес поплавка вместе со стержнем l и донным клапаном равен G , площадь поперечного сечения поплавка, который возьмем цилиндрическим, пусть равна F , площадь же поперечного сечения донного клапана— f . Высота уровня z , после достижения которой клапан открывает отверстие, определится из уравнения:

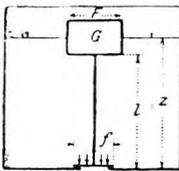
Вес $G + \gamma f z$ донное давление на f — поддерживающей силе или

$$G + \gamma f z = \gamma F(z - l), \text{ и отсюда: } z = \frac{G + \gamma F l}{\gamma(F - f)}.$$

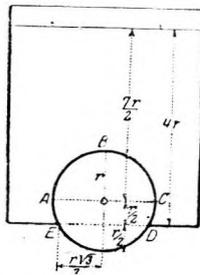
Поддерживающая сила стержня в расчет не принимается в виду своей малой величины по сравнению с такими же для поплавка и клапана. Такие поплавки применяются в карбюраторах бензиновых моторов для закрывания вентиля (путем рычажной передачи) при достижении уровнем бензина определенной высоты.

Пример 19. Шар в отверстии в дне сосуда (черт. 31). Определить силу, необходимую для поднятия этого шара, если его вес равен G .

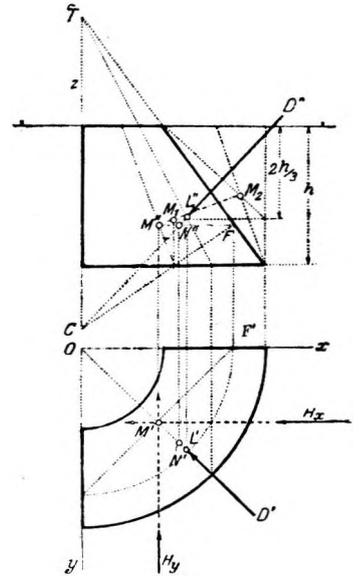
Если погруженное в жидкость тело, как здесь, не все окружено жидкостью или же оно плотно примыкает ко дну сосуда (без всякого промежуточного между ним и дном слоя жидкости), то в таком



Черт. 30.



Черт. 31.



Черт. 32.

случае из ранее полученного значения для поддерживающей силы следует вычесть давление на часть дна, не подвергающуюся давлению.

Составим сумму: $G +$ вертикальное давление на полушар ABC —вертикальное давление на шаровой слой =

$$= G + \gamma \left[r^2 \pi \cdot \frac{7r}{2} - \frac{2}{3} r^3 \pi \right] - \gamma \left[r^2 \pi \cdot \frac{7r}{2} + \frac{11}{24} \pi r^3 - \frac{3r^2}{4} \pi \cdot 4r \right] = \\ = G + \gamma \left[\frac{17}{6} - \frac{23}{24} \right] r^3 \pi = G + \frac{15}{8} \pi \gamma r^3 .$$

Сила такой величины, направленная вертикально вверх необходима для поднятия шара.

Пример 20. Давление на подпорную стенку набережной, имеющую вид четверти усеченного конуса (черт. 32), определяется следующим образом. Горизонтальные давления H_x и H_y на проекции боковой поверхности подпорной стенки на вертикальные плоскости yOz и xOz , очевидно, равны между собою. Эти проекции являются трапециями, центры давления которых легко определить, разбивая каждую трапецию на прямоугольник и треугольник. Центры же давления этих последних находятся способом, указанным в примере 16. Центр давления всей трапеции лежит, во-первых, на прямой, соединяющей эти две точки, и, во-вторых, на прямой, соединяющей середины параллельных сторон трапеции, значит, в точке пересечения этих прямых.

Вертикальное давление V равно весу объема жидкости \mathfrak{B} , находящегося над боковой поверхностью подпорной стенки; направление его определяется центром тяжести Σ этого объема.

Плоскостями, проходящими через образующие конуса и его ось, разобьем наш усеченный конус на тонкие трапеции. Центры давления всех таких трапеций лежат на одинаковой глубине, и давление для каждой такой трапеции перпендикулярно к ее плоскости. Поэтому давления на эти трапеции образуют в пространстве конус с вершиною в C_1 и ортогональный первому. Вертикальные давления на все трапеции тоже равны и образуют четверть цилиндра, горизонтальной проекцией которого будет четверть круга с радиусом OF' . Центр тяжести этого круга N' есть точка приложения равнодействующей вертикальных давлений. Точка пересечения N'' вертикали, проведенной через N' , с горизонталью, проведенной через M'' есть одна из точек D'' проекции D на вертикальную плоскость; соединяя эту точку с C , получим направление D'' .

III. Плавание тел.

11. Равновесие плавающих тел. Глубина погружения. В п. 10 было показано, что всякое погруженное в жидкость тело, благодаря действию на него давления жидкости теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость. Пусть G есть вес тела и \mathfrak{B} —его объем; тогда поддерживающая сила жидкости равна $A = \gamma \mathfrak{B}$, и вес тела в жидкости будет равен

$$G' = G - A = G - \gamma \mathfrak{B} \dots\dots\dots (37)$$

Пример 21. Определение веса единицы объема какого-нибудь тела. Пусть вес единицы объема равен γ_1 ; тогда $G = \gamma_1 \mathfrak{B}$. После погружения этого тела в жидкость с весом единицы объема γ , вес его будет

$$G' = G - \gamma \mathfrak{B} = \gamma_1 G \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1} \right) \text{ откуда } \frac{\gamma_1}{\gamma} = 1 - \frac{G}{G - G'}$$

Измеряя непосредственно взвешиванием G и G' , сумеем при помощи этой формулы определить вес единицы объема тела, правда, при условии, если $\gamma_1 > \gamma$.

При точном взвешивании надо принимать во внимание потерю веса тела в воздухе, величина которой определяется по приведенной же формуле.

Если поддерживающая сила, испытываемая плавающим телом, равна как-раз его весу, то вес этого тела в жидкости равен нулю, и тело плавает в этой жидкости. Если при этом тело не подчинено никаким другим условиям, то такое плавание называют свободным.

Для равновесия плавающего тела необходимо, чтобы

1) собственный вес тела G был равен поддерживающей силе жидкости (равной весу вытесненного телом объема жидкости):

$$G = A = \gamma \mathfrak{B} \dots\dots\dots (38)$$

2) центр тяжести S тела и центр тяжести Σ вытесненного объема лежали на одной вертикали. В большинстве случаев S лежит выше Σ .

Прямую, соединяющую S и Σ , называют осью плавания тела; для каждого тела в общем случае таких осей будет много. Для однородного симметричного тела каждая ось симметрии является и осью плавания. Расстояние самой нижней точки плавающего тела от свободной поверхности называется глубиной погружения или осадкой T . Плоскость, по которой свободная поверхность жидкости пересекает плавающее тело, называется плоскостью плавания, ее площадь — площадью плавания. В зависимости от формы плавающего тела над плоскостью плавания возможно дальнейшее увеличение вытесненного объема, называемое плавучестью в рассматриваемом положении плавания.

Пример 22. Докажем, что каждому положению плавания однородного тела с весом единицы объема γ_1 , соответствует положение плавания того же тела в перевернутом положении с теми же осью и плоскостью плавания, но с весом единицы объема $\gamma - \gamma_1$.

Пусть S есть центр тяжести плавающего тела (черт. 33), Σ, Σ' центры тяжести вытесненного объема и части тела, находящейся над плоскостью плавания, \mathfrak{B} и \mathfrak{B}_1 — их объемы. Тогда для равновесия необходимо, чтобы $G=A$, т.-е. $(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}') = W\gamma$; отсюда непосредственно следует:

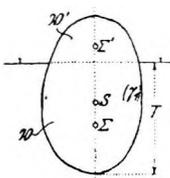
$$\mathfrak{B}'\gamma_1 = \mathfrak{B}(\gamma - \gamma_1) \text{ или } \mathfrak{B}'\gamma = (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}')(\gamma - \gamma_1).$$

Значит, совершенно безразлично, рассматривать ли плавание тела с объемом $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'$, вытесняющего объем \mathfrak{B} и с весом единицы объема γ или же плавание того же тела, только перевернутого и поэтому вытесняющего объем \mathfrak{B}' , но зато с весом единицы объема $\gamma - \gamma_1$.

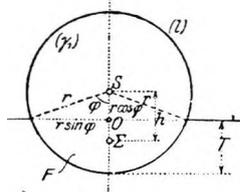
Пример 23. Однородный цилиндрический вал с радиусом основания r , длиной l и весом единицы объема γ . Условие $G = A$ дает: $r^2\pi l\gamma_1 = \frac{1}{2}r^2(2\varphi - \sin 2\varphi)l\gamma$. Положение плоскости плавания определится углом φ , а последний — уравнением

$$2\varphi - \sin 2\varphi = 2\pi \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

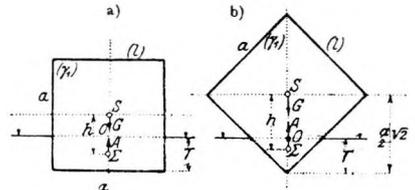
Глубина погружения $T = r(1 - \cos \varphi)$.



Черт. 33.



Черт. 34.



Черт. 35.

Пример 24. Для однородной прямоугольной призмы с квадратным основанием (сторона основания = a , длина ребра = l) при горизонтальном положении ее ребра можно сразу указать два симметричных положения плавания. Для первого (черт. 35-а) глубина погружения T определится из условия $G = A$:

$$a^2l\gamma_1 = aTl\gamma, \text{ т.-е. } T = a \frac{\gamma_1}{\gamma} \text{ (для } \gamma_1 < \gamma, T < a).$$

Для второго (черт. 35-б) —

$$a^2l\gamma_1 = T^2l\gamma, \text{ т.-е. } T = a \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}.$$

Во втором случае для $\frac{\gamma_1}{\gamma} < \frac{1}{2}$, $T < \frac{a}{2} \sqrt{2}$, т. е. S лежит над свободной поверхностью жидкости, а для $\frac{1}{2} < \frac{\gamma_1}{\gamma} < 2$, $\frac{a}{2} \sqrt{2} < T < a \sqrt{2}$, т. е. S лежит ниже свободной поверхности жидкости.

Для каких значений веса единицы объема γ_1 существует, кроме только что указанных симметричных положений, еще другие, несимметричные положения плавания?

Пример 25. Несвободное плавание. Если плавающее в воде тело имеет точки опоры, то, согласно правилам статики, к собственному весу тела и поддерживающей силе жидкости надо присоединить еще реакции опор. Составив для этой группы сил уравнения равновесия, найдем реакции опор и положение плавания.

Положение равновесия тонкого бруска с длиной $AB = 2l$, сечением f и весом единицы объема γ_1 , укрепленного на шарнире в точке A (черт. 36), определится из уравнения для моментов относительно точки A :

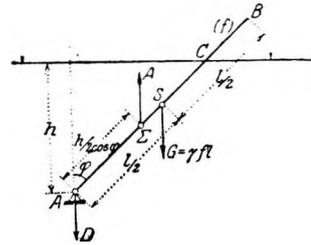
$$\gamma_1 f l \cdot \frac{1}{2} l \sin \varphi = \gamma f \cdot \frac{h}{\cos \varphi} \cdot \frac{h}{2 \cos \varphi} \cdot \sin \varphi$$

(так как $\overline{AC} = 2 \overline{AS} = \frac{h}{\cos \varphi}$).

Сразу видны два решения: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$; кроме них имеется еще третье:

$$\cos \varphi = \frac{h}{l} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

при условии, что $\frac{h}{l} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}} < 1$. Проектируя силы на вертикальную ось, получим уравнение для определения давления D на шарнир A .



Черт. 36.

12 Статическая устойчивость свободно-плавающих тел. Для практических целей необходимо, чтобы положение плавания свободно-плавающего в воде тела, например, корабля, было положением устойчивого равновесия. Это значит: если каким-нибудь путем вывести тело из такого положения, то силы, возникающие от приведения тела в новое положение, должны стремиться привести его опять в первоначальное положение. Силы эти должны возникать вследствие самой природы состояния равновесия, а отнюдь не благодаря каким-нибудь приспособлениям. Итак, нарушение состояния равновесия не должно иметь последствием полного опрокидывания тела, так как если бы такое произошло, оно привело бы тело в другое положение устойчивого же равновесия. Если при движении плавающего тела принимают в расчет только упомянутые силы, а отнюдь не силы инерции, возникающие от движения, то в таком случае говорят о статической устойчивости плавающего тела. Чтобы устойчивость плавающего тела была именно такой, необходимо выполнение некоторых определенных условий, к выводу которых обратимся. Будем только предполагать, что тело вблизи плоскости плавания не имеет никаких остроконечных выступов или внезапных изменений поперечного сечения, как, например, у поплавков гидроаэропланов (такая конструкция вызывается особым условием взлета и посадки).

Говоря о каких-нибудь нарушениях состояния равновесия, мы под этим не совсем определенным понятием будем понимать только такие нарушения, которые сводятся лишь к незначительному изменению положения плавания, при котором силы и точки их приложения, выражаясь математически, подвергаются лишь бесконечно малым перемещениям.

Итак, для выяснения свойств состояния равновесия плавающего тела надо рассмотреть, что будет с приложенными к телу силами при бесконечно малом смещении этого тела из состояния равновесия. В кинематике доказывается, что всякое бесконечно малое передвижение твердого тела может быть составлено из 3 параллельных перемещений и 3 вращений относительно трех взаимно перпендикулярных осей. При параллельном перемещении в направлении вертикали (перпендикулярно к свободной поверхности жидкости) свободно-плавающее тело проявляет признаки устойчивого равновесия; так и должно быть, так как при увеличении погружения увеличивается вытесненный объем, а вместе с ним — и поддерживающая сила, вес же тела остается прежним. При продольном же и поперечном перемещениях в плоскости плавания плавающее тело проявляет признаки безразличного равновесия.

Таким образом, при рассмотрении устойчивости плавающего тела достаточно ограничиться определением сил, возникающих при вращении тела вокруг двух осей, лежащих в плоскости плавания. Если при вращении тела около оси, перпендикулярной к плоскости чертежа 37, ни

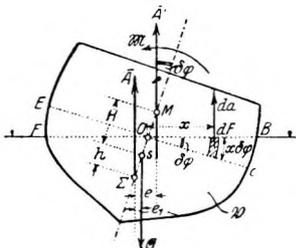
в каком направлении не возникает отдельной силы (которая, раз возникнув, обязательно вызвала бы перемещение тела), то в таком случае поддерживающая сила должна быть одинаковой как в первоначальном так и в повернутом положении. Следовательно, при вращении тела на угол $\delta\varphi$ против часовой стрелки поддерживающая сила справа (r) увеличится на столько же, на сколько она уменьшится слева (l). Так как при погружении элемента тела $x \cdot dF \cdot d\varphi$ возникает поддерживающая сила $da = \gamma x dF \cdot d\varphi$, то должно иметь место следующее равенство:

$$\int da = \gamma d\varphi \int_{(r)} x dF - \gamma d\varphi \int_{(l)} x dF = 0, \text{ т.-е. } \int_{(r)} x dF = 0;$$

значит, ось вращения должна проходить через центр тяжести площади плавания. Это вращение, следовательно, не изменяет величины поддерживающей силы, но линия ее действия уже будет другой, в чем мы сейчас убедимся.

Точка S остается точкой приложения силы тяжести и в повернутом положении; но вследствие погружения клинообразной части тела OBC и поднятия из воды такой же клинообразной части CEF возникает пара сил, которая прибавляется к поддерживающей силе \bar{A} , приложенной в Σ . Эта пара сил относительно каждой пространственной оси, следовательно, и относительно оси, проходящей через O , дает момент вращения, всегда противоположный моменту (G, A) . Отсюда заключаем, что рассматриваемое положение плавания будет устойчивым тогда, когда момент вращения \mathfrak{M} , возникающий от наклона плавающего тела, будет больше момента вращения (G, A) и поэтому будет стремиться привести тело в первоначальное положение; в противном случае положение плавания будет неустойчивым.

При погружении правой клинообразной части OBC возникает положительный момент вращения



Черт. 37.

$$\mathfrak{M}_{(r)} = \int_{(r)} x da = \gamma \cdot \delta\varphi \cdot \int_{(r)} x^2 dF,$$

а при подъеме левой части OEF —положительный же момент

$$\mathfrak{M}_{(l)} = \int_{(l)} x da = \gamma \cdot \delta\varphi \cdot \int_{(l)} x^2 dF;$$

их сумма

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{(r)} + \mathfrak{M}_{(l)} = \gamma \cdot \delta\varphi \cdot \int_F x^2 dF = \gamma \cdot \delta\varphi \cdot I_0'$$

дает величину момента, возвращающего тело в первоначальное положение плавания. В этом выражении через I_0' обозначен геометрический момент инерции площади плавания относительно оси, проходящей через O .

Далее, пусть $S\Sigma = h$, $e_1 = h \sin(\delta\varphi) \sim h \delta\varphi$; тогда вышеприведенное условие устойчивости при вращении около оси, проходящей через O , представится так:

$$\mathfrak{B} > Ae, \text{ т.-е. } \gamma \cdot \delta\varphi \cdot I_0' > \gamma \mathfrak{B} \cdot h \cdot \delta\varphi, \text{ или}$$

$$h < \frac{I_0'}{\mathfrak{B}} \dots \dots \dots (39)$$

Величины $h, I_0' \mathfrak{B}$ определяются размерами и формой погруженного в жидкость тела. Если вместо знака $<$ окажется знак $>$, положение равновесия будет неустойчивым, в случае же знака равенства — безразличным.

Прибавление \mathfrak{M} к A вызывает в качестве следствия параллельное перенесение A в A' на расстояние e , определяемое, как известно из статики, формулой:

$$e = \frac{M}{A} = \frac{I_0 \cdot \delta\varphi}{\mathfrak{B}} \dots \dots \dots (40)$$

Точку пересечения M оси плавания с A' называют метацентром плавающего тела для соответствующего вращения и $SM = H$ — метацентрической высотой. Пользуясь уравнением (40), найдем, что

$$H = \frac{e}{\sin(\delta\varphi)} - h = \frac{I_0'}{\mathfrak{B}} - h.$$

Теперь условие устойчивости (39) можно заменить несколько иным вполне эквивалентным прежнему, но более наглядным:

$$H = SM = I_0' - h > 0, \dots \dots \dots (41)$$

т. е., чтобы положение плавания было устойчивым относительно вращения около оси, проходящей через O , необходимо и достаточно, чтобы при рассматриваемом вращении метацентр лежал выше центра тяжести.

Итак, устойчивость оказывается зависящей от величины момента инерции площади плавания относительно оси, вокруг которой происходит вращение. Положение плавания будет наверно устойчивым для вращений вокруг всех осей, проходящих через O , если условие (40) соблюдается для наименьшего возможного значения I_0' . Из теории моментов инерции известно, что такой наименьший момент инерции всегда существует. Таким образом имеем:

Для статической устойчивости определенного положения плавания необходимо выполнение условия (41) для оси вращения, проходящей через O , относительно которой площадь плавания имеет наименьший момент инерции.

Момент вращения (A', G), величиною в

$$\mathfrak{M} = \gamma \cdot \mathfrak{R} \cdot H \sin \delta\varphi = \gamma \{I_0' - h \mathfrak{R}\} \cdot \delta\varphi, \dots \dots \dots (42)$$

возвращающий тела в первоначальное положение плавания, называют моментом устойчивости. Согласно формуле (41) для устойчивого положения плавания необходимо, чтобы

$$\mathfrak{R} > 0 \dots \dots \dots (43)$$

Для трансатлантических пароходов $H = 0,3$ м, для военных судов $H = 1$ м и более.

Пример 26. Прямоугольная призма с квадратным основанием (площадь основания = a^2 , длина ребра = l).

а) Для положения, указанного на черт. 38, глубина погружения T определится из условия $G = A$:

$$\gamma_1 a^2 l = \gamma a^2 T, \text{ откуда } T = l \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Величины, входящие в условие (39), для данного случая равны:

$$h = \frac{l}{2} - \frac{T}{2} = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right), \quad \mathfrak{B} = a^2 T = a^2 l \frac{\gamma_1}{\gamma};$$

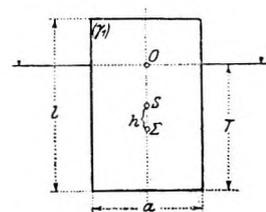
моменты инерции площади плавания (квадрата), проходящей через точку O , одинаковы относительно всех осей и равны $I_0' = \frac{a^4}{12}$. Условие устойчивости (39) дает: $\frac{l}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) < \frac{a^4}{12 a^2 l \frac{\gamma_1}{\gamma}}$,

$$\text{откуда } \frac{a}{l} > \sqrt{6 \frac{\gamma_1}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)}.$$

б) Для положения, указанного на черт. 35-а, если $a < l$

$$T = a \frac{\gamma_1}{\gamma}, \quad h = \frac{a}{2} - \frac{T}{2} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right), \quad \mathfrak{B} = a T l, \quad J_0' = \frac{a^3 l}{12}$$

(см. пример 24).



Черт. 38.

Условие (39) дает: $\frac{\gamma_1}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) < \frac{1}{6}$ или $\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 - \frac{\gamma_1}{\gamma} + \frac{1}{6} > 0$,

а отсюда, так как для $T < a$ отношение $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ должно быть меньше 1, следует:

$$1 > \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0,366\dots,$$

при чем надо отметить, что при этих условиях в устойчивом равновесии будут находиться призмы всех размеров, лишь бы только было $a < l$.

с) В положении, указанном на чертеже 35-b Σ отстоит от свободной поверхности на расстоянии $\frac{T}{3}$; поэтому

$$T = a \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}; h = a \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2T}{3} \quad a = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \right],$$

$$\mathfrak{B} = T^2 l = a^2 l \frac{\gamma_1}{\gamma}; I_0' = \frac{1}{12} (2T)^3 l = \frac{2a^3 l}{3} \left(\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \right)^3,$$

при чем предполагается, что $2T < l$. Условие (39) дает:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \right] < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \quad \text{и отсюда: } \frac{\gamma_1}{\gamma} < \frac{9}{32}$$

Если свободная поверхность лежит ниже S , то $T < \frac{a\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\frac{\gamma_1}{\gamma} < \frac{1}{2}$;

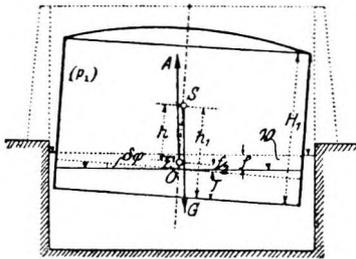
так как для устойчивости необходимо, чтобы $\frac{\gamma_1}{\gamma} > \frac{9}{32}$, то отсюда следует, что равновесие призмы в положении, указанном на черт. 35-b, будет устойчивым только при соблюдении неравенств: $\frac{9}{32} < \frac{\gamma_1}{\gamma} < \frac{1}{2}$.

Как будет обстоять дело с равновесием, если свободная поверхность лежит выше S или же если тело находится в не симметричном положении плавания?

Пример 27. Для цилиндрического вала, изображенного на чертеже 34, со смачиваемой поверхностью F и $r \sin \varphi < l$, получаем:

$$h = \frac{(2r \sin \varphi)^3}{12F} \quad \mathfrak{B} = Fl, \quad I_0' = \frac{1}{12} (2r \sin \varphi)^3 l, \quad \text{т.-е. } h = \frac{I_0'}{\mathfrak{B}}$$

вал находится в состоянии безразличного равновесия, что можно было предвидеть заранее, так как при любом вращении положение сил (G , A) относительно друг друга не меняется.



Черт. 39.

Пример 28. Газовый колокол. Условие для правильного (безопасного) плавания газового колокола (газальтера) получится при помощи той же формулы (39). Предположим, что колокол перед погружением был наполнен до краев газом под давлением, равным атмосферному, и затем был опущен в воду с открытым дном (черт. 39). Объем колокола v_0 можно считать равным $\pi R^2 H_1$, если пренебречь ошибкой, вызываемой принятием сферического потолка колокола за плоский. Нижний край колокола вследствие собственного веса колокола G опустится до глубины $T + f$; при этом объем газа уменьшится до v_1 , а давление увеличится до p_1 и вода в колоколе подыметса до высоты T ; является мерой разности давлений внутри и снаружи. Итак, имеем

$(p_1 - p_0) F = G$, $f = \frac{p_1 - p_0}{\gamma} = \frac{G}{F\gamma}$, где $F = \pi R^2$ есть площадь поперечного сечения колокола. Увеличение давления с p_0 до p_1 можно считать совершающимся по закону Бойля-Мариотта: $p_0 v_0 = p_1 v_1$ и, так как $v_0 = F H_1$, $v_1 = F(H_1 - T)$, получим после подстановки: $T = H_1 - \frac{v_1}{F} = H_1 - \frac{p_0}{p_1} \frac{v_0}{F} = \frac{p_1 - p_0}{p_1} H = \frac{G}{G + F p_0} H_1$. Если опять потолок колокола приближенно принять за плоский, то высота центра тяжести колокола над его нижним краем, при условии одинаковой толщины его стенок, будет равна

$$h_1 = \frac{2R\pi H_1 \cdot \frac{H_1}{2} + R^2\pi H_1}{2R\pi H_1 + R^2\pi} = \frac{H_1(H_1 + R)}{2H_1 + R}.$$

За вытесненный объем здесь следует считать объем \mathfrak{B} , находящийся внутри колокола между наружным и внутренним уровнями свободной поверхности жидкости. Центр тяжести Σ этого объема будет точкой приложения поддерживающей силы. Отсюда следует:

$$h = \Sigma S = h_1 - T - \frac{f}{2} = \frac{H_1(H_1 + R)}{2H_1 + R} - \frac{G}{G + Fp_0} H_1 - \frac{G}{2F\gamma},$$

и условием безопасного (устойчивого) плавания газового колокола будет, согласно формуле (39), соблюдение неравенства: $h < \frac{I'_0}{\mathfrak{B}}$, где $I'_0 = R^2 \frac{\pi}{4}$ есть геометрический момент инерции площади плавания относительно оси, проходящей через O и лежащей в плоскости плавания.

Г И Д Р А В Л И К А .

Предметом гидравлики является исследование движений жидкости в искусственных сооружениях и машинах, а также по естественным руслам и, в частности, определение в каждом особом случае распределения скоростей и давления и необходимого расхода энергии. Рассматривая сначала жидкость только в одном измерении и предполагая ее идеальной, мы упростим наши исследования и сумеем изучить следующие явления: истечение из отверстий, давление струи жидкости на покоящиеся стенки, смешение (удар) жидкостей. Введя в рассмотрение вязкость жидкости, нам придется различать ламинарные и турбулентные потоки. Вязкость жидкости необходимо принимать во внимание при выводе закона Poiseuille'я при изучении течения жидкости в трубах, каналах, реках и через плотины, в теории сопротивления жидкостей и в ее приложениях к теории несущих поверхностей и воздушных гребных винтов (пропеллеров).

1. Одномерное движение.

13. Проблемы гидравлики. Необходимость вывести законы для явлений движения жидкости, встречающихся в технике и большей частью весьма сложных, и так, чтобы эти законы были достаточно простыми и применимыми для практических целей и в то же время соответствовали наблюдаемым явлениям, — эта необходимость привела к особому способу изучения относящихся сюда проблем. Ближайший путь — изучение движений жидкости, рассматривая ее как массу, непрерывно распространенную в пространстве трех измерений, при чем каждая частица жидкости находится под влиянием ее окружающих, а все вообще частицы при движении подвергаются определенным смещениям относительно друг друга, — привел к результатам, применимым на практике в вышеуказанном смысле, только в единичных случаях. Выяснилось вообще, что помимо принципиальных затруднений, о которых речь будет еще впереди, этот путь слишком тяжел и к тому же отнимает много времени, чтобы дать практически применимые решения возникающих при этом в большом числе вопросов. Это обстоятельство привело к тому, что после того, как в середине XVIII столетия явления окружающей нас природы начали объяснять и выводить из некоторого числа основных элементарных законов, началось отчуждение „теоретической гидродинамики“ от „технической гидравлики“. Дело в том, что точные законы и выводы, которыми пользовалась теоретическая гидродинамика, на практике часто приводили к противоречиям, а многие важные вопросы оставляли и вовсе без ответа. И только в последнее время является надежда на достижение успеха в стремлении опять сблизить обе эти ветви знания и объединить их в одну общую, отвечающую действительности, науку. Связующим звеном оказалось развитие техники воздухоплавания, проблемы которой в настоящее время являются одними из наиболее важных в нашей области.

Конечно, сейчас мы еще далеки от достижения этой цели; временно мы находимся в переходном периоде, и это должно отразиться на способе изложения нашего предмета. Некоторые проблемы гидравлики уже сейчас разрешены так, что дают возможность видеть органическое строение гидравлики, в то время как для решения других проблем мы можем ссылаться

только на „общие представления“ и опытные данные, полученные в современный нам период, период преобладания опытных исследований. Целью вступительного изложения гидравлики в ее современном состоянии может быть только изложение ее основных законов и всевозможных выводов из них и продолжения этих выводов на основе особых и каждый раз точно сформулированных предположений. Таким путем мы сумеем прийти к удовлетворительному решению подлежащих таковому проблем.

Предположения, о которых мы только что упомянули, конечно, должны находиться в полном соответствии с опытными данными о жидкости вообще и, в частности, с опытным путем выясненными свойствами (природой) жидкости. Отсюда, понятно, что техническая гидравлика в ее теперешнем состоянии не является вполне законченным научным зданием. Наоборот, все ее части требуют дальнейшего развития, что ясно будет при изучении и что будет подчеркиваться в соответствующих местах нашего изложения.

14. Элементарная жидкая струйка (трубка тока). Для вывода законов, которым подчинялись бы рассматриваемые в гидравлике движения жидкости, необходимо создать образы или понятия, которые идеализировали бы действительность и к которым можно было бы применить законы механики. Эти искусственные образы должны обладать теми же существенными признаками, которыми характеризуется и изучаемая действительная картина. Признаки эти могут быть частью геометрического характера, как, например, длины, поперечные сечения, разности высот, частью механического, — как, например, скорости, ускорения, давления, силы и т. д. Заметим кстати, что каждый искусственный, создаваемый для теоретических исследований образ отличается, конечно, от образа, существующего на самом деле; например в механике твердого тела „твердое тело“ есть только предельный случай „прочных“ тел; в теории упругости совершенно упругое тело есть более или менее приближенный образ действительного тела, правда, образ во многих отношениях весьма удобный и позволяющий решать многие задачи.

В гидравлике для изучения простейших явлений движения жидкости вводят образ элементарной жидкой струйки, называемой еще иначе трубкой тока. Говорят об идеальной жидкой струйке, если хотят подчеркнуть, что при выводе законов для жидкой струйки не принимаются во внимание всякого рода трения или сопротивления или, иными словами, не принимаются во внимание потери энергии. В дальнейшем мы увидим, что путем постепенного расширения понятия жидкой струйки можно будет изучать более сложные, а также „действительные“ течения жидкостей с достаточной для практических целей точностью, например, движения жидкостей в трубах, каналах, реках и т. п.

Большая часть этих движений жидкости, когда отдельные частицы ее двигаются как попало и меняют свое состояние с изменением места и времени, на первый взгляд дает исследователю картину полной неразрешимости. Только при медленном неизменяющемся со временем движении между гладкими стенками с постепенным изменением поперечного сечения (в частности, с постоянным поперечным сечением) можно получить упорядоченное движение, при котором отдельные частицы жидкости движутся вперед по направленным и примыкающим друг к другу траекториям. Траекторию жидкой частицы, касательные к которой при этих простых условиях дают направления скоростей во всех ее точках, называют линией тока. Совокупность линий тока, проходящих через какую-нибудь бесконечно малую площадку, называют трубкой тока или элементарной жидкой струйкой. В содержание этого термина часто включается и объем жидкости, содержащейся в струйке.

Займемся сейчас выводом законов движения такой жидкой струйки, предполагая, что боковая поверхность ее состоит из какого-нибудь твердого тела.

15. Уравнение неразрывности. Будем предполагать, что жидкость движется в трубке тока, заполняя ее так, что ни в каком месте трубки не имеется пустот (увеличения плотности не может быть вследствие предположенной несжимаемости идеальной жидкости; оно может быть только в случае газов). Если в каком-нибудь месте поперечное сечение трубки равно F , а V есть средняя скорость жидкости в этом сечении, то произведение

$$Q = FV \dots \dots \dots (44)$$

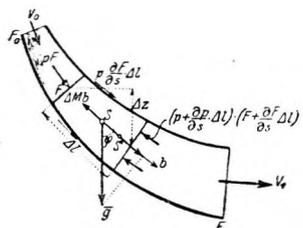
дает количество протекающей жидкости или ее расход в 1 секунду. Предположение о заполнении текущей жидкостью всей трубки называют условием неразрывности или сплошности; его можно высказать так: Q одинаково для всех поперечных сечений трубки. Если различные поперечные сечения и им соответствующие средние скорости отмечать индексами $0, 1, \dots, n$, то условие неразрывности представится так:

$$Q = FV = F_0V_0 = F_1V_1 = \dots \text{const.} \dots \dots \dots (45)$$

Это уравнение называют уравнением неразрывности (или сплошности) струйки. Размерность $Q — \frac{[L]^3}{[T]}$, единица — $1 \text{ м}^3/\text{сек}$.

16. Уравнение движения идеальной жидкой струйки. Каждая частица такой жидкой струйки находится, с одной стороны, под влиянием активных сил, распределенных по объему, в качестве которых приходится рассматривать почти исключительно силу тяжести (т. е. собственный вес жидких частиц), а, с другой стороны, каждая частица находится под действием окружающих частиц, с которыми она соприкасается, при чем это действие выражается в давлении, которому подвергается вся поверхность рассматриваемой частицы.

Для вывода уравнений движения воспользуемся, конечно, принципом Даламбера, который будучи применен для направления движения, даст выражение для ускорений и, следовательно, — уравнение движения; если же его применить для направления, перпендикулярного направлению движения, получится выражение для давления, производимого трубкой тока, рассматриваемой как проводящий сосуд, на протекающую жидкость. Пока будем считать движение жидкости установившимся; это значит, что скорости вдоль всей трубки тока меняются только с изменением места, иными словами скорости в каждой точке не зависят от времени.



Черт. 40.

Предположим, что некоторая частица жидкости, ускорение которой мы желаем определить, занимает всю ширину трубки тока, как это изображено на чертеже 40. Длина частицы пусть равна Δl , поперечное сечение трубки в рассматриваемом месте — F , следовательно, масса частицы $\Delta M = \rho \cdot \Delta F \cdot \Delta l$.

При переменном сечении F есть функция длины дуги, например, средней линии тока, т. е. $F = F(s)$; также и давление p будет функцией одного только s и в каждом сечении будет полагаться постоянным.

Из активных ускорений, согласно вышесказанному, имеется только ускорение силы тяжести g , и если положительную ось z направить вверх, то в направлении движения будет действовать сила $\Delta M \cdot g \cdot \cos\varphi$, где $\cos\varphi = -\frac{dz}{ds}$. На поверхность же частицы будут действовать силы давления:

- 1) pF — на переднюю концевую поверхность в направлении движения струйки,

2) $p \frac{dF}{ds} \Delta l$ — на боковую поверхность в направлении движения струйки ¹⁾,

3) $\left(p + \frac{dp}{ds} \Delta l \right) \left(F + \frac{dF}{ds} \Delta l \right)$ — на другую концевую поверхность против направления движения струйки.

Так как сила трения исключается, то в тангенциальном направлении не может быть никаких сил сопротивления. Сила инерции равна $\Delta M \cdot b$, и уравнением движения будет:

$$\Delta M \cdot b = pF + p \frac{dF}{ds} \Delta l - \left(p + \frac{dp}{ds} \Delta l \right) \left(F + \frac{dF}{ds} \Delta l \right) - \Delta M g \frac{dz}{ds}.$$

При установившемся движении скорость можно рассматривать как функцию одного только пути s ; поэтому:

$$b = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{ds}.$$

Подставив это значение b , а также ранее полученное выражение для ΔM в вышенписанное уравнение, отбросив члены второго порядка и сделав несколько простых преобразований и сокращений, получим уравнение движения для идеальной жидкой струйки в так называемой форме Лагранжа-Эйлера:

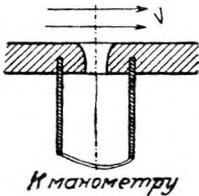
$$b = \frac{dV}{dt} = V \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{ds} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - g \frac{dz}{ds} \dots \dots \dots (46)$$

Оно показывает, что тангенциальное ускорение движущейся частицы равно отрицательному приращению давления вдоль длины дуги, деленному на ρ и сложенному с компонентом ускорения силы тяжести в направлении касательной.

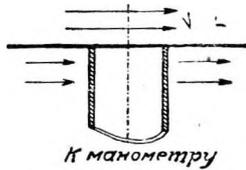
17. Уравнение Д. Бернулли (уравнение давления). Уравнение (46) легко интегрируется для случая идеальной жидкости, т. е. при $\rho = \text{const}$. Интегрируя и деля на $g = \frac{\gamma}{\rho}$, получаем уравнение:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \text{const}, \dots \dots \dots (47)$$

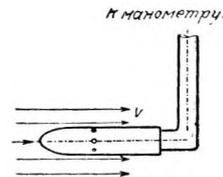
называемое уравнением Д. Бернулли (иногда также уравнением давления или энергии) и которое служит отправной точкой почти для



Черт. 41.



Черт. 42.



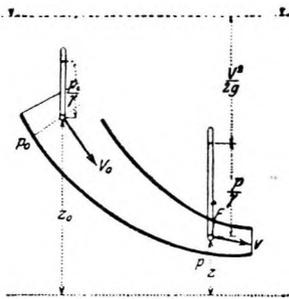
Черт. 43.

всех гидравлических расчетов. Смысл его следующий: для всех точек идеальной жидкой струйки сумма высот — скоростной, пьезометрической и абсолютной (отмериваемых от какой-нибудь горизонтальной плоскости) есть величина постоянная. В уравнении (47) эти высоты для начального горизонта обозначены с индексами 0.

¹⁾ На боковую поверхность сила действует только в том случае, если трубка тока имеет переменное поперечное сечение. Увеличение площади сечения при его передвижении на длину Δl равно $\frac{dF}{ds} \Delta l$, и давление на боковую поверхность может быть принято равным среднему арифметическому давлений на обеих концевых поверхностях, именно, равным p , если пренебречь в выражении для сил членами второго порядка.

Давление p , входящее в это уравнение, в гидравлике часто называют гидростатическим, величину же $p + \frac{\gamma V^2}{2g}$ — гидравлическим давлением.

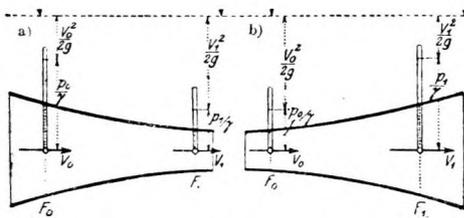
Замечания относительно измерения давления p . Давление в какой-нибудь точке жидкости измеряется высотой столба жидкости в закрытой манометрической трубке (пьезометре), приделанной к стенке сосуда, в котором протекает жидкость: при этом отверстие в стенке должно быть просверлено весьма тщательно, чтобы не было никаких неровностей, и края должны быть закруглены, как указано на чертеже 41. Можно измерить давление и в любой точке внутри потока: для этого туда вводится проколотый в середине диск (черт. 42), к которому припаяна тонкая выводная трубка, соединенная с манометром. При наклонной установке диска к направлению потока получаются ошибки. Поэтому предпочтительнее вместо диска употреблять какое-нибудь полое внутри тело, имеющее очертания линии тока (черт. 43) и просверленное в нескольких местах. Внутренняя полость этой насадки соединяется опять-таки при помощи металлической или резиновой трубки с манометром. Если второе колено манометра открыто, то он показывает разность давлений воздушного и имеющего место в жидкости; если же второе колено закрыто и из него выкачан воздух, манометр показывает абсолютное давление.



Черт. 44.

Уравнению (47) может быть дано следующее наглядное пояснение. Если в каждой точке идеальной жидкой струйки к координате z прибавить пьезометрическую высоту $\frac{p}{\gamma}$, измеренную вставленным сбоку манометром, и скоростную высоту $\frac{V^2}{2g}$, то таким путем построенная плоскость окажется горизонтальной. Причиной этому является то, что мы совершенно не принимаем во внимание никаких потерь энергии, а величины $\frac{V^2}{2g}$, $\frac{p}{\gamma}$ и z следует рассматривать, как составные части энергии жидкости, сумма которых остается постоянной при преобразовании энергии без потерь.

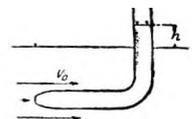
Пример 29. Водомер Вентури дает возможность измерять количество протекающей в водопроводе воды при помощи показаний p_0 и p_1 двух манометров, вставленных в водопровод в том месте, где труба сужается от сечения F_0 до сечения F_1 (черт. 45-а). Если точки „0“ и „1“ лежат на одной высоте, т. е. $z_0 = z_1$ то тогда уравнения Д. Бернулли и неразрывности струи соответственно дают:



Черт. 45.

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} = \frac{p_0 - p_1}{\gamma},$$

$$F_0 V_0 = F_1 V_1, V_1 = \frac{V_0 F_0}{F_1}.$$



Черт. 46.

Подставляя значение V_1 в уравнение Бернулли, получаем: $F_0^2 V_0^2 \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} \right) = 2g \frac{p_0 - p_1}{\gamma}$, откуда определяем количество протекающей жидкости:

$$Q = F_0 V_0 = \sqrt{\frac{2g (p_0 - p_1)}{\gamma \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} \right)}} \dots \dots \dots (48)$$

Теоретически можно было бы вместо сужения трубы использовать расширение (черт. 45-б), где скоростная энергия превращается в энергию давления, но ближайшее исследование пока-

зывает, что в этом случае происходит следующее явление: поток отстает от стенок, вследствие чего жидкость уже не заполняет пространства трубы целиком, и скоростная энергия не преобразуется поэтому в энергию давления без потерь. Такого рода явления наступают вообще всегда, когда происходит замедление течения жидкости у стенок сосуда или тел, погруженных в жидкость.

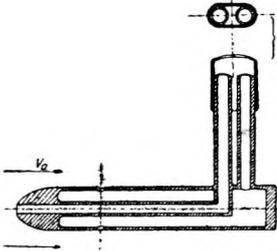
Пример 30. Для измерения скоростей в жидкостях употребляется так называемая трубка Пито. Она представляет из себя открытую спереди трубку, устанавливаемую открытым концом против потока. Этому концу трубки придается „удобообтекаемая” форма — форма, наименее нарушающая движение потока жидкости около трубки. Другой конец трубки, отогнутый под прямым углом, выводится вверх из жидкости (черт. 46). В этом колене трубки жидкость находится в покое, и давление в нем определяется уравнением $\frac{p_0}{\gamma} + 0 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g}$, если p_0 и V_0 обозначают соответственно давление и скорость в текущей жидкости. Вследствие избытка давления $p_1 - p_0 = \gamma \frac{V_0^2}{2g}$ жидкость в вертикальном колене подымется на h высоту, соответствующую давлению), при чем, как известно из статики, $h = \frac{p_1 - p_0}{\gamma}$ отсюда

$$V_0 = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_0)}{\gamma}} = \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (49)$$

Перед корнем следует еще поставить поправочный коэффициент, определяемый опытным путем и учитывающий влияние вязкости жидкости и нарушений в движении жидкости, производимых самим прибором.

Такие приборы называются пьезометрическими трубами; устройство их изображено на черт. 47. Они показывают скоростную высоту непосредственно как разность высот: $\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g}$ и $\frac{p_0}{\gamma}$, соответствующих гидравлическому давлению в одном колене и гидростатическому в другом.

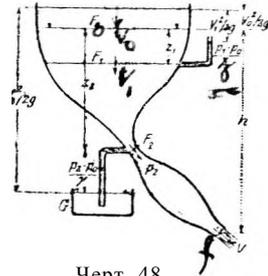
В этой форме пьезометрические трубы употребляются и для измерения скоростей в воздушных потоках. Отсчет высот, соответствующих давлениям, производится по микроманометру —



Черт. 47.

U-образной трубке, наполненной спиртом, с точно нанесенными делениями. Отсчет производится часто при помощи лупы.

Пример 31. В всасывающей жидкой струе. Если в каком-нибудь месте жидкой струи давление p окажется меньше атмосферного давления p_0 , то этим можно воспользоваться для всасывания жидкости из сосуда с более низким уровнем. Предельная вы-



Черт. 48.

сота, на которую жидкость может быть таким путем поднята, равна высоте $\frac{p_0 - p}{\gamma}$ соответствующей разности давлений $p_0 - p$. Само собой понятно, что ни в одной точке потока давление не должно равняться 0 или быть меньше < 0 , так как тогда произошел бы разрыв жидкой струи. Из уравнения Бернулли нетрудно вывести условие, при соблюдении которого давление в каком-нибудь месте жидкой струи оказывается меньше атмосферного. Если z_1 есть вертикальное расстояние какого-нибудь поперечного сечения жидкой струи от свободной поверхности жидкости (черт. 48), то из уравнения Бернулли $\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + z_1$ следует, что для сечения

$$\frac{p_1 - p_0}{\gamma} = z_1 - \frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} \quad V_1 = \frac{fV}{F_1} \quad V_0 = \frac{fV}{F_0}$$

Преобразуем это выражение, пользуясь уравнением неразрывности $F_0 \cdot V_0 = F_1 \cdot V_1 = fV$ и равенством $\frac{V^2}{2g} = h$; получим :

$$\frac{p_1 - p_0}{\gamma} = z_1 - \frac{f^2 V^2}{2g} \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} \right) = z_1 - hf^2 \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} \right)$$

Если поперечное сечение F_0 очень большое, следовательно можно принять $\frac{1}{F_0^2} \cong 0$, то приближенно будем иметь:

$$\frac{p_1 - p_0}{\gamma} = z_1 - h \cdot \frac{f^2}{F_1^2} \dots \dots \dots (50)$$

Это равенство справедливо для всех сечений F жидкой струи, меньших F_0 . Итак, избыток давления $p_2 - p_0$ в каком-нибудь месте, например, в „1“ или „2“ будет отрицательным, если $p_2 < p_0$ т. е. когда выполняется условие:

$$z_2 < h \frac{f^2}{F_2^2} \text{ или } \frac{F_2^2}{f^2} < \sqrt{\frac{h}{z_2}} \dots \dots \dots (51)$$

т. е. когда отношение поперечного сечения жидкой струи в рассматриваемом месте к поперечному сечению выходного отверстия меньше определенного числа, зависящего от высот обоих поперечных сечений.

Согласно равенству (50) разностью высот, соответствующих давлениям, будет:

$$H_2 = \frac{p_0 - p_2}{\gamma} = h \frac{f^2}{F_2^2} - z_2 \dots \dots \dots (52)$$

До этой глубины может быть опущен сосуд G . Заметим, что все эти расчеты действительны только при условии отсутствия всяких потерь, которые в разобранным случае как раз довольно велики.

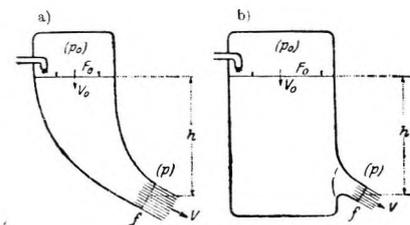
Всасывающим действием жидкой струи пользуются в так называемых водоструйных насосах, в которых одна жидкость поднимается струей другой жидкости. В этих насосах (черт. 91) делается отверстие в месте, где давление в них меньше атмосферного; в это отверстие всасывается жидкость (или газ) и продолжает отсюда двигаться дальше вместе с жидкостью насоса, „рабочей“ жидкостью. Более детальное изучение этого прибора показывает, что необходимо принимать во внимание происходящие в нем потери энергии (подробнее об этом см. в п. 36).

В гидротехнике всасывающим действием струи широко пользуются в сифонных водосливах (см. пример 4с).

Как уже было сказано, уравнение Д. Бернулли служит главнейшей основой почти для всех гидравлических расчетов. Оно было выведено при условии отсутствия всяких сопротивлений, которые, главным образом вязкость, тем не менее всегда существуют. Чтобы учесть влияние этих сопротивлений, в уравнение Бернулли вводится добавочный член; в таком случае говорят о дополненном уравнении Бернулли, которое уже не является как уравнение (47) интегралом уравнения движения, так как оно получается не интегрированием дифференциального уравнения, а введением дополнительного члена на основе общих соображений. В дальнейшем мы подробно остановимся на полученных таким путем результатах для некоторых отдельных случаев.

II. Истечение жидкостей из сосудов.

18. Закон Торичелли. Уравнением Бернулли можно воспользоваться для определения скорости истечения жидкости из сосуда, в котором уровень жидкости поддерживается на постоянной высоте, т. е., когда течение жидкости установившееся. Прежде всего предположим, что рассматриваемое течение жидкости на всем своем протяжении приблизительно удовлетворяет условиям идеальной жидкой струйки. Этого можно достичь, если придать самому сосуду такую форму, чтобы по возможности не возникали препятствия движению (черт. 49-а), или же если отверстие для вытекания в любом месте сосуда сделать небольшим и хорошо закругленным (черт. 49-б).



Черт. 49.

Итак, когда всю жидкость в целом можно рассматривать как идеальную жидкую струйку, уравнение Д. Бернулли для случаев, изображенных на черт. 49, представится так:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h.$$

Пользуясь уравнением неразрывности $fV = F_0 V_0$ и полагая (на много < 1), следовательно, $V_0 = n V$, получим:

$$\frac{f}{F_0} = n$$

$$V = \sqrt{\frac{2g \left[h + (p_0 - p) \cdot \frac{1}{\gamma} \right]}{1 - n^2}} \dots \dots \dots (53)$$

Стоящая в числителе подкоренного выражения дробь $h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ называется действительным напором жидкости.

В частном случае, когда на свободной поверхности жидкости в сосуде и у отверстия, откуда жидкость вытекает, давление одно и то же, т. е. $p = p_0$, равенство (53) принимает вид:

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 - n^2}} \dots \dots \dots (54)$$

Если кроме того, отверстие для истечения очень мало по сравнению со свободной поверхностью, то можно принять $n \sim 0$. Тогда вместо равенства (54) будет:

$$V = \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (55)$$

это есть так называемый закон Торичелли, согласно которому скорость вытекающей жидкости равна скорости падения точки в поле тяготения земли при высоте падения h .

Иногда принимают во внимание неравномерное распределение в жидкой струйке скоростей и в уравнении Д. Бернулли член, дающий скоростное давление, умножают на коэффициент a , величина которого колеблется от 1,1 до 1,2:

$$a \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{const.}$$

Все-таки в большинстве случаев эту поправку не делают.

19. Влияние вязкости. Сжатие вытекающей струи. а) Вязкость.

Скорость истечения, наблюдаемая в действительности, даже и при придании сосудам формы, удовлетворяющей условиям идеальной жидкой струйки, всегда оказывается меньше, чем значение $\sqrt{2gh}$, даваемое равенством (55). Причина этого несоответствия объясняется вязкостью — трением внутри жидкости и, в особенности, трением о стенки сосуда; происходит потеря скорости, равная некоторой дроби от теоретически вычисленного значения $\sqrt{2gh}$; можно положить:

$$V = \psi \sqrt{2gh} \quad (\psi < 1) \dots \dots \dots (56)$$

По Вейсбаху

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } h = 0,02 \text{ м} \quad \psi = 0,960 \\ \text{при } h = 0,03 \text{ м} \quad \psi = 0,995 \end{array} \right\} \text{ в среднем } \psi = 0,97;$$

значит, в среднем теоретическая скорость должна быть уменьшена на 3%.

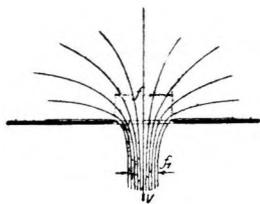
Положим $V = \psi \sqrt{gh} = \sqrt{gh_1}$. Разность $h - h_1 = h_\omega$ называют высотой сопротивления или высотой, соответствующей потере напора (потере энергии вследствие сопротивления); имеем:

$$h_\omega = h - h_1 = h \left(\frac{1}{\psi^2} - 1 \right) = \left(\frac{1}{\psi^2} - 1 \right) \frac{V^2}{2g} = \zeta_1 \cdot \frac{V^2}{2g} \dots \dots \dots (57)$$

где $\zeta_1 = \frac{1}{\psi^2} - 1 \cong 0,065$ есть коэффициент сопротивления, зависящий от вязкости. Высота сопротивления всегда представляет из себя некоторую часть скоростной высоты, соответствующей рассматриваемому случаю истечения, и дает потерю работы для 1 кг или потерю мощности для 1 кг/сек. протекающей воды.

в) Сжатие. Если отверстие для вытекания сделано в тонкой стенке и края его остrokонечны, а не закруглены как следует, наблюдается явление, называемое сжатием вытекающей струи, что, конечно, еще более уменьшает количество вытекающей жидкости.

В этом случае истечение жидкости, например, из отверстия в дне сосуда происходит следующим образом. Жидкость притекает к отверстию изнутри сосуда со всех сторон (черт. 50). Направления скоростей частиц жидкости вблизи сосуда параллельны плоскости дна, и так как скорость во время этого движения не может сделаться равной нулю, то не может быть и внезапного изменения в направлении линий тока; поэтому направление скорости у края отверстия некоторое время остается еще параллельным дну, отчего и возникает сжатие вытекающей струи. Эта горизонтальная скорость, конечно, быстро убывает, так что на некотором расстоянии от отверстия траектории частиц становятся уже вертикальными. Таким образом, вследствие притекания жидкости к отверстию со всех сторон, поперечное сечение вытекающей струи уменьшается совершенно так же, как уменьшается количество выходящих в единицу времени лиц при давке толпы у выхода из ворот.



Черт. 50.

Если через f обозначить поперечное сечение отверстия для вытекания и через f_1 — вытекающей, уже сжатой струи, то

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\text{поперечное сечение струи}}{\text{поперечн. сечен. отверстия}} = \alpha \dots \dots \dots (58)$$

называют коэффициентом сжатия. В таком случае количество вытекающей жидкости (расход)

$$Q = f_1 V = \alpha f \cdot \psi \sqrt{2gh} = \mu f \sqrt{2gh}, \dots \dots \dots (59)$$

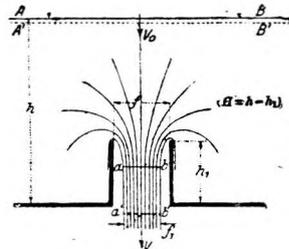
где

$$\mu = \alpha \psi \dots \dots \dots (60)$$

есть коэффициент расхода.

Для одного частного случая коэффициент сжатия a определяется точно, именно: для случая цилиндрической насадки, входящей внутрь жидкости, так называемой насадки Борда (черт. 51). Значение a для этого случая, между прочим, является нижней границей коэффициента сжатия.

Для вывода воспользуемся теоремой импульсов, которая вообще всегда применяется при подобном рода вычислениях. Она гласит: для какой-либо произвольным образом ограниченной массы жидкости приращение количества движения в единицу времени равно сумме импульсов сил, действующих на эту массу, за единицу времени. В большинстве случаев в гидравлике приходится иметь дело с силами неизменяющимися во времени.



Черт. 51.

Рассмотрим массу жидкости между свободной поверхностью AB и сжатым поперечным сечением ab (с боков эта масса жидкости может быть ограничена как угодно). Через небольшой промежуток времени Δt эта самая масса займет положение $A'B'a'b'$. Так как движение жидкости установившееся, то количество движения массы жидкости между поперечными сечениями $A'B'$ и ab одинаково как в начале промежутка Δt , так и в конце его. Действительно, каждая частица жидкости заменяется другой с равной и одинаково направленной скоростью. Приращение количества движения массы $AB ab$ равно поэтому разности количеств движения масс жидкости заключающихся в $ABA'B'$ и $aba'b'$ (эти массы одинаковы и равны ΔM). Обозначив количество движения первой массы через $\Delta M \cdot V_0$, а второй — через $\Delta M \cdot V$ (скорости V_0 и V направлены по вертикали z), получим:

$$\frac{\Delta M \cdot V - \Delta M \cdot V_0}{\Delta t} = \Sigma Z, \dots \dots \dots (61)$$

где ΣZ есть сумма сил, действующих в направлении оси z на рассматриваемую массу жидкости. Для частиц жидкости в $ABA'B'$ скорости очень малы; можно положить $V_0 \cong 0$. Так как объем $aba'b' = f_1 \cdot \Delta s = f_1 \cdot V \Delta t$, то масса его $\Delta M = \frac{\gamma}{g} f_1 V \Delta t$.

Приняв во внимание, что $V^2 = 2gH$ где $H = h - h_1$ перепишем левую часть уравнения (61):

$$\frac{\Delta M \cdot V}{\Delta t} = \frac{\gamma}{g} f_1 V^2 = \frac{\gamma}{g} f_1 \cdot 2gH = 2\gamma f_1 H \dots \dots \dots (62)$$

Силы ΣZ , действующие по вертикали, складываются из собственного веса жидкости и давления воздуха на свободную поверхность. Нам следует рассматривать только ту часть этих сил, которая приходится на площадь отверстия для вытекания, так как остальная часть, приходящаяся на дно сосуда, уничтожается его реакцией. На f действует давление

$$\Sigma Z = (p_0 + \gamma H)f - p_0 f = \gamma f H.$$

Уравнение (61) дает теперь: $2\gamma f_1 H = \gamma f H$ откуда, наконец, следует:

$$\alpha = \frac{f_1}{f} = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (63)$$

При этом выводе, который можно распространить и на случай бокового отверстия, мы пользовались равенством $V^2 = 2gH$, которое является только известным приближением, так как значение V зависит, между прочим, и от высоты h_1 вставленной в жидкость насадки. Каждый раз фактически $V^2 < 2gH$, и потому $\alpha > 1/2$, что и наблюдается в действительности¹⁾.

Теоретическое определение более точных значений коэффициентов истечения — задача очень сложная; пока приходится ограничиваться опытными данными, о которых будет сказано в следующем параграфе.

20. Коэффициенты расхода для донных и боковых отверстий. Коэффициент расхода μ зависит не только от формы и глубины отверстия для вытекания, но также и от формы самого сосуда вблизи отверстия. Влияние стенок сосуда и его дна только тогда не отражается на вытекающей струе, когда они отстоят от отверстия на расстоянии двух-трехкратной величины самого отверстия. Если отверстие находится далеко от стенок сосуда, то сжатие струи образуется совершенно беспрепятственно; в этом случае говорят о совершенном сжатии. Если же боковые стенки сосуда оказываются близко от отверстия для истечения, то тогда частицы воды, притекающие к отверстию, будут двигаться по направлениям, уже отчасти совпадающим с направлением, которое они должны получить благодаря положению отверстия; сжатие струи будет более или менее уменьшено, — будет несовершенным.

Из большого числа всех возможных таких случаев были экспериментально исследованы только те, которые имеют значение в технике, именно: донные и боковые отверстия с прямоугольными и круглыми сечениями и формы отверстий, употребляющихся в водосливах. Нижеприведенные данные являются только небольшой частью многочисленного опытного материала, полученного работами Poncelet, Lesbros и Wiesbach'a.

А. Донные отверстия. Для донных отверстий с острыми краями произвольной формы в плоской стенке, следовательно, при совершенном сжатии

$$\alpha = \text{от } 0,61 \text{ до } 0,64 \text{ (обыкновенно } 0,64),$$

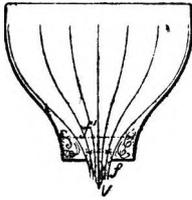
а коэффициент расхода (при $\psi = 0,97$)

$$\mu = \alpha\psi = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62 \dots \dots \dots (64)$$

¹⁾ Более точное исследование показывает, что предположения, принятые при только что проделанном выводе, выполняются довольно точно как-раз в случае насадок, входящих в жидкость.

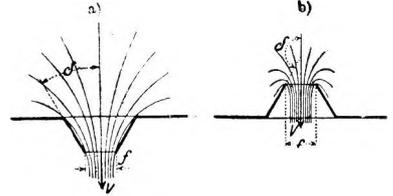
При направляющих стенках, расположенных и направленных внутрь сосуда, сжатие уменьшается, становится неполным. Коэффициент расхода согласно Видоне и Вейсбаху равен:

$$\mu' = \mu \left(1 + x \frac{\text{смачиваемая длина}}{\text{полная поверхность отверстия}} \right), \dots \dots (65)$$



Черт. 52.

где $x = 0,128$ для круглых отверстий, $0,152$ для небольших квадратов, $0,134$ для небольших прямоугольников, для больших—до $0,157$; для μ следует брать значение, полученное для совершенного сжатия ($0,62$).



Черт. 53.

Сжатие струи будет несовершенным и в том случае, когда сосуд перед отверстием сужается (черт. 52), так как благодаря этому частицы воды еще до достижения отверстия приобретают направления движения, близкие к вертикальному. Если поперечное сечение сосуда перед отверстием для вытекания f равно f_1 и $\frac{f}{f_1} = n (< 1)$, то, по Вейсбаху, коэффициенты расхода μ' равны ($\mu = 0,62$):

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ для круглых отверстий: } \mu' = \mu [1 + 0,0456 (14,82^n - 1)] \\ 2) \text{ для прямоугольных отверстий: } \mu' = \mu [1 + 0,076 (9^n - 1)] \end{array} \right\} \dots (66)$$

Конические насадки, направленные наружу (чертеж 53-а, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \delta > 0$), уменьшают сжатие; насадки же, направленные внутрь жидкости (чертеж 53-б, $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$, $\cos \delta < 0$), увеличивают сжатие; для обоих случаев по Вейсбаху

$$\mu' = \mu [1 + 0,332 \cos^3 \delta + 0,1684 \cos^4 \delta] \dots \dots \dots (67)$$

Пример 32. Резервуар в виде призмы наполнен водою до высоты $h=3$ м. Сколько выливается из него воды в 1 час через отверстие с $f = 10$ см², если уровень воды поддерживается все время на одной высоте и коэффициент расхода $\mu = 0,62$?

Согласно равенству (59) количество вытекающей в 1 секунду жидкости $Q = \mu \sqrt{2gh} = 0,62 \cdot 0,001 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = 0,00478$ м³/сек, а в час— $Q = 3600 \cdot 0,00478 = 17,2$ м³/час.

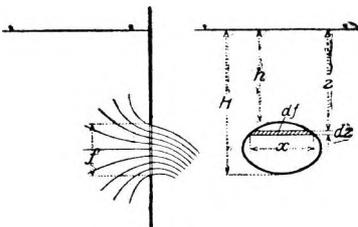
В. Боковые отверстия.

Формула (59) для расхода жидкости применяется и в том случае, когда отверстие для истечения находится в вертикальной или наклонной боковой стенке; только в этом случае оно оказывается годным лишь для части отверстия, а именно: — для узкой горизонтальной полосы с площадью $df = xdz$; через этот элемент отверстия вытекает в 1 секунду количество жидкости

$$dQ = \mu \cdot df \cdot \sqrt{2gh} = \mu \sqrt{2g} \cdot x \sqrt{z} \cdot dz,$$

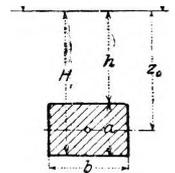
где z есть расстояние элемента отверстия от свободной поверхности. Общий расход жидкости выразится суммой всех dQ , т. е.

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_h^H x \sqrt{z} \cdot dz \dots (68)$$



Черт. 54.

Так как форма отверстия определяет x , как функцию от z , то полученный интеграл можно всегда вычислить: если этого нельзя сделать аналитически, прибегают к графическому интегрированию.



Черт. 55.

Вся трудность заключается опять-таки в выборе значения коэффициента расхода μ , который, как уже было сказано, трудно определить теоретически; и здесь пришлось прибегнуть к опыту, а для тех случаев, для которых опыты не были произведены, приходится удовлетворяться приближенной оценкой.

Пример 33. Прямоугольные и круглые боковые отверстия,
а) Для прямоугольника на черт. 55 $x=b=\text{const}$ и формула дает:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \int_h^H \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[H^{3/2} - h^{3/2} \right] \dots \dots \dots (69)$$

Для небольших и глубоколежащих отверстий этой формуле можно придать другой вид, более удобный для практических целей. Введя глубину z_0 центра тяжести отверстия, подставим в эту формулу $H = z_0 + \frac{a}{2}$, $h = z_0 - \frac{a}{2}$:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(z_0 + \frac{a}{2} \right)^{3/2} - \left(z_0 - \frac{a}{2} \right)^{3/2} \right] = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[z_0^{3/2} \left(1 + \frac{a}{2z_0} \right)^{3/2} - z_0^{3/2} \left(1 - \frac{a}{2z_0} \right)^{3/2} \right].$$

Развернув стоящие в скобках биномы в ряды, получим:

$$Q = \mu_1 ab \sqrt{2gz_0} \dots \dots \dots (70)$$

где

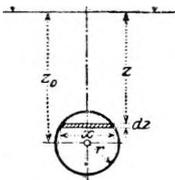
$$\mu_1 = \mu \left[1 - \frac{1}{96} \left(\frac{a}{z_0} \right)^2 - \dots \right].$$

б) Для круга на черт. 56 $\frac{x^2}{4} + (z_0 - z)^2 = r^2$ т.е. $x = 2\sqrt{r^2 - (z_0 - z)^2}$. Количество вытекающей в 1 секунду жидкости вычисляется опять-таки при помощи формулы (68)

Получаемый в результате радикал 2-й степени разворачиваем в ряд по степеням $\frac{r}{z_0}$ и получаем:

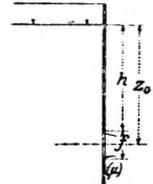
$$Q = \mu_2 r^2 \pi \sqrt{2gz_0} \dots \dots \dots (71)$$

$$\mu_2 = \mu \left[1 - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{z_0} \right)^2 - \dots \right].$$



Черт. 56.

где



Черт. 57.

В нижеследующей таблице даны значения коэффициентов расхода, полученные Poncelet, Lesbros и Weisbach'ом для прямоугольных и круглых отверстий разных размеров, расположенных на разных глубинах (при совершенном сжатии струи).

Коэффициенты истечения μ_1, μ_2 Для боковых отверстий (по Poncelet, Lesbros и Weisbach'у).

h в м	а) прямоугольник: $Q = \mu_1 ab \sqrt{2gz_0}$					z в м	б) круг: $Q = \mu_2 r^2 \pi \sqrt{2gz_0}$				
	высота прямоугольника в см						радиус отверстия в см				
	20	10	5	2	1		15	5	2	1	0,3
0,05	0,58	0,60	0,62	0,64	0,68	0,10	—	—	0,61	0,62	—
0,5	0,60	0,62	0,63	0,63	0,65	0,50	0,59	0,60	0,61	0,61	0,64
1,0	0,60	0,62	0,63	0,63	0,63	1,0	0,59	0,60	0,60	0,60	0,62
3,0	0,60	0,61	0,60	0,61	0,61	6,0	0,59	0,60	0,60	0,60	0,60

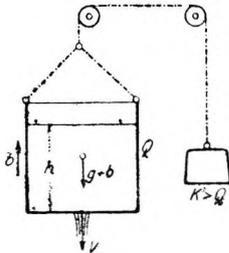
Этими же учеными опытным путем были исследованы изменения в течении, вызываемые различными направляющими пристройками перед отверстиями для истечения, какие встречались в более старых гидротехнических сооружениях. (Относительно влияния на истечение насадок, приделываемых к отверстию для истечения, см. п. 34.)

21. Особые случаи истечения. а) Истечение из движущихся сосудов. Равномерное движение сосуда в каком угодно направлении ничего не изменяет в процессе истечения. Если же сосуд движется с равномерным ускорением b , то это равносильно увеличению ускорения силы тяжести g до $b+g$, и скорость истечения (относительная, по отношению к движущемуся сосуду) при напоре h по закону Торичелли, будет равна:

$$V = \sqrt{2(g+b)h} \dots\dots\dots (72)$$

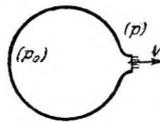
Если сосуд падает с ускорением b , то в приведенное равенство вместо $g+b$ надо подставить $g - b$; в частности, если $b=g$, то $V=0$, т. е. в свободно падающем сосуде и жидкость не вытекает даже из открытого отверстия.

Пример 34. Если сосуд весом в Q (вместе с содержимым) связан при помощи каната, перекинутого через два блока, с грузом K ($K > Q$), то он будет двигаться с равномерным ускорением, определяемым при помощи принципа Даламбера и равным $b = g \frac{K-Q}{K+Q}$. По формуле (72) скорость истечения $V = \sqrt{2(g+b)h} = \sqrt{\frac{4Kgh}{K+Q}}$.

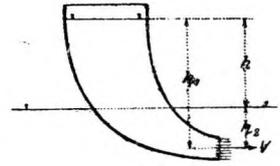


Черт. 58.

б) Скорость истечения при наличии в внутреннем давлении определяется равенством (53), где в этом случае $p_0 \neq p$. Имеем (черт. 59).



Черт. 59.



Черт. 60.

$$V = \sqrt{\frac{2g(p_0 - p)}{\gamma}} \dots\dots\dots (73)$$

с) Истечение под водой. Скорость истечения из сосуда с высотой h_1 , отверстие которого находится на глубине h_2 под свободную поверхность воды (черт. 60), определяется равенством:

$$V = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh}, \dots\dots\dots (74)$$

которое показывает, что величина скорости истечения под водой зависит только от разности уровней свободных поверхностей. Поскольку имеет место сжатие струи, необходимо ввести в это равенство коэффициент сжатия α' и, кроме того, поправочный множитель $\psi \cong 0,97$ на потерю от трения. По Вейсбаху при истечении под водой $\alpha' = 0,98$, где α есть коэффициент сжатия при истечении на воздух (при нормальном давлении).

Примером такого изучения может служить спуск воды через отверстие на дне искусственного пруда; для изучения такого истечения производились особые опыты.

То же равенство (74) позволяет вычислить скорость течения в трубе, соединяющей два сосуда, уровни жидкости в которых разнятся на h (если не принимать во внимание возникающей при этом потери вследствие вязкости).

Пример 35. Формула (74) для скорости истечения под водой применяется для определения времени, в течение которого происходит выравнивание уровней в двух соседних шлюзных камерах или наполнение одной из них. В первом приближении объемные (massenkräfte) силы движущейся жидкости не принимаются во внимание, что при медленном наполнении можно делать без всяких сомнений.

Пусть уровень в левой камере опустился на x , в правой — поднялся на y ; тогда разность высот будет мерой величины скорости истечения в данный момент. Уравнение неразрывности дает:

$$F_1 dx = F_2 dy = \mu f \sqrt{2gz} \cdot dt; \text{ так как } x + y + z = h, \text{ то } dx + dy = -dz,$$

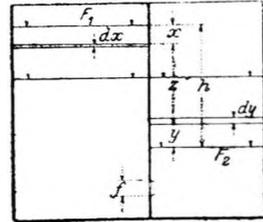
и отсюда:

$$\mu f \sqrt{2g} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \cdot dt = -\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

и время T выравнивания уровней, которое происходит при достижении z нулевого значения, определится из уравнения

$$\mu f \sqrt{2g} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) T = - \int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2[z]_h^0 = 2\sqrt{h}, \text{ т. е.}$$

$$T = \frac{2 F_1 F_2 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g} (F_1 + F_2)} \dots \dots \dots (75)$$



Черт. 61.

Из этого же равенства получим время, в течение которого меньшая камера наполняется водой из большей, предполагая, что в последней уровень свободной поверхности остается неизменным; для этого надо положить $F = \infty$.

Получим:

$$T = \frac{2F_2 \sqrt{h}}{\mu f \sqrt{2g}} = \frac{2F_2 h}{\mu f \sqrt{2gh}} \dots \dots \dots (76)$$

[ср. пример 38, ур. (92)]

Под влиянием объемных (massenkräfte) сил в движущейся жидкости будут происходить колебания, которые, однако, вследствие всегда существующего трения будут постепенно затухать.

d) При расчете всех случаев истечения может быть принята во внимание и скорость c притекания потока к выходному отверстию. Прибавлением скоростной высоты $\frac{c^2}{2g}$ к действительному уровню свободной поверхности переходят к „идеальной“ свободной поверхности, относительно которой и вычисляют действительные напоры для отдельных элементов отверстия. Вместо равенства (69) получается следующее:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{c^2}{2g} \right)^3 - \left(h + \frac{c^2}{2g} \right)^3 \right] \dots \dots \dots (77)$$

Как при этом должны быть изменены коэффициенты расхода, можно сказать только после особых исследований, а для производства последних у нас имеется очень мало исходных пунктов.

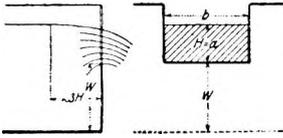
22. Водосливы. Если верхний порог отверстия для истечения доходит до свободной поверхности жидкости, следовательно, $h = 0$, то такой случай истечения называют водосливом. Чаще всего отверстие бывает в форме прямоугольника, и водослив в таком случае называют прямоугольным q .

Из равенства (69), полагая $h = 0$, $H = a$, $ab = Hb = f$, непосредственно получаем:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b H \sqrt{2gH} = \frac{2}{3} \mu f \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (78)$$

Так как над нижним порогом отверстия уровень свободной поверхности уже понижен, высоту H надо измерять на расстоянии хотя бы $3H$ от нижнего порога вверх по потоку.

И здесь определение Q сводится к определению действительного значения μ . В нижеследующей таблице даны значения $\frac{2}{3}\mu$ для различных высот плотины W , полученные Базеном опытным путем для случая свободной струи, падающей с водослива с острым ребром, при полном сжатии ее (и с боков, черт. 63-а).



Черт. 62.

Таблица коэффициентов расхода μ для прямоугольных водосливов.

H в м	Высота плотины W в м		
	0,2	0,5	1,0
0,1	0,46	0,44	0,43
0,3	0,50	0,45	0,43
0,5	—	0,46	0,44

Th. Rehbock в результате опытов, произведенных им в гидротехнической лаборатории в Карлсруэ, получил следующую эмпирическую формулу:

$$Q = \left(1,787 + \frac{2,925}{1050 H - 3} + 0,236 \frac{H}{W} \right) b H^{\frac{3}{2}}, \dots \dots \dots (79)$$

где H есть высота водослива, а W — высота плотины.

При неполном сжатии, которое бывает при близком расположении к водосливу боковых и донной стенок подводящего канала, по Вейсбаху вместо μ следует брать

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \mu (1 + 1,718 n^2), & \text{когда } b < B \\ \mu_1 &= \mu (1,041 + 0,37 n^2), & \text{когда } b = B \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (80)$$

где

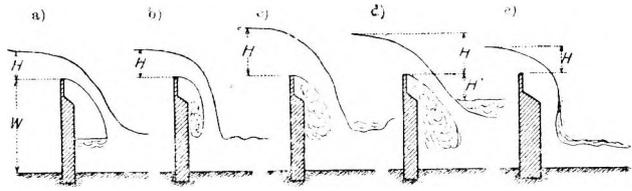
$$n = \frac{\text{поперечное сечение водослива}}{\text{поперечное сечение канала}},$$

b — ширина отверстия для истечения, B — ширина канала.

При водосливе вытекающая струя может принимать самые разнообразные формы. Все их можно подразделить на пять типов; чертежи 63-а — 63-е дают представление о них. От формы струи, конечно, зависит величина μ .

а) Свободная струя или струя с вентиляцией бывает в том случае, когда под струей имеет свободный доступ воздух.

б) Если же в пространство под струей не проникает достаточного количества воздуха, падающая струя прижимается к стенке плотины, но так, что между ними еще остается воздушное пространство. Такая струя называется отжатой. Она падает не так далеко, как свободная струя, но зато расход воды увеличивается, причиной чему служит всасывающее действие этой струи, возникающее от наличия под нею разреженного воздушного пространства.



Черт. 63.

с) Струя без вентиляции получается в том случае, когда воздух не имеет доступа под нее и при $H \geq 0,4 W$; пространство под струей сплошь заполняется клубящейся водой. Часто при этом на нижнем бьефе, в некотором удалении от плотины, образуется повышение — прыжок воды; в этом случае расход воды делается еще большим.

д) Струя без вентиляции, но с набежавшей на нее волной из нижнего бьефа, получается при $H + H' \leq \frac{3}{4} W$; прыжок воды образуется вблизи плотины, отчего часть падающей струи перекрывается прыжковой волной.

е) Прилипшая к погруженной части стенки струя получается тогда, когда отверстие для истечения сделано в неслишком тонкой стенке так,

что струя имеет более пологий скат. Расход при такой струе приблизительно на $\frac{3}{10}$ больше, чем при свободной струе с такой же величиной H .

23. Плотины. В плотинах, большей частью представляющих из себя каменные постройки, перегораживающие русла рек, истечение происходит иначе, чем в искусственно поставленных опытах с водосливами. Дело в том, что порог плотины не представляет из себя остроконечной тонкой стенки, а имеет более или менее значительную ширину и, в зависимости от материала и строительных условий, делается плоским, треугольным, закругленным и с покатостью с той или другой стороны плотины.

По наблюдениям Bazin'a струя приподнимается над горизонтом перед остроконечным водосливом в расстоянии около $0,1 H$ и горизонтальное положение под ребром водослива наступает опять в расстоянии от ребра на $0,66 H$. Поэтому, если ширина порога плотины $> 0,66 H$, то это существенным образом сказывается на форме струи.

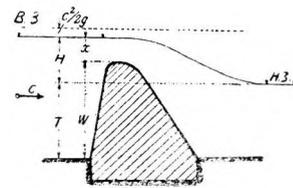
$H = 0,5 a$	1	2
$Q_1 = 0,8 Q$	$0,88 Q$	Q

Обозначая через Q расход воды при свободной струе, имеем для расхода Q_1 через плотину с прямоугольным порогом с шириною a следующие значения:

Округление плотины со стороны верхнего бьефа значительно повышает расход. Для различным образом закругленных плотин Базен на основании многочисленных опытов нашел, что в зависимости от высоты H $Q_1 =$ от $0,9 Q$ до $1,06 Q$.

Равенства (77) и (78), определяющие расход воды, могут быть использованы и для решения обратного вопроса: какой высоты W должна быть плотина, чтобы она могла поднять уровень воды в реке на величину H ? Ведь назначением плотины и является как-раз поднятие уровня воды в реке. Увеличение высоты уровня свободной поверхности воды, достигнутое с помощью плотины, называется высотой подпора.

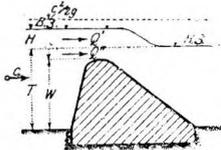
Итак, пусть даны: расход воды Q ($m^3/сек.$), ширина B (m) и глубина T (m) реки и высота подпора H , который следует получить. Определить высоту плотины W , необходимую для получения заданной высоты подпора H .



Черт. 64.

Могут быть два случая:

а) Порог плотины находится выше свободной поверхности нижнего бьефа, такая плотина называется водосливной (черт. 64), и для ее расчета можно пользоваться ранее найденной формулой (78) для прямоугольного водослива. Если принять во внимание и скорость c притекания воды к плотине (п. 21 d), то, введя прибавлением скоростной высоты $\frac{c^2}{2g}$ вместо действительного уровня идеальный, получим для величины расхода следующее выражение ($H = x + \frac{c^2}{2g}, h = \frac{c^2}{2g}$):



Черт. 65.

$$Q = \frac{2}{3} \mu_1 \sqrt{2g} \left[\left(x + \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \dots (81)$$

где $\frac{2}{3} \mu_1$ обыкновенно полагают равными 0,46. Из этого уравнения вычисляется x , а затем находится высота плотины

$$W = H + T - x \dots (82)$$

б) Если же порог плотины находится ниже свободной поверхности нижнего бьефа, водослив будет неполным; такая плотина называется затопленной (черт. 65). Для определения коэффициентов расхода у таких плотин у нас имеется пока еще очень мало данных. По Вейсбаху явление истечения в этом случае можно

Разницей между этим значением и прежним (0,115) можно пренебречь. Для получения большей точности можно было бы повторить все вычисления, вводя в них для $\frac{c^2}{2g}$ найденное значение 0,140.

24. Время истечения и опорожнения. А. Истечение из донных отверстий. Равенство (59) для количества вытекающей жидкости применяется не только в случае установившегося истечения, когда скорость V остается все время постоянной, но и при переменном напоре h , определяющим величину скорости V . В таких случаях возникает вопрос об определении времени, в течение которого происходит истечение части жидкости из сосуда или опорожнение всего сосуда. Разбирая эти явления, не будем принимать во внимание всегда существующей зависимости между коэффициентом расхода μ и напором h , а в течение всего процесса будем считать $\mu = 0,62$.

Предположим, что в сосуд произвольной формы (черт. 66) ежесекундно вливается q м³; тогда, при заданных значениях напора h и площади f отверстия для истечения, получим, что

уровень свободной поверхности повышается, } если $q \geq \mu f \sqrt{2gh}$.. (86)
 " " " остается на месте, }
 " " " понижается, }

Если в последнем случае уровень жидкости уже опустился до глубины z то за время dt количество жидкости в сосуде уменьшается на $(\mu f \sqrt{2gz} - q) at$ и в соответствии с этим свободная поверхность жидкости, площадь которой $F=F(z)$, опускается еще на высоту dz . Поэтому

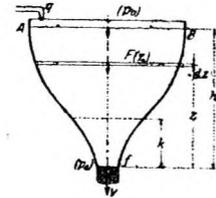
$$(\mu f \sqrt{2gz} - q) dt = -F(z) dz \dots\dots\dots (87)$$

Положив $\frac{q}{\mu f \sqrt{2g}} = \sqrt{k}$, получим:

$$dt = \frac{F(z) dz}{q - \mu f \sqrt{2gz}} = \frac{1}{\mu f \sqrt{2g}} \cdot \frac{F(z) dz}{\sqrt{k} - \sqrt{z}}$$

Время истечения жидкости до глубины z равно

$$t = \frac{1}{\mu f \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{F(z) dz}{\sqrt{k} - \sqrt{z}} \dots\dots\dots (88)$$



Черт. 66.

Для $z = k$ приток жидкости q делается равным количеству вытекающей жидкости, и уровень жидкости приближается к некоторому предельному положению, дальше которого он не может опуститься; время, в течение которого жидкость опускается до этого уровня, получается из равенства (88), если верхний предел интеграла положить равным k .

Но в таком случае подынтегральная функция $\frac{F(z)}{\sqrt{k} - \sqrt{z}}$ обращается в бесконечность. Интеграл будет иметь конечное значение лишь при условии, что бесконечность функции $\frac{F(z)}{\sqrt{k} - \sqrt{z}}$ будет порядка ниже первого относительно $\frac{1}{k-z}$. Обозначим через ϵ произвольное отличное от нуля малое положительное число; тогда, введя функцию $g(z)$, голоморфную в области, значений принимаемых z , запишем условие конечности интеграла так:

$$\frac{F(z)}{\sqrt{k} - \sqrt{z}} = \frac{g(z)}{(k-z)^{1-\epsilon}}, \text{ или } F(z) = g(z) \frac{\sqrt{k} - \sqrt{z}}{(k-z)^{1-\epsilon}}$$

Введя еще функцию $g_1(z)$, связанную с $g(z)$ соотношением $g(z) = g_1(z)(\sqrt{k} + \sqrt{z})$, и тоже голоморфную, получим:

$$F(z) = g_1(z) (k-z)\epsilon \dots\dots\dots (89)$$

Значит, формула (88) дает конечное время истечения в том случае, когда функция $F(z)$ при $z = k$ имеет нулевую точку порядка ϵ . Следует однако заметить, что эти рассуждения не могут быть физически истолкованы, так как отверстие f для истечения, хотя и находится

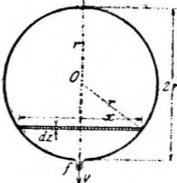
в самом низком месте, тем не менее имеет конечную величину. Пользуясь этой простой теорией, мы для времени достижения свободной поверхностью предельного положения всегда будем получать бесконечно большое значение.

При отсутствии притока ($q = 0$, $k = 0$) равенство (88) для $z = 0$ дает время опорожнения сосуда:

$$T = \frac{1}{\nu f \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{F(z) dz}{\sqrt{z}} \dots \dots \dots (90)$$

Пример 38. Призматический сосуд. Для $F = F_0 = \text{const}$, (черт. 67) получаем (при $q \neq 0$, $k \neq 0$):

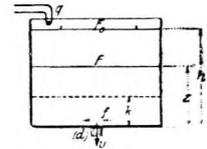
$$t = \frac{F_0}{\nu f \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{dz}{\sqrt{k - Vz}} = \frac{2F_0}{\nu f \sqrt{2g}} \left[\sqrt{k - Vz} + \sqrt{k} \log \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} \right] \dots \dots (91)$$



Черт. 67.

Время до достижения жидкостью предельного положения уровня $z = k$ в этом примере действительно оказывается бесконечным.

При отсутствии притока ($q = 0$) равенство (90) дает время опорожнения:



Черт. 68.

$$T = \frac{F_0}{\nu f \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2F_0}{\nu f \sqrt{2g}} \left[\sqrt{z} \right]_0^h = \frac{2F_0 \sqrt{h}}{\nu f \sqrt{2g}} = \frac{2F_0 h}{\nu f \sqrt{2gh}} \dots \dots \dots (92)$$

Так как $F_0 h$ есть объем сосуда, а $\nu f \sqrt{2gh}$ — количество с вытекающей в 1 секунду жидкости при напоре h , то равенство (92) показывает, что для опорожнения полного сосуда необходимо время в 2 раза большее, чем время, в течение которого вытекает из сосуда такое же количество жидкости при установившемся движении, т. е. при постоянном напоре h .

Пример 39. В сферическом сосуде (черт. 68) $F = \frac{x^2 \pi}{4}$, $\frac{x^2}{4} + (r - z)^2 = r^2$, $\frac{x^2}{4} = 2rz = z^2$; при истечении через отверстие f в самой низкой точке сосуда время опорожнения последнего равно

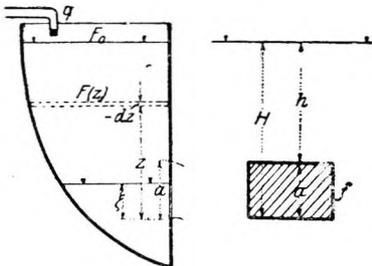
$$T = \frac{\pi}{\nu f \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{2rz - z^2}{\sqrt{z}} dz = \frac{8}{5} \cdot \frac{4r^3 \cdot \frac{\pi}{3}}{\nu f \sqrt{2} \cdot 2r} \dots \dots \dots (93)$$

т. е. оно в $\frac{8}{5}$ раза больше времени истечения того же количества жидкости при постоянном напоре $2r$.

В. Истечение из боковых отверстий. Время истечения из боковых отверстий вычисляется таким же способом, как и для случая донных отверстий. только здесь процесс истечения разбивается на две фазы: пока уровень жидкости еще не опустился до верхнего порога отверстия для истечения (черт. 69), происходит истечение через полное отверстие под свободной поверхностью жидкости, и применяется, если отверстие прямоугольное, формула (69); после же того, как жидкость опустится до верхнего порога отверстия, будет происходить явление водослива, и в случае прямоугольного отверстия следует пользоваться формулой (78). И при этом вычислении (приближенно!) принято считать μ постоянным во все время процесса истечения, так как только при этом условии можно решить задачу.

Опускание первоначального уровня происходит в том случае, когда

$$q = < \frac{3}{2} \nu b \sqrt{2g} \left[H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right].$$



Черт. 69.

Для глубины z , как и прежде, уравнение неразрывности дает (черт. 69):

$$\left\{ \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[z^{\frac{3}{2}} - (z-a)^{\frac{3}{2}} \right] - q \right\} dt = -F(z) dz,$$

и время, в течение которого уровень жидкости опустился до верхнего порога отверстия, равно

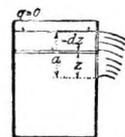
$$T_1 = \int_a^H \frac{F(z) dz}{\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[z^{\frac{3}{2}} - (z-a)^{\frac{3}{2}} \right] - q} \dots \dots \dots (94)$$

Затем наступает явление прямоугольного водослива [форм. (78)]. Уравнение неразрывности дает: $\left\{ \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \zeta^{\frac{3}{2}} - q \right\} dt = F(\zeta) d\zeta$, отсюда получается время, в течение которого уровень жидкости опускается до нижнего порога отверстия:

$$T_2 = \int_0^a \frac{F(\zeta) d\zeta}{\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \zeta^{\frac{3}{2}} - q} \dots \dots \dots (95)$$

Весь промежуток времени, в течение которого вода опускается до нижнего порога отверстия, равен $T = T_1 + T_2 \dots \dots (96)$

Пример 40. Для вычисления времени опорожнения призматического сосуда через боковое прямоугольное отверстие (черт. 70) надо положить $F = F_0$, и при отсутствии притока в сосуд ($q = 0$) получим:



$$T_2 = \frac{2}{3} \frac{F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \int_0^a \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}} = \frac{3 F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \left[-\frac{1}{\sqrt{z}} \right]_0^a = \frac{3 F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \left[\frac{1}{\sqrt{0}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] = \infty$$

Черт. 70.

Этот вывод показывает недостаточность сделанных предположений для анализа этого случая.

III. Силы, с которыми движущиеся жидкости действуют на проводящие их сосуды.

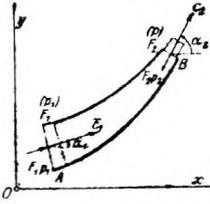
25. Сила, с которою струя жидкости действует на проводящий ее покоящийся сосуд. Рассмотрим жидкую струйку с количеством протекающей жидкости Q м/сек.³, имеющую форму канала между двумя лопатками турбины, с произвольным, но непрерывно изменяющимся поперечным сечением, так что эта струйка заполняет сосуд полностью. Возникает вопрос, большой практической важности, о силе, с которою этот поток жидкости действует на сосуд. Эту силу называют давлением жидкой струи на сосуд или реакцией жидкой струи.

Эта сила, очевидно, равна сумме давлений, производимых жидкостью на отдельные элементы поверхности стенок сосуда. С помощью принципа Даламбера нетрудно получить выражение для равнодействующей этих давлений. Однако гораздо проще и нагляднее достигнуть этой цели не суммированием отдельных давлений, а с помощью теоремы импульсов, на применимость которой для разрешения подобного рода вопросов указывалось уже в п. 19.

Как и прежде, следующим образом формулируем теорему импульсов: „Производная по времени вектора количества движения произвольным образом ограниченной массы жидкости (или точнее: произвольным образом ограниченной группы тел) равна сумме действующих на эту массу сил. Действующими силами будут силы, распределенные по поверхности и объему рассматриваемой массы жидкости. Аналогичная же теорема существует и для моментов. Обозначив через вектор суммы количеств движения ограниченной массы

жидкости, через $\overline{\Sigma K}$ — сумму сил, через $\overline{\mathcal{D}}$ — момент количества движения относительно произвольной точки пространства O , через $\overline{\Sigma \mathcal{M}}$ — сумму моментов относительно точки O , запишем теорему импульсов двумя уравнениями:

$$\frac{d\overline{\mathcal{S}}}{dt} = \overline{\Sigma K}, \quad \frac{d\overline{\mathcal{D}}}{dt} = \overline{\Sigma \mathcal{M}} \dots \dots \dots (97)$$



Черт. 71.

Ограничение массы жидкости надо полагать выполненным некоторой контрольной поверхностью. По установлении этой поверхности надо следить, каким изменениям подвергается ограниченная масса, принимая в расчет силы, действующие на нее и на ее поверхность.

Применим эту теорему к массе жидкости, протекающей через плоский сосуд, изображенный на черт. 71. Скорости при входе и выходе из сосуда обозначим через c_1 и c_2 ¹⁾, количество протекающей жидкости — через Q . За контрольную поверхность примем очертания сосуда и поперечные сечения F_1 и F_2 . Через малый промежуток времени рассматриваемая масса жидкости передвинется и займет положение, отмеченное на чертеже пунктиром. В то время, как внутри сосуда при таком передвижении каждая частица жидкости заменяется другой, обладающей той же скоростью, так что количество движения этой части массы жидкости остается прежним, у входа в сосуд исчезает количество движения $\rho Q c_1 \cdot \Delta t$, а у выхода — появляется количество движения $\rho Q c_2 \cdot \Delta t$, так как $\rho Q \Delta t$ есть масса жидкости, за время Δt притекающая к B и оттекающая от A ($\rho = \frac{\gamma}{g}$).

Итак, у входа в сосуд исчезает количество движения $\overline{\Delta \mathcal{S}}_1 = \rho Q \overline{c_1} \cdot \Delta t$, а у выхода образуется — $\overline{\Delta \mathcal{S}}_2 = \rho Q \overline{c_2} \cdot \Delta t$; то и другое имеют направления, одинаковые со скоростями c_1 и c_2 почему они и отмечены буквами с черточками. Приращение количества движения за 1 секунду равно действующей на жидкость силе ($-K$):

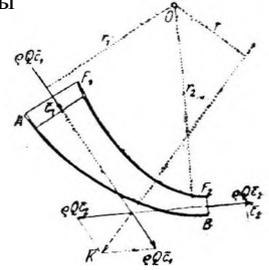
$$-K = \frac{\overline{\Delta \mathcal{S}}_2 - \overline{\Delta \mathcal{S}}_1}{\Delta t},$$

и — по закону равенства действия и противодействия — сила, действующая со стороны жидкости на сосуд, равна

$$\overline{K} = \frac{\overline{\Delta \mathcal{S}}_1 - \overline{\Delta \mathcal{S}}_2}{\Delta t},$$

или:

$$\overline{K} = gQ(\overline{c_1} - \overline{c_2}) \dots \dots \dots (98)$$



Черт. 72.

Таким образом, сила \overline{K} , с которою жидкость действует на проводящий ее сосуд, зависит исключительно от скоростей $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$ у входа и выхода из сосуда и количества Q протекающей жидкости. От формы же сосуда эта сила совершенно не зависит.

Итак, чтобы определить силу \overline{K} , с которою поток жидкости действует на проводящий ее сосуд, следует отложить, как указано на черт. 72, силу $\rho Q \overline{c_1}$ в направлении $\overline{c_1}$, силу $\rho Q \overline{c_2}$ в направлении, противоположном $\overline{c_2}$, — следовательно, обе силы будут направлены внутрь сосуда, — и, продолжив линии их действия, начертить треугольник сил. Из него непосредственно и определится по величине и направле-

¹⁾ В этой и следующей главе мы пользуемся буквенными обозначениями, вошедшими в употребление в теории турбин, а именно \overline{v} через ω_1 и ω_2 обозначаются относительные, через e_1 и c_2 — абсолютные скорости, а через u_1 и u_2 — окружные линейные скорости у входа и выхода.

нию искомая сила \bar{K} . Можно также сказать, что притекающей струе соответствует сила ρQc_1 , а оттекающей — сила ρQc_2 , и их разность дает силу, с которой жидкая струя действует на сосуд.

Чтобы получить момент сил, действующих на сосуд со стороны жидкости, относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через какую-нибудь точку O , надо, согласно второй части теоремы импульсов, найти приращение моментов количеств движения относительно точки O (черт. 72); в нашем случае дело сводится непосредственно к теореме моментов, так как момент \bar{K} относительно точки O равен сумме моментов составляющих ρQc_1 и ρQc_2 относительно той же точки O .

Обозначив через α_1 и α_2 углы наклона c_1 и c_2 к какой-нибудь прямой, принятой за ось x , получим для проекций (X, Y) силы K на оси x и y прямоугольной системы координат Oxy следующие выражения:

$$\bar{K} \begin{cases} X = \rho Q (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2) \\ Y = \rho Q (c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2) \end{cases} \dots\dots\dots (99)$$

Если оси x и y направлены по горизонтали и вертикали, X и Y называют горизонтальным и вертикальным давлениями. Момент силы \bar{K} относительно какой-нибудь точки O плоскости xy равен

$$\mathfrak{M} = \rho Q (c_1 r_1 - c_2 r_2) = Kr \dots\dots\dots (100)$$

Если жидкая струя расположена в пространстве трех измерений, то повторяя рассуждения, подобные предыдущим, придем к тем же выводам только теперь обе силы ρQc_1 и ρQc_2 образуют пространственную систему сил, которая в общем случае приводится уже не к одной равнодействующей, а к динаме. Это динама определяется способом, известным из статики.

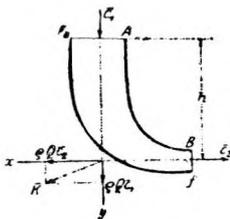
Если в расчет принимаются и давления $F_1 p_1$ и $F_2 p_2$ на пограничные плоские сечения жидкой струи F_1 и F_2 , то в правых частях равенств (99 и 100) появляются еще по два члена, зависящие от этих давлений, и эти равенства, определяющие силы и момент, действующие на сосуд, предстанутся:

$$\bar{K} \begin{cases} X = \rho Q (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) + F_1 p_1 \cos \alpha_1 - F_2 p_2 \cos \alpha_2 \\ Y = \rho Q (v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2) + F_1 p_1 \sin \alpha_1 - F_2 p_2 \sin \alpha_2 \end{cases} \dots (101)$$

$$\mathfrak{M} = \rho Q (v_1 r_1 - v_2 r_2) + F_1 p_1 r_1 - F_2 p_2 r_2 \dots\dots\dots (102)$$

Пример 41. а) сила \bar{K}_1 , с которой действует на сосуд струя жидкости, вытекающая из этого сосуда через боковое отверстие, определяется непосредственно указанным выше построением. Если не принимать в расчет собственного веса жидкости, получим для проекций силы \bar{K} на оси x и y выражения:

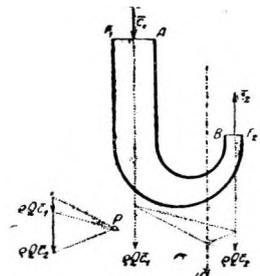
$$\bar{K} \begin{cases} X = \rho Q c_2 = \frac{\gamma}{g} f c_2^2 = 2 \gamma f h \\ Y = \rho Q c_1 = \frac{\gamma}{g} f c_2 c_1 = 2 \gamma f h \cdot \frac{c_1}{c_2} \end{cases} \dots\dots\dots (103)$$



Черт. 73.

Отсюда видно, что реакция жидкой струи в горизонтальном направлении в два раза больше действующего на f гидростатического давления, соответствующего напору h .

Этот вывод можно получить и непосредственно или заметить, что сила X возникает от того, что вытекающий в каждую секунду массе жидкости $\rho f c_2$ сообщается в направлении



Черт. 74.

оси x скорость $c_2 = \sqrt{2gh}$, так что, как и прежде: $X = \frac{\gamma}{g} f c_2 \cdot c_2 = \frac{\gamma}{g} f \cdot 2gh = 2\gamma fh$.

Если f не мало по сравнению с F_0 , т.е., если следует принимать во внимание скоростную энергию $\frac{c_1^2}{2g}$ опускающийся жидкости (c_1 — скорость свободной поверхности), то, согласно равенству (54), $c_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-n^2}}$, где $h = \frac{f}{F_0}$; в остальном вычисления проводятся по-прежнему.

b) Если направления c_1 и c_2 параллельны и прямо противоположны (черт. 74), то силы $\rho Q c_1$ и $-\rho Q c_2$ параллельны и одинаково направлены. Силу \bar{K}_i действующую на сосуд, получим, складывая параллельные силы хотя бы способом многоугольника сил, как это показано на черт. 74.

с) Если векторы c_1 и c_2 равны по величине и обратны по направлению, то сумма сил, действующих со стороны жидкости на сосуд, эквивалентна паре, момент которой

$$\mathfrak{M} = \rho Q c_1 a, \dots \dots \dots (104)$$

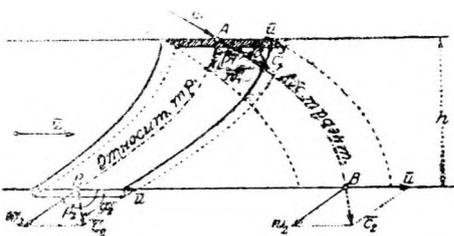
где через a обозначено расстояние между c_1 и c_2 .

26. Движущиеся сосуды. Задача, разобранный в предыдущем параграфе, приобретает особо важное значение в теории турбин, когда сосуд, через который протекает жидкость (канал между лопатками колеса) сам тоже движется, и работа, передаваемая жидким потоком сосуду, находит себе противодействие в сопротивлении, этой работой преодолеваемом. При разборе этого явления ограничимся двумя случаями: а) сосуд находится в равномерно-прямолинейном движении и б) — в равномерно-вращательном движении.

Таким образом равномерное движение тела, могущего вращаться около неподвижной оси, можно будет рассматривать как результат действия текущей воды (при установившемся движении это всегда возможно). Однако, несмотря на то, что движущая сила воды и „сопротивление“ турбинного колеса уравнивают друг друга — эти силы равны по величине и действуют по одной и той же линии, но в обратных направлениях, мы все-таки должны полагать движущую силу несколько большей силы сопротивления, чтобы она была в состоянии поддерживать это установившееся движение.

При наличии переменного ускорения все соотношения становятся на много сложнее, так как этим ускорением обуславливается и движение самой жидкости; поэтому такого рода случаи имеют в практике лишь ограниченное применение.

а) Равномерно-прямолинейное движение сосуда. Предположим сначала, что сосуд, который опять, в целях приближения исследования к практическим применениям, возьмем в виде канала между лопатками колеса турбины, находится в равномерном и прямолинейном движении. По



Черт. 75.

закону инерции (независимость механических явлений от равномерного движения относительной системы) равномерное движение сосуда не вызывает никаких изменений в явлениях движения, происходящих в сосуде. Так, например, скорость истечения тяжелой жидкости относительно сосуда совершенно не зависит от того, находится ли сосуд в покое или в равномерно-прямолинейном движении. Этого уже, конечно, не будет, если жидкость течет в сосуде, движущемся с ускорением.

Проведя контрольную поверхность, так чтобы она ограничивала массу жидкости, заключенную в сосуде, изображенном на черт. 75, и рассматривая соседнее, несколько смещенное, положение этой массы, мы сумеем пользоваться почти теми же рассуждениями, что и в случае покоящегося сосуда (п. 25). Обозначив через u скорость самого сосуда (переносная скорость, будем предполагать ее горизонтальной), через ω_1 и ω_2 — относитель-

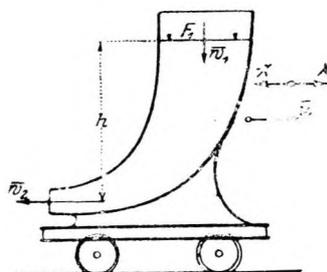
ные скорости жидкости у входа и выхода (т. е. скорости относительно движущегося сосуда), далее, через $c_1 = \overline{w_1} + u$, $c_2 = \overline{w_2} + u$ — абсолютные скорости жидкости у входа и выхода из сосуда, найдем, что за малый промежуток времени Δt у A (входа) исчезает количество движения $\rho Q c_1 \cdot \Delta t$, а у B (выхода) образуется количество движения $\rho Q c_2 \cdot \Delta t$; количество же движения массы жидкости, остающейся внутри сосуда, не изменяется. Пусть скорости c_1 и c_2 наклонены к оси x соответственно под углами α_1 и α_2 , скорости w_1 и w_2 — под углами β_1 и β_2 . Тогда проекции X и Y силы K , с которой жидкость действует на сосуд, будут равны (скорость u , вследствие сокращения, не входит):

$$\overline{K} \left\{ \begin{aligned} X &= \rho Q (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2) = \rho Q (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2) \\ Y &= \rho Q (c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2) = \rho Q (w_1 \sin \beta_1 - w_2 \sin \beta_2) \end{aligned} \right\} \dots (105)$$

Таким образом сила \overline{K} зависит только от приращения абсолютного количества движения за 1 секунду, которое в случае поступательного движения совпадает с приращением относительного количества движения, чего отнюдь не бывает в случае вращающегося сосуда; следовательно, форма лопаток — форма сосуда между входом и выходом струи — не влияет на величину K .

Но зато для движущегося сосуда уже не так просто, как это было при покоящемся сосуде, зная величины и направления c_1 и c_2 или w_1 и w_2 , найти положение силы \overline{K} . Прежде всего оказывается, что направление K зависит от формы лопаток или что то же самое, от абсолютного движения жидкости, протекающей через движущийся сосуд (это движение на черт. 75 отмечено пунктиром). Не будем задерживаться на этом вопросе, так как знание положения силы K оказывается нужным только в очень редких случаях.

Пример 42. Сосуд, изображенный на черт. 72, имеет очень маленькое отверстие f для истечения и очень большую, по сравнению с f , свободную поверхность F , которую во все время рассматриваемого явления предполагаем остающейся на одной и той же высоте. Как велика должна быть горизонтальная скорость u движения сосуда, чтобы мощность горизонтального давления X была наибольшей, и как велико это наибольшее значение.



Черт. 76.

Так как $\beta_1 = \frac{\pi}{r}$, $\beta_2 = 0$, $c_1 \sim 0$, $c_2 = w_2 - u = v - u$,

из равенства (105) получаем:

$$X = \rho Q (v - u);$$

мощность

$$E = Xu = \rho Q (v - u) u.$$

Рассматривая здесь мощность E как функцию от u , находим, что максимальное значение она получает при $u = \frac{v}{2}$; заметив, что $w_2^2 - v^2 = 2gh$, получаем:

$$E_{\max} = \frac{\gamma}{g} Q \frac{v^2}{4} = \frac{1}{2} \gamma Q h = \frac{1}{2} E_a,$$

где через $E_a = \gamma Q h$ обозначена мощность, которую обладает жидкость, заключенная в сосуде (мощность, „находящаяся в распоряжении“, абсолютная мощность).

Соответствующее значение горизонтального давления равно $X = \rho Q \frac{v}{2} = \frac{\gamma}{g} f v \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \gamma f h$, т. е. оно равно статическому давлению на площадку f .

Остающаяся часть абсолютной мощности E_a распределяется следующим образом: половина ее (т. е. $\frac{1}{4} E_a$) переходит в мощность вытекающей струи

$$E_1 = \gamma Q \frac{(v - u)^2}{2g} = \gamma Q \frac{v^2}{8g} = \frac{1}{4} \gamma Q h,$$

а другая половина расходуется на сообщение притекающей в 1 секунду к отверстию f массе жидкости скорости u :

$$E_2 = \gamma Q \frac{u^2}{2g} = \gamma Q \frac{v^2}{8g} = \frac{1}{4} \gamma Q h = E_1.$$

Итак, из всего запаса мощности, которой обладает вода при высоте свободной поверхности над отверстием для истечения h (абсолютная мощность), половина его уходит на преодоления сопротивления X , одна четверть — на сообщение мощности вытекающей струе, и последняя четверть — на сообщение Q , $m^3/сек.$ рабочей воды скорости u .

Разобранный случай является как бы гидравлическим подобием электрической железной дороги, правда, подобием очень неэкономичным. Решим еще следующую задачу. Поместим наш сосуд на тележку, движущуюся по рельсам, и найдем, каков будет расход воды в 1 секунду при скорости движения тележки $u = 1 \text{ м}^3/сек.$ если сопротивление тележки движению равно $X = 100 \text{ кг}$, а имеющийся в распоряжении напор $h = 5 \text{ м}$.

Обозначив, как и прежде, относительную скорость истечения воды из сосуда через v , найдем, что горизонтальное давление $X = \frac{\gamma}{g} Q (V - u)$; отсюда искомый расход воды

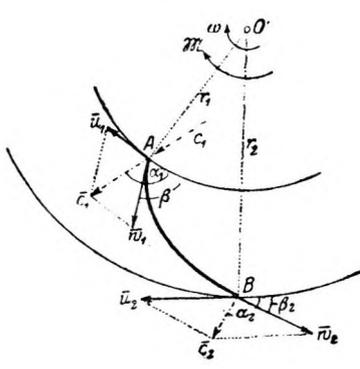
$$Q = \frac{gX}{\gamma(v-u)} = \frac{10 \cdot 100}{1000 \cdot 9} = 0,11 \text{ м}^3/сек. \quad (\text{так как } v = \sqrt{2gh} \cong 10 \text{ м/сек.})$$

К этому же выводу можно прийти путем рассмотрения „распределения мощности“. Действительно, как уже было сказано, имеющаяся в распоряжении мощность (абсолютная) не вся расходуется на преодоление сопротивления движению; часть ее, именно $\gamma Q \frac{u^2}{2g}$, необходимая для сообщения $Q \text{ м}^3$ вытекающей в 1 секунду массе жидкости скорости u , другая часть,

$\gamma Q \frac{(v-u)^2}{2g}$, переходит в мощность вытекающей струи и, наконец, последняя часть расходуется на преодоление сопротивлений; в действительности, полагая $= \frac{v^2}{2g}$ имеем тождественно

$$Xu = \gamma Q h - \gamma Q \frac{u^2}{2g} - \gamma Q \frac{(v-u)^2}{2g} \dots \dots \dots (106)$$

б) Равномерно-вращательное движение сосуда около неподвижной оси. Продолжив соответствующим образом предыдущие исследования, не трудно будет найти выражение и для момента вращения сообщаемого протекающей жидкой струей каналу между лопатками турбинного колеса, вращающегося около O с равномерной угловой скоростью ω .



Черт. 77.

Для этого опять надо записать в виде уравнения, что момент вращения относительно оси O , сообщаемый движущемуся сосуду протекающей через него струей жидкости, равен приращению суммы моментов абсолютных количеств движения относительно оси O за 1 секунду. Рассмотрим кривой канал между лопатками колеса, средняя линия которого изображена на черт. 77 линией AB . За время Δt у A исчезает количество движения $\rho Q c_1 \cdot \Delta t$, а у B — появляется $\rho Q c_2 \cdot \Delta t$. Поэтому приращение суммы моментов абсолютных количеств движения за 1 секунду равно:

$$\mathfrak{M} = \rho Q (r_1 c_1 \cos \alpha_1 - r_2 c_2 \cos \alpha_2) \dots \dots \dots (107)$$

Замечая, что

$$c_1 \cos \alpha_1 = w_1 \cos \beta_1 - u_1 = w_1 \cos \beta_1 - r_1 \omega; \quad c_2 \cos \alpha_2 = w_2 \cos \beta_2 - u_2 = w_2 \cos \beta_2 - r_2 \omega$$

(так как $u_1 = r_1 \omega$, $u_2 = r_2 \omega$), перепишем уравнение (107):

$$\mathfrak{M} = \rho Q [(w_1 \cos \beta_1 - r_1 \omega) r_1 - (w_2 \cos \beta_2 - r_2 \omega) r_2] \dots \dots \dots (108)$$

Величина \mathfrak{M} оказывается зависящей опять-таки только от абсолютных скоростей у входа и выхода из канала; форма же канала не влияет на величину \mathfrak{M} . Равенство (107) известно под названием эйлера турбинного уравнения.

Мощность при вращении с угловой скоростью ω равна

$$E = \mathfrak{M}\omega = \rho Q [\omega_1 u_1 \cos \beta_1 - \omega_2 u_2 \cos \beta_2 - (U_1^2 - U_2^2)] \dots (109)$$

Пример 43. Сегнерово колесо представляет из себя цилиндрический сосуд, могущий вращаться около своей вертикальной оси; в дне его сделано отверстие, к которому приделаны маленькие трубки, изогнутые таким образом, что вода, наполняющая сосуд, может вытекать по этим трубкам только в направлении касательных к окружности радиуса r , концентрической с окружностью основания цилиндра. Пусть поперечные сечения отверстий для истечения у всех трубок равны f , высота жидкости в сосуде (от свободной поверхности до отверстий для истечения) пусть поддерживается на одном и том же уровне, хотя бы путем подливания в цилиндр жидкости из другого сосуда, расположенного над ним. Как велика будет угловая скорость вращения этого колеса, если все сопротивления (сопротивление воздуха и т. п.) эквивалентны моменту вращения \mathfrak{M}_0 .

Обозначим относительную скорость истечения через $v = \sqrt{2gh}$; тогда абсолютная скорость $c = v - r\omega$ и, так как $c_1 = 0$, равенство (107) дает: $\mathfrak{M} = sQr(v - r\omega)$, где перед правой частью надо, собственно говоря, поставить знак минус, чтобы показать, что \mathfrak{M} поддерживает вращение сосуда в направлении ω . Из этого выражения для \mathfrak{M} и вычисляется угловая скорость ω , с какой будет вращаться сегнерово колесо.

Абсолютная мощность опять-таки распределяется так, что часть ее переходит в полезную мощность $\mathfrak{M}\omega$, часть — в мощность $\gamma Q \frac{(v - r\omega)^2}{2g}$ вытекающей воды и, наконец, последняя часть, $\gamma Q \frac{r^2\omega^2}{2g}$, уходит на сообщение притекающей воде скорости $r\omega$. Это распределение мощности записывается в виде уравнения: $\mathfrak{M}\omega = \gamma Q h - \gamma Q \frac{(v - r\omega)^2}{2g} - \gamma Q \frac{r^2\omega^2}{2g}$, которое при подстановке в него вышенайденного значения \mathfrak{M} и $h = \frac{v^2}{2g}$ удовлетворяется тождественно.

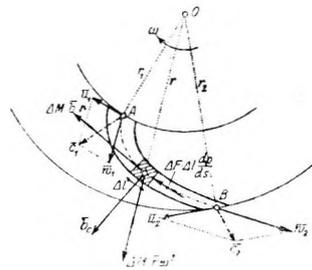
Из этих примеров видно, что выражение для „реакции“ жидкой струи может быть найдено также из уравнения распределения мощности, при чем оба результата вполне эквивалентны друг другу. Таким образом для характеристики жидкой струи необходимо некоторое уравнение, подобно тому, как необходимо уравнение в направлении движения для принужденного движения точки. Только между этими двумя случаями есть разница: в то время, как при движении точки рассматривается уравнение работы (интеграл энергии), при движении жидкой струи приходится рассматривать уравнение, выражающее распределение мощности.

27. Уравнение давления для равномерно - вращающейся жидкой струйки. Уравнение давления Д. Бернулли (47), устанавливающее соотношение между давлением, скоростью и высотой для всех точек идеальной элементарной жидкой струйки, годится не только для покоящейся струйки, но и для находящейся в равномерно - прямолинейном движении (независимость законов механики от поступательного движения относительной системы); однако в приведенной форме (47) это уравнение неприменимо к жидкой струйке, в целом находящейся во вращении. Поэтому важно найти соотношение, соответствующее уравнению (47), между давлением, скоростью и высотой в каждой точке вращающейся жидкой струйки. Вращающаяся жидкая струйка служит отправной точкой для исследования процессов движения в турбинах.

Упростим несколько поставленную задачу тем, что предположим вращение канала между

лопатками равномерным и, кроме того, не будем принимать во внимание влияние высоты (т. е. собственного веса жидкости) и, наконец, будем рассматривать это движение происходящим в горизонтальной плоскости.

Напомним, что уравнение давления есть первый интеграл уравнения (46), которое представляет из себя не что иное как уравнение движения Ньютона для элемента жидкой струйки, при чем, конечно, учтены те особые условия,



Черт. 78.

которым подчиняется рассматриваемый элемент. Таким же путем мы получим и уравнение движения для равномерно-вращающейся жидкой струйки; только на этот раз движение надо будет определять уже для относительной системы, находящейся в равномерно-вращательном движении (относительная система), и уравнение движения элемента составлять для его собственного направления движения в относительной системе.

При составлении уравнения выпишем сначала те силы, которые действуют на элемент струйки и при покоящейся относительной системе (сравни с п. 16); этими силами будут (черт. 78);

- 1) Сила инерции $\Delta M \cdot br$ против направления движения,
- 2) „ давления $\Delta F \cdot \Delta l \frac{dp}{ds}$ „ „ „

(Последняя сила есть сумма давлений, оказываемых на рассматриваемый элемент соседними.)

Затем выпишем силы, возникающие вследствие вращения относительной системы.

3) Центробежная сила: — $b_s = \Delta M \cdot r\omega^2$, направленная наружу.

4) Сила Кориолиса: — $b_c = \Delta M \cdot 2w\omega$, перпендикулярная к w и направленная в сторону, указанную на чертеже.

Согласно принципу Даламбера, все эти 4 силы уравновешивают друг друга. Заметив, что

$$b_r = \frac{dw}{dt} = w \frac{dw}{ds} = \frac{1}{r} \frac{d(w^2)}{ds}, \quad b_r = b_a + b - b_s - b_c,$$

и что проекция силы Кориолиса на направление относительного движения равна нулю, получим следующее уравнение движения (для направления движения элемента):

$$\Delta M \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d(w^2)}{ds} = -\Delta F \cdot \Delta l \cdot \frac{dp}{ds} + \Delta M \cdot r\omega^2 \cdot \cos \varphi, \quad \dots \quad (110)$$

где через φ обозначен угол между w и r .

Заменив $\Delta M = \rho \Delta F \cdot \Delta l$, $\cos \varphi = \frac{dr}{ds}$, преобразуем уравнение (110) в следующее:

$$\frac{1}{2} \frac{d(w^2)}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - \omega^2 \frac{rdr}{ds} = 0 \dots \dots \dots (111)$$

А это есть не что иное, как полная производная по s ; полагая $\rho = \frac{\gamma}{g}$, $r\omega = u$, и интегрируя, получим искомое уравнение давления для равномерно - вращающейся относительной системы:

$$\frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - \frac{u^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{u_1^2}{2g} = \text{const} \dots \dots \dots (112)$$

Индексами „1“ отмечены значения w , p и u , взятые для какого-нибудь определенного поперечного сечения „1“ жидкой струйки. Уравнение (112) показывает, что величины относительной скорости потока w и давления p во вращающейся жидкой струйке зависит от скорости вращения.

Если, например, известны значения w_1 , p_1 и u_1 у начала струйки и p_2 и u_2 — у конца струйки, величину относительной скорости у конца струйки найдем из уравнения:

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{2g} - \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} \dots \dots \dots (113)$$

IV. Давление струи.

28. Предварительные понятия. Давлением струи называют силу, с которою действует на какое-нибудь препятствие свободная струя жидкости. Препятствие это может быть произвольной формы, например,

пластинки, поставленной прямо или косо перед струей. Раньше для этого явления пользовались еще названием „давление удара“, которое, однако, не точно, так как это явление не имеет ничего общего с явлением, называемым в механике ударом.

Давление струи называют прямым, если струя направлена перпендикулярно к пластинке или же по оси симметрии симметричного тела, оказывающего препятствие струе; в противном случае давление струи называют косым. Там, где струя падает на препятствие, она расширяется во все стороны наподобие тарелки; иногда при этом у места встречи струи с препятствием наблюдается более или менее остроконечное кольцеобразное возвышение — прыжок воды, жидкость в котором находится почти в покое. Струя стекает вдоль пластинки совершенно гладко и без заметной потери скорости.

Для вычисления величины давления струи проще всего воспользоваться опять-таки теоремой импульсов, при помощи которой раньше мы определяли давление, оказываемое жидкой струйкой на стенки проводящего ее сосуда.

Теорема гласит: приращение количества движения произвольным образом ограниченной части струи за 1 секунду дает ту силу, с которой эта часть струи действует на отклоняющее ее тело. Так как величина скорости струи и поэтому и поперечное сечение ее остаются почти неизменными, дело сводится только к изменению направления между притекающей и оттекающей струями.

При такого рода вычислениях затруднение может встретиться только в случае препятствия, площадь которого немногим только больше площади сечения струи, что, однако, очень редко случается на практике. В этом случае оказывается известным только направление притекающей струи, но отнюдь не оттекающей, и приходится ограничиваться лишь приближенными указаниями и соотношениями, в то время, как при известности направления оттекающей струи давление ее можно вычислить вполне точно.

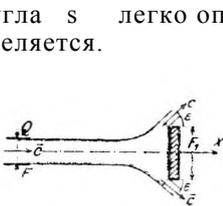
29. Прямое давление струи. А. Неподвижное препятствие.

Пусть c — скорость струи, Q — количество протекающей в единицу времени жидкости и ε — угол, под которым струя оттекает с пластинки. Тогда теорема импульсов для части струи, ограниченной контрольной поверхностью, отмеченной на черт. 79 пунктиром, непосредственно дает силу X , действующую на пластинку перпендикулярно к ней:

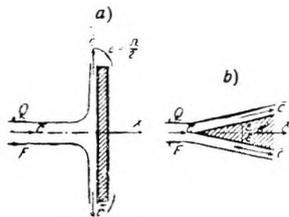
$$X = \rho Qc - \rho Qc \cos \varepsilon \quad \text{или} \quad X = \rho Qc(1 - \cos \varepsilon), \dots \dots \dots (114)$$

при чем значения угла ε в каждом случае зависит от соответствующих условий.

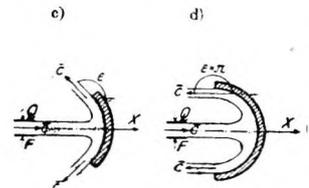
На черт. 80-a-d изображены несколько случаев, для которых величина угла ε легко определяется.



Черт. 79.



Черт. 80.



а) Если пластинка велика по сравнению с диаметром струи (что чаще всего и бывает на практике), например, ее диаметр превосходит диаметр струи по крайней мере в 4 раза (черт. 80-a), то оттекание происходит почти параллельно пластинке, угол $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, и равенство (114) дает:

$$X = \rho Qc \dots \dots \dots (115)$$

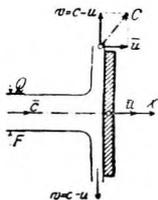
б) Если препятствующее тело имеет форму конуса с угловым отверстием ϵ , то давление струи определяется равенством (114).

с) Если препятствие имеет форму части шара, как на черт. 80-с, то и в этом случае равенство (114) непосредственно дает искомое давление струи. Для случая, изображенного на черт. 80-d, угол $\epsilon = \pi$ и

$$X = 2\rho Qc \dots \dots \dots (116)$$

т. е. в этом случае давление струи в два раза больше, чем при оттекании в перпендикулярном направлении.

Пример 44. Если струя жидкости, вытекающая из сосуда под напором h , встречает пластинку, поставленную перпендикулярно к ее направлению и находящуюся на не слишком большом расстоянии e от отверстия для вытекания (например $e \leq$ двойного диаметра струи), то в этом случае $c = \sqrt{2gh}$ и, согласно равенству (115), давление струи на пластинку равно $X = \frac{\gamma}{g} Qc = \frac{\gamma}{g} F \cdot c \cdot c = 2\gamma Fh$, т. е. оно равно по величине и обратно по направлению горизонтальному давлению, оказываемому вытекающей струей на сосуд [рав. (103)].



Черт. 81.

В. Движущееся препятствие. Давление струи на движущуюся пластинку можно вычислить, если рассматривать это явление по отношению к движущейся пластинке, основываясь на независимости явлений механики от равномерного и прямолинейного движения относительной системы. Относительная скорость притекающей струи к движущейся пластинке равна $w = c - u$, и равенство (114), где $Q = F \cdot c$ (F — поперечное сечение струи), дает для давления струи X выражение:

$$X = \rho Q(c - u) (1 - \cos \epsilon) = \rho Fc(c - u) (1 - \cos \epsilon) \dots \dots \dots (117)$$

В частности, для $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, единственно практически интересного случая,

$$X = \rho Q(c - u) = \rho Fc(c - u) \dots \dots \dots (118)$$

Если пластинка приближается к струе, то, заменив, u через $-u$, получим вместо равенства (118) следующее:

$$X = \rho Q(c + u) \dots \dots \dots (119)$$

Движущиеся пластинки применялись в употреблявшихся ранее ударных турбинах, где действию давления струи подвергались отдельные, пробегавшие мимо струи, лопатки колеса.

Пример 45. Вывод равенства (118) из теоремы энергии. Величину давления струи на движущуюся пластинку можно определить непосредственно, вычисляя разность мощностей притекающей и оттекающей жидкости, так как, согласно предположению, течение происходит без сопротивлений. Мощности притекающей и оттекающей струй соответственно равны $\gamma Q \frac{c^2}{2g}$ и $\gamma Q \frac{C^2}{2g}$, где C есть абсолютная скорость оттекающей вдоль пластинки жидкости. Но C и относительная скорость струи вдоль пластинки $c - u$ связаны между собою соотношением (черт. 81) $C^2 = (c - u)^2 + u^2$. Поэтому у пластинки мощность струи равна:

$$Xu = \gamma Q \frac{c^2}{2g} - \gamma Q \frac{C^2}{2g} = \frac{\gamma Q}{2g} (2cu - 2u^2) = \rho Q(c - u)u;$$

отсюда находим: $X = \rho Q(c - u)$.

Пример 46. Максимальное значение мощности давления струи. Мощность E давления струи (для $\epsilon = \frac{\pi}{2}$) определяется выражением:

$$E = Xu = \rho Q(c - u) \dots \dots \dots (120)$$

Значение u , при котором E получает наибольшее значение, определяется из равенства $\frac{dE}{du} = 0$; следовательно $u = \frac{c}{2}$ и соответствующее значение мощности равно

$$E_{\max} = \frac{1}{4} \rho Qc^2 = \frac{1}{4} \rho Fc^3.$$

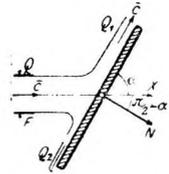
Заметив, что мощность притекающей струи, „абсолютная мощность“, равна

$$E_0 = \gamma Qh = \gamma Fc \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2} \rho Fc^3,$$

получаем для E_{\max} окончательно: $E_{\max} = \frac{1}{2} E_0$.

30. Косое давление струи. А. Неподвижная пластинка. Прежде всего предположим, что величина пластинки велика по сравнению с диаметром струи, так что направление оттекающей струи совпадает с плоскостью пластинки. Угол наклона пластинки пусть равен α .

На пластинку в направлении, параллельном ее плоскости, вследствие отсутствия трения не будет действовать никакое давление, и вся действующая на пластинку сила сведется к нормальному давлению N ; так как притекающая струя соответствует силе ρQc , параллельной направлению струи, то нормальное давление N должно быть равно проекции силы ρQc на нормаль к пластинке (черт. 82):



Черт. 82.

$$N = \rho Qc \sin \alpha = \rho Fc^2 \sin \alpha \dots \dots \dots (121)$$

Проекцию нормального давления N на направление струи называют параллельным давлением X ; оно равно

$$X = N \cos (90 - \alpha) = N \sin \alpha,$$

или

$$X = \rho Qc \sin^2 \alpha = \rho Fc^2 \sin^2 \alpha \dots \dots \dots (122)$$

Пример 47. Количества жидкости, оттекающей в каждую сторону косо поставленной неподвижной пластинки. Количества Q_1 и Q_2 жидкости, оттекающей в каждую сторону пластинки, можно определить на основании условия, что в направлении плоскости пластинки на последнюю не действует никакая сила; следовательно приращение количества движения в направлении пластинки должно быть равно нулю (черт. 82):

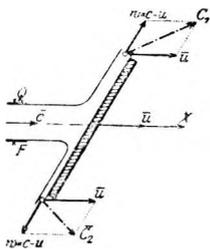
$$Qc \cdot \cos \alpha = Q_1 c - Q_2 c \quad \text{или} \quad Q_1 - Q_2 = Q \cos \alpha;$$

кроме того имеем уравнение неразрывности: $Q_1 + Q_2 = Q$. Из последних двух уравнений следует:

$$Q_1 = Q \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad Q_2 = Q \frac{1 - \cos \alpha}{2} \dots \dots \dots (123)$$

Это вычисление сделано в предположении, что исследуемое явление „плоское“, т. е. оттекающая струя распространяется не во все стороны, а только вверх и вниз в плоскости чертежа. Зная количества жидкости, оттекающей в каждую сторону пластинки, можно найденное раньше значение параллельного давления X получить непосредственно как разность количеств движения в направлении струи:

$$\begin{aligned} X &= \rho Qc - \rho Q_1 c \cos \alpha + \rho Q_2 c \cos \alpha = \rho Qc \left(1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \cos \alpha + \frac{1 - \cos \alpha}{2} \cos \alpha \right) = \\ &= \rho Qc (1 - \cos^2 \alpha) = \rho Qc \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$



Черт. 83.

В. Движущаяся пластинка. Относительная скорость, с которой струя притекает к пластинке, движущейся со скоростью u в направлении струи, равна $w = c + u$; при стекании вдоль пластинки величина этой скорости остается неизменной, меняется лишь направление ее. Опять предположим, что изучаемое явление „плоское“, т. е., что оно протекает одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости чертежа; тогда оттекание воды вдоль пластинки будет происходить только вверх и вниз (черт. 83). Пусть Q_1 и Q_2 — количества жидкости, оттекающей вверх и вниз. Давление струи X определится как разность количеств движения:

$$X = \rho Qc(c - u) - \rho Q_1(c - u) \cos \alpha + \rho Q_2(c - u) \cos \alpha \dots \dots \dots (124)$$

Так как в направлении плоскости пластинки на нее не может действовать никакая сила, то приращение количества движения в этом направлении равно нулю, т. е.

$$\rho Q(c - u) \cos \alpha = \rho Q_1(c - u) - \rho Q(c - u),$$

откуда, принимая во внимание уравнение неразрывности $Q = Q_1 + Q_2$, получим те же самые равенства, что и в примере 47:

$$Q_1 = Q \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad Q_2 = Q \frac{1 - \cos \alpha}{2} \dots \dots \dots (125)$$

Подставив эти значения Q_1 и Q_2 в равенство (124), получим:

$$X = \rho Q(c - u) \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

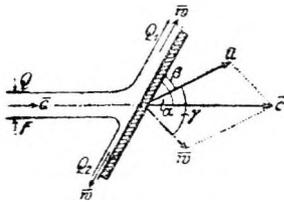
или

$$X = \rho Q(c - u) \sin^2 \alpha \dots \dots \dots (126)$$

Пример 48. Вывод равенства (126) из теоремы энергии. Мощность давления струи X должна быть равна разности мощностей притекающей и оттекающей жидкости. Обозначив через C_1 и C_2 абсолютные скорости оттекающей жидкости у обоих концов пластинки, из черт. 83 найдем следующие соотношения:

$$C_1^2 = (c - u)^2 + u^2 + 2(c - u)u \cos \alpha; \quad C_2^2 = (c - u)^2 + u^2 - 2(c - u)u \cos \alpha;$$

подставив их в равенство $Xu = \gamma Q \frac{c^2}{2g} - \gamma Q_1 \frac{C_1^2}{2g} - \gamma Q_2 \frac{C_2^2}{2g}$ и воспользовавшись равенствами (125), получим: $Xu = \rho Q(c - u)u \sin^2 \alpha$, а отсюда — уже полученное ранее равенство (126).



Черт. 84.

Если, наконец, вектор u скорости пластинки составляет с направлением струи угол β (черт. 84), то тогда относительная скорость струи (относительно пластинки)

$$w = c - u$$

составляет с u определенный угол γ ; с этой же скоростью относительно пластинки происходит оттекание жидкости в обе стороны пластинки. В направлении u давление струи равно

$$X = \rho Q w \cos \gamma - \rho Q_1 w \cos \beta + \rho Q_2 w \cos \beta = \rho w [Q \cos \gamma - (Q_1 - Q_2) \cos \beta] \quad (127)$$

Величины Q_1 и Q_2 в этом случае определяются из условия, что в направлении плоскости пластинки на последнюю не действуют никакие силы, что выражается уравнением $\rho Q w \cos(\beta + \gamma) = \rho Q_1 w - \rho Q_2 w$. Принимая опять во внимание уравнение неразрывности $Q = Q_1 + Q_2$, получим:

$$Q_1 = Q \frac{1 + \cos(\beta + \gamma)}{2}, \quad Q_2 = Q \frac{1 - \cos(\beta + \gamma)}{2} \dots \dots \dots (128)$$

Равенство (127) принимает вид:

$$X = s Q w [\cos \gamma - \cos(\beta + \gamma) \cos \beta] \dots \dots \dots (129)$$

Величина относительной скорости w определяется из скоростного треугольника:

$$w = c \cos(\beta + \gamma - \alpha) - u \cos \gamma \dots \dots \dots (130)$$

Пример 49. Совершенно так же, как и раньше, равенство (129) можно вывести из теоремы энергии.

V. Потери при ударе и смешении.

31. Течения жидкости с потерями энергии и без потерь. До сих пор изучавшиеся нами явления движения жидкости мы рассматривали, как происходящие без потерь энергии. Частичное исключение пришлось сделать при разборе проблемы истечения, когда оказалось необходимым ввести поправочные коэффициенты на вязкость. Перейдем теперь к изучению слу-

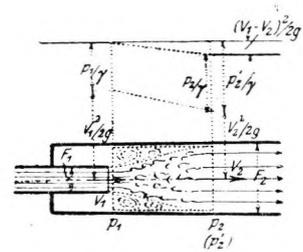
чаев, весьма важных в практическом отношении, когда уже нельзя пренебрегать потерями энергии движущейся жидкости.

При этом отметим еще раз, что при упрощенном представлении движений жидкости, описанных в двух последних главах, дело сводилось к превращению кинетической энергии движущейся жидкости в другую форму ($X \cdot u$), которая могла бы служить для преодоления равного сопротивления; если же учитывать потери энергии, то тогда сопротивление, которое должно быть преодолено, должно быть, конечно, соответственно меньше. То же имеет место и при превращении потенциальной энергии в кинетическую вдоль жидкой струйки, превращении, происходящем сообразно с уравнением Д. Бернулли. Целью дальнейшего изложения является указание методов определения потерь в случаях, встречающихся на практике, так как эти потери — за исключением полезной мощности — требуют непрерывной затраты механической энергии для поддержания рассматриваемого течения жидкости.

Первую группу таких потерь составляют те, которые получаются при явлениях смешения и удара жидкостей. Для вывода формул, определяющих эти потери, можно еще предполагать жидкость идеальной.

Далее же разбираются потери, для определения которых уже необходимо принимать во внимание вязкость жидкости.

32. Внезапное расширение поперечного сечения. При внезапном расширении поперечного сечения проводящего жидкость сосуда (черт. 85) движение жидкости, выходящей из узкой части, перестает быть „упорядоченным“, а именно: на известном протяжении широкой части сосуда образуются неправильные вихри, которые и вызывают потерю энергии. Прежде это явление называли ударом жидкости, так как выражение для происходящей потери одинаково с выражением потери энергии при ударе совершенно неупругих тел. Но по существу это явление имеет с ударом столько же общего, сколько и „давление удара“. Указанное явление, собственно говоря, состоит в смешении и частиц жидкости, обладающих разными скоростями, и поэтому мы будем говорить о потере энергии при смешении или короче — о потере при смешении.



Черт. 85.

Конечно не может быть и речи об изучении явления смешения путем исследования движения отдельных частиц жидкости. Приходится рассматривать все явление в целом, благодаря чему получается только известное приближение к действительности.

Ограничим переходную область широкой части сосуда, где происходит явление смешения, контрольной поверхностью, отмеченной на черт. 85 пунктирной линией, и применим к заключенной внутри этой поверхности массе жидкости опять теорему импульсов. Пусть F_1 и F_2 ($F_1 < F_2$) — поперечные сечения сосуда до и после расширения, V_1 и V_2 ($V_1 > V_2$) — соответственные скорости, p_1 и p_2 ($p_1 < p_2$) — давления на обеих пограничных плоскостях, перпендикулярных к направлению потока. Приращение количества движения за 1 секунду в направлении движения потока равно сумме сил, действующих в этом направлении. Так как в 1 секунду протекает масса жидкости

$$\rho Q = \rho F_1 V_1 = \rho F_2 V_2, \dots \dots \dots (131)$$

то за 1 секунду у пограничной плоскости слева исчезает количество движения $\rho Q V_1$, а у пограничной плоскости справа появляется количество движения $\rho Q V_2$. В направлении потока на массу жидкости, заключенную внутри контрольной поверхности, действует сила, которая может быть принята равной $E_2(p_1 - p_2)$. При этом предположим, что в обоих пограничных сечениях со-

ответствующие давления p_1 и p_2 равны по всему сечению; в действительности этого не наблюдается, так как в углах всегда образуются пространства, заполненные вихрями, которые нарушают правильное распределение давления; поэтому наши выводы будут иметь только приближенный характер. Итак — „приращение количества движения за 1 секунду = силе“ дает уравнение:

$$\rho Q(V_2 - V_1) = F_2(p_1 - p_2),$$

откуда: при внезапном расширении поперечного сечения давление возрастает на величину

$$p_2 - p_1 = \rho V_2(V_1 - V_2) \dots \dots \dots (132)$$

В случае же постепенного расширения потока от поперечного сечения F_1 до F_2 , когда не происходит потери смешения, давление p_2' ($> p_2$) в поперечном сечении F_2 вычисляется из уравнения Д. Бернулли (47), которое при горизонтальном положении жидкой струи представится:

$$\frac{p_2'}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g};$$

отсюда следует:

$$p_2' - p_1 = \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) \dots \dots \dots (133)$$

Вычитая (132) из (133), найдем величину потери давления, происходящей при внезапном расширении:

$$p_2' - p_2 = \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2 - 2V_1V_2 + 2V_2^2)$$

или, выразив давление через высоту водяного столба:

$$h_w = \frac{p_2' - p_2}{\gamma} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2 \cdot \frac{V_2^2}{2g} \dots \dots \dots (134)$$

Потеря мощности, отнесенная к массе жидкости, протекающей в 1 секунду (γQ кг/сек.), равна $\gamma Q h_w$.

Итак, повышение давления, вычисляемое из теоремы импульсов, называется меньшим вычисленного из уравнения Д. Бернулли, т. е. для случая, когда потерь не происходит.

Уравнение (134) можно уточнить, введя поправочный коэффициент α на те явления, которыми мы пренебрегли при выводе его. Тогда высота, соответствующая потере энергии при смешении, выразится формулой:

$$h_w = \alpha \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}, \dots \dots \dots (135)$$

при чем $\alpha =$ от 1,1 до 1,2.

33. Распространение уравнения Бернулли на течения жидкости с потерями. Высоту, соответствующую потере, возникающей при внезапном расширении поперечного сечения сосуда, по которому жидкость протекает, и определяемую равенством (134), можно ввести в уравнение Д. Бернулли (47) на основании следующих соображений (подобными же соображениями мы воспользуемся впоследствии и для случаев потерь другого рода).

В уравнении Бернулли (47) каждый член обладает свойствами скаляра, т. е. величины, входящие в это уравнение, принадлежат только отдельным, последовательным точкам жидкой струйки. Принимая во внимание потерю энергии на смешение, необходимо соответствующим образом отметить, что полная энергия, которой жидкость обладает у входа в жидкую струйку или у свободной поверхности, у выхода оказывается уже меньшей, так как часть ее израсходовалась на трение. Таким образом получается уравнение, которое уже не будет интегралом уравнения движения, но тем не менее оно является необходимым вспомогательным средством для облегчения трудно выполнимых в противном случае вычислений.

Пример 50. Скорость истечения из сосуда с внезапным расширением поперечного сечения. Применение только что приведенных рассуждений к случаю истечения жидкости из сосуда с внезапным расширением поперечного сечения в месте „1“ (черт. 86) приводит непосредственно к уравнению:

$$\frac{V_0^2}{2g} + h = \frac{V^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \dots \dots \dots (136)$$

или

$$V^2 + (V_1 - V_2)^2 - V_0^2 = 2gh.$$

Присоединяя уравнение неразрывности, которое при принятии во внимание сжатия струи может быть записано в форме: $Q = F_0 V_0 = \alpha_1 F_1 V_1 = F_2 V_2 = \alpha f V$, найдем скорость истечения

$$V = \psi \sqrt{\frac{2gh}{1 + \alpha^2 f^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha_1 f_1} - \frac{1}{F_2} \right)^2 - \frac{1}{F_0^2} \right]}} \dots \dots \dots (137)$$

где множитель ψ введен для поправки на вязкость

При истечении из сосуда с вертикальной насадкой формы, изображенной на черт. 87, равенство (137) обращается в следующее:

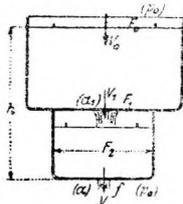
$$V = \psi \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2}}$$

(так как $\frac{1}{F_0} \sim 0, F_1 = F_2 = f, \alpha = 1$).

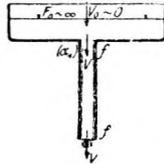
В частности при $\psi = 0,97, \alpha = 0,64$

$$V = 0,84 \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (139)$$

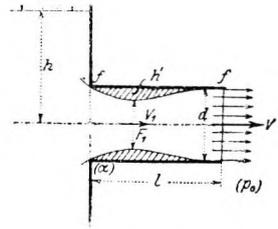
Для уяснения этого результата приведем еще следующий пример.



Черт. 86.



Черт. 87.



Черт. 88.

Пример 51. Истечение через боковую цилиндрическую насадку. При истечении через боковую остроконечную насадку (черт. 88) струя сначала сжимается, а потом вновь расширяется до полного поперечного сечения насадки, если только последняя не слишком коротка ($\frac{l}{d} \geq 2$). Вследствие этого перехода струи от сжатого сечения к полному происходит потеря энергии на внутреннее трение, влияющая на скорость истечения. Дополненное

уравнение Бернулли для этого случая представится: $\frac{V_0^2}{2g} + h = \frac{V^2}{2g} + h_w = \frac{V^2}{2g} + \frac{(V_1 - V)^2}{2g}$

или

$$V^2 + (V_1 - V)^2 - V_0^2 = 2gh. \dots \dots \dots (140)$$

Если опять $V_0 \sim 0, V_1 = \frac{V}{\alpha}, \alpha = 0,64$, то, как и прежде,

$$V = \psi \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2}} = 0,84 \cdot \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (141)$$

Расход жидкости

$$Q = f V = 0,84 f \cdot \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (142)$$

в то время как при отсутствии насадки он был бы равен

$$Q' = \alpha f V = 0,62 f \cdot \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (143)$$

Причина этого увеличения расхода кроется в том, что на месте наибольшего сжатия давление меньше атмосферного p_0 , так как скорость сжатой струи больше скорости V у выхода из насадки, следовательно между соответствующими давлениями p и p_0 должно быть

обратное соотношение: $p < p_0$ — и это разрежение, оказывая в са с а в а ю щ е е д е й с т в и е , увеличивает действительный напор жидкости на h' (высота, соответствующая разности давлений $p_0 - p$). Дальность полета струи при истечении через насадку уменьшается.

Возможность увеличения расхода воды путем присоединения насадок была уже известна древним египтянам, употреблявшим эти насадки для получения большего количества воды из нильских водопроводов.

34. Коэффициенты расхода для цилиндрических насадок. а) Приводим таблицу коэффициентов расхода μ , найденных опытным путем, для различных значений отношения $\frac{l}{d}$ (черт. 88) при совершенном сжатии струи.

$\frac{l}{d} =$	1	2—3	12	24	36	48	60
$\mu =$	0,62	0,82	0,77	0,73	0,68	0,63	0,60

Из этой таблицы видно, что для $\frac{l}{d} \leq 1$ истечение происходит так, как если бы цилиндрической насадки не было вовсе.

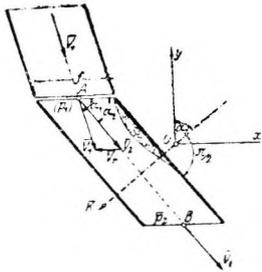
б) Несовершенное сжатие струи наступает в том случае, когда сечение сосуда F_0 в непосредственной близости от места присоединения насадки невелико по сравнению с поперечным сечением самой насадки $F = \frac{d^2\pi}{4}$. Если положить $\frac{F}{F_0} = n$ (< 1), то по Вейсбаху коэффициент истечения

$$\mu_1 = \mu [1 + 0,102n + 0,067n^2 + 0,046n^3], \dots \dots \dots (144)$$

где для μ следует брать значения из вышеприведенной таблицы. Несовершенное сжатие, естественно, влечет за собою увеличение коэффициента истечения.

в) При косо-поставленной насадке коэффициент истечения уменьшается. Если δ есть угол между осью насадки и нормалью к стенке сосуда, то для $\frac{l}{d} =$ от 2 до 3

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,303 \sin^2 \delta + 0,226 \sin^4 \delta}} \dots \dots \dots (145)$$



Черт. 89.

35. Потеря на смешение при внезапном изменении направления струи. Если относительная скорость падения воды на рабочее колесо турбины направлена не тангенциально к лопаткам колеса, то при этом происходит потеря энергии, называемая потерей на удар, которую правильнее было бы называть потерей на смешение, так как при этом происходит смешение частиц жидкости с различно направленными скоростями. Эту потерю можно вычислить приблизительно тем же путем, каким была вычислена потеря при внезапном расширении поперечного сечения.

Остановимся на простейшем случае задачи этого рода, когда канал между лопатками колеса ограничен двумя параллельными стенками и, кроме того, этот канал неподвижен (черт. 89). Поперечное сечение канала у входа пусть равно f , скорость притекания воды — V_1 , а скорость вытекания уже после достижения вновь упорядоченного состояния движения — V_2 . Если углы векторов V_1 и V_2 с горизонтальной осью равны соответственно α_1 и α_2 , то условие неразрывности потока представится: $Q = fV_1 \sin \alpha_1 = fV_2 \sin \alpha_2$ или

$$V_1 \sin \alpha_1 = V_2 \sin \alpha_2, \dots \dots \dots (146)$$

а это значит, что относительная скорость $V = V_1 - V_2$ параллельна плоскости сечения f . Струя воды после попадания в канал между лопатками

принимает приблизительно состояние, указанное на чертеже. У правой стенки образуется область, заполненная неправильными вихрями, при чем проследить движение этих вихрей в отдельности представляется весьма трудным.

Пусть давления при входе и выходе из канала равны p_1 и p_2 ; тогда дополненное уравнение Бернулли представится: $\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_w$, откуда:

$$h_w = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \dots \dots \dots (147)$$

Силы, действующие на находящуюся в рабочем колесе массу жидкости в горизонтальном и вертикальном направлениях, согласно равенству (101) равны (так как $V_1 \sin \alpha_1 - V_2 \sin \alpha_2 = 0$):

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho Q (V_2 \cos \alpha_2 - V_1 \cos \alpha_1) \\ Y &= f(p_2 - p_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (148)$$

Так как рассматриваемый поток состоит из идеальной жидкости, сила, действующая на канал между лопатками, может быть только перпендикулярна к направлению канала, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{X}{Y}; \text{ отсюда } Y = -X \operatorname{ctg} \alpha_2 = -\rho Q \operatorname{ctg} \alpha_2 (V_2 \cos \alpha_2 - V_1 \cos \alpha_1).$$

Присоединяя еще написанное выше уравнение неразрывности $Q = f V_1 \sin \alpha_1$, получим: $\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = -\frac{Y}{f} = \frac{\rho Q}{f} \operatorname{ctg} \alpha_2 (V_2 \cos \alpha_2 - V_1 \cos \alpha_1)$. Подставим это значение $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ в равенство (147):

$$\begin{aligned} h_w &= \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}\right) + \frac{V_1^2}{g} \sin \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} - \cos \alpha_1\right) = \\ &= \frac{V_1^2}{2g} \cdot \frac{\sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2 \alpha_2}. \end{aligned}$$

Заметив еще из скоростного треугольника, что

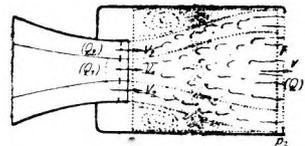
$$V_r : V_1 = \sin (\alpha_1 - \alpha_2) : \sin \alpha_2,$$

получим окончательно:

$$h_w = \frac{V_v^2}{2g} \dots \dots \dots (149)$$

т. е. „высота потери при ударе“, h_w равна высоте, соответствующей относительной скорости. В практике турбиностроения этой формулой пользуются для вычисления потери на удар у входа в канал между лопатками даже в тех случаях, когда не выполняются упрощенные, „идеальные“, условия, которые мы здесь ввели.

36. Потеря энергии при смешении нескольких струй определяется тем же способом, как и в случае внезапного расширения поперечного сечения одной струи. Сравниваем повышение давления, получающееся из теоремы импульсов, с повышением давления, получающимся из уравнения Бернулли. Их разность дает потерю давления при смешении. Таким путем удастся получить выражение (приближенное) для потери смешения, не производя исследований весьма сложных отдельных деталей этого явления, что, впрочем, совершенно невозможно сделать. Так как здесь приходится иметь дело со смешением нескольких струй с различными расходами, то уже нельзя относить потерю к единице веса; ее надо выразить через расходы жидкости отдельных струй. Ограничимся рассмотрением случая только двух струй с расходами Q_1 и Q_2 ; обобщение результата на случай многих струй не представляет никакого затруднения.



Черт 90

Ограничим переходную область, в которой происходит смешение, как и раньше, контрольной поверхностью. Скорость струй, с которыми они вступают в переходную область, пусть будут V_1 и V_2 , скорость же после смешения — V . Струи могут вытекать в переходную область или по двум концентрическим трубам (черт. 90) или же разделенные друг от друга одной перегородкой. Чтобы по-прежнему применить теорему импульсов, предположим, что давления распределяются по всему поперечному сечению равномерно, так что разность давлений у левой пограничной плоскости контрольной поверхности, куда притекают две струи, выравнивается почти мгновенно; пусть до смешения давление там равно p_1 а после смешения — p_2 . Тогда теорема импульсов для общего направления обеих струй даст уравнение:

$$\rho(Q_1 + Q_2)V - \rho Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2 = F(p_1 - p_2)$$

или

$$F(p_2 - p_1) = \rho [Q_1(V_1 - V) + Q_2(V_2 - V)] \dots \dots \dots (150)$$

Если при расширении не происходило потери энергии, то давление p_2' ($> p_2$) у правой стенки контрольной поверхности определилось бы из уравнения Бернулли, взятого для обеих струй:

$$(Q_1 + Q_2)(p_2' - p_1) = \frac{1}{2} \rho Q_1 (V_1^2 - V^2) + \frac{1}{2} \rho Q_2 (V_2^2 - V^2) \dots (151)$$

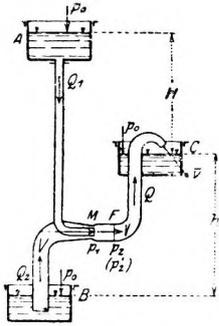
Поэтому общая потеря мощности \mathfrak{B} кгм/сек., т. е. потеря работы в 1 секунду, равна:

$$\mathfrak{B} = \gamma (Q_1 + Q_2) \cdot \frac{p_2' - p_2}{\gamma} = (Q_1 + Q_2) (p_2' - p_2);$$

умножая уравнение (150) на V , вычитая результат из уравнения (151) и заметив, что $FV = Q_1 + Q_2$, получим окончательно:

$$\mathfrak{B} = \gamma Q_1 \frac{(V_1 - V)^2}{2g} + \gamma Q_2 \frac{(V_2 - V)^2}{2g} \dots \dots \dots (152)$$

Потеря мощности, происходящая при смешении двух или нескольких струй, равна сумме потерь мощностей отдельных струй при переходе каждой из них от своей скорости к общей скорости V .



Черт. 91.

Пример 52. В водоструйных насосах (черт. 91) пониженным давлением, которое появляется в них на месте сильного сужения трубы, пользуются для высасывания жидкости из сосуда B и поднятия ее в другой сосуд C . Действие этого насоса происходит так: вода, текущая, из сосуда A , смешивается в пространстве M с водой из сосуда B и увлекает ее в C . Такая конструкция, как нетрудно догадаться, крайне неэкономна, но в некоторых случаях ею все таки имеет смысл пользоваться, например для выкачивания воды из ям для кладки фундамента, когда рабочая вода находится высоко над ямой. Абсолютная мощность γQH находящейся в распоряжении рабочей воды расходуется на поднятие веса воды γQ_2 на высоту h , образование кинетической энергии $\frac{\gamma Q V^2}{2g}$ воды, вытекающей в C , и на покрытие потерь, из которых в этом случае, конечно, следует учесть потери на удар согласно уравнению (152). Итак имеем:

$$\gamma Q_1 H = \gamma Q_2 h + \gamma Q \frac{V^2}{2g} + \gamma Q_1 \frac{(V_1 - V)^2}{2g} + \gamma Q_2 \frac{(V_2 - V)^2}{2g} + (\text{потери на трение}) \dots (153)$$

Отсюда можно вывести соотношение между количеством Q_1 расходуемой рабочей воды и количеством Q_2 подымаемой воды. Гидравлическим полезным коэффициентом η называют отношение

$$\eta = \frac{\text{полезная мощность}}{\text{затраченная мощность}} = \frac{Q_2 h}{Q_1 H} \dots \dots \dots (154)$$

Коэффициент полезного действия описанного насоса очень мал, так как при подобном устройстве Q_1 всегда во много раз больше Q_2 .

Пневматическими насосами (в C нагнетательное действие, в B — всасывание) называются насосы, в которых подымаемой жидкостью является воздух. И они замечательны тем, что не имеют подвижных частей (кроме движущейся воды). Коэффициент полезного действия их тоже очень мал. Инжекторы для питания паровых котлов устроены подобным же обра-

зом, но для объяснения их действия уже нельзя основываться на свойствах несжимаемой жидкости (реальной), так как приходится принимать во внимание понижение давления при внезапном охлаждении пара.

Явления смешения, подобные описанным, встречаются в технике очень часто, например: при разбрызгивании в карбюраторах двигателей внутреннего сгорания и во многих других случаях.

VI. Ламинарные и турбулентные потоки.

37. Влияние вязкости жидкости. В п. 16 было выведено уравнение движения Лагранжа-Эйлера в предположении, что единственными на поверхность каждой частицы силами являются силы давления, направленные перпендикулярно к поверхности частицы. Для установившегося движения в жидкой струйке оно имело вид:

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{dV}{ds} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - \frac{dz}{ds} \dots \dots \dots (155)$$

Кроме того, имелось еще уравнение неразрывности

$$FV = \text{const} \dots \dots \dots (156)$$

Что касается скорости V , то до сих пор мы всегда принимали ее или постоянной для каждого сечения Q жидкой струйки или же брали вместо нее среднюю скорость частиц, протекавших через рассматриваемое сечение. Сказать что-нибудь о распределении скоростей по сечению Q только на основании этого уравнения, не вводя новых вспомогательных предложений, — нельзя. Убедиться в этом проще всего следующим образом. Возьмем горизонтальный отрезок прямой цилиндрической жидкой струйки и разделим ее произвольным образом на ряд более элементарных струек, опять-таки ограниченных линиями тока. К каждой такой струйке применимо уравнение (155), и каждое такое уравнение удовлетворяется при подстановке $p = \text{const}$, $z = \text{const}$, $V = \text{const}$. Однако это ничего не говорит нам об отдельных значениях этих постоянных в каждой из элементарных струек и об их связи друг с другом, так что можно допустить произвольное (даже и не непрерывное) распределение скоростей по сечению. Ведь вследствие отсутствия сил, направленных тангенциально к жидким струйкам, не может быть и речи о взаимодействии этих струек. Подобное рассуждение применимо и для жидких струек, искривленных произвольным образом.

Из того, что уравнение (155) удовлетворяется подстановкой значений $p = \text{const}$, $z = \text{const}$, $V = \text{const}$, еще следует, что для поддержания установившегося горизонтального потока не требуется расхода энергии.

Однако, наблюдения над потоками обнаруживают, прежде всего, следующие два явления:

1. Неравномерное распределение скоростей по поперечному сечению, а именно: в цилиндрических трубах наибольшую скорость имеют частицы, протекающие в середине трубы; отсюда, по направлению к стенкам, скорость постепенно уменьшается и у самых стенок делается равной нулю—жидкость здесь как бы прилипает к стенкам.

2. Наличие потери энергии во всяких потоках.

Уравнения (155) отнюдь недостаточно для объяснения этих двух фактов. Необходимо поэтому заменить его другим отвечающим действительному, а не идеализированному течению жидкости.

Совершенно ясно, что объяснением вышеуказанных явлений должно служить внутреннее трение жидкости (вязкость ее) в соединении с шероховатостью стенок трубы. В дальнейшем выяснится, что вязкость является также причиной необходимости затраты работы для поддержания установившегося движения реальной жидкости в трубе или канале. Главнейшей задачей последующих рассуждений будет выявление свойств движения жидкости при наличии вязкости и, в частности, определение

величины той работы, которую необходимо затрачивать на поддержание этого движения.

Приступая к исследованию движения жидкости в трубах или каналах, необходимо отметить обстоятельство особой важности (между прочим, известное уже давно): наблюдения показывают существование двух видов движения жидкостей, которые существенным образом отличаются друг от друга своим внешним видом — прежде всего расположением линий тока, а также механическими законами, которым они подчиняются.

Движения бывают а) ламинарные и б) турбулентные.

Что касается внешнего вида этих движений жидкости, то в ламинарных потоках частицы жидкости движутся по направленным, упорядоченным траекториям так же как и в идеальной жидкой струйке; в турбулентных же потоках эта правильность сменяется, часто почти по всему поперечному сечению, беспорядочными вихревыми движениями жидких частиц.

В качестве критерия, правда, приближенного и пока весьма неопределенного, позволяющего сказать, когда будет происходить тот или другой род движения, можно воспользоваться следующим важным фактом; ламинарные потоки наблюдаются при малых скоростях и малых размерах труб и каналов; турбулентные же — при больших скоростях и больших размерах. Впервые на видимое различие этих потоков указали в 1837 году Р о н с е л е т и Н а г е н . Но только в 1877 году благодаря О. Р е у н о л д с у стало известно, что для образования того или иного вида потока решающими условиями являются величины размеров потока и скоростей, плотности и вязкости жидкости (при вполне совпадающих прочих условиях).

Рейнольдс заставлял протекать воду в стеклянных трубах и наблюдал (вводя в воду красящие вещества), что ламинарные потоки становились турбулентными, как только скорость воды переходила известный предел; чем большей бралась труба, тем меньшей оказывалась та критическая скорость, при которой поток делался турбулентным. Он нашел, что имеется определенная числовая граница между обоими состояниями потока; эту границу Рейнольдс полагал абсолютной. Но теперь мы знаем, что эта граница определяется простым законом, но только для геометрически подобных потоков, в частности, для потоков с одинаковым способом вхождения жидкости в трубу и одинаковой шероховатостью стенок трубы; для различно же протекающих потоков и различных степеней шероховатости стенок она может принимать всевозможные значения. При тщательном предохранении трубы от сотрясений удастся сохранить поток ламинарным и при скоростях, далеко превосходящих эту предельную.

Итак, перед нами следующая важная задача: найти, чем характеризуются оба вида потоков и какие для них существуют законы.

38. Ламинарные потоки. Величина вязкости. Ламинарное движение жидкости можно рассматривать, как происходящее в отдельных, совершенно разделенных друг от друга слоях, которые друг с другом не смешиваются и не пересекаются. Значит, для таких потоков отличительным признаком является правильное, упорядоченное расположение линий тока — „упорядоченная картина потока“.

Примерами таких течений могут служить: струя, вытекающая из небольшого отверстия в сосуде, переливание воды через плотину при небольшой высоте водослива и т. п.; в этих случаях упорядоченное расположение линий тока замечается непосредственным наблюдением: текущая жидкость представляется как бы непрерывным покоящимся телом.

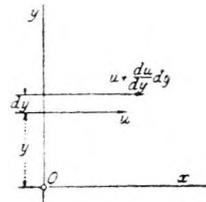
Если в такого рода случаях можно считать картину течения заранее известной, точнее говоря, считать известным расположение линий тока, и кроме того, рассматривать течение как неизменяющееся, то, установив закон о трении жидкости, проявляющемся при скольжении относительно друг друга двух каких-нибудь слоев ее, можно получить соответ-

ствующие выражения для распределения скоростей по поперечному сечению и потери энергии, происходящей при движении.

Для внутреннего трения жидкости еще раз подчеркиваем: только при ламинарном движении — существует следующий элементарный закон, являющийся полной противоположностью закону трения между двумя твердыми телами.

Трением между двумя скользящими друг по другу слоями жидкости называется сила, действующая в направлении скольжения, относимая к единице поверхности и выражающая срезающее усилие τ кг/см²; она пропорциональна падению скорости между обоими слоями, зависит от свойств жидкости (вязкости), но совершенно не зависит от давления жидкости в рассматриваемом месте.

Это срезающее усилие влияет на оба соседние слоя по закону равенства действия и противодействия: оно стремится замедлить движение более быстро двигающегося слоя и, наоборот, ускорить движение более медленно двигающегося слоя и, таким образом, привести к выравниванию, равновесию между силами инерции с одной стороны и силами трения—с другой.



Черт. 92.

Если ламинарное течение происходит, например, параллельно оси x , как это изображено на черт. 92, и u есть скорость частицы, находящейся на расстоянии y от O , то падение скорости, т. е. изменение скорости на единицу длины между двумя соседними слоями (относительная скорость равно): — $\frac{du}{dy}$. Согласно вышеприведенному определению сила трения равна

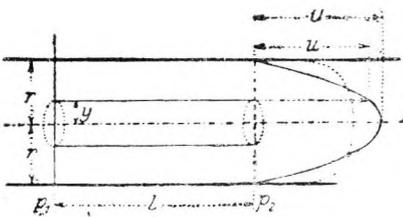
$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \dots \dots \dots (157)$$

В этом равенстве величина η называется динамическим коэффициентом вязкости; для каждой жидкости η имеет определенное значение. Размерность

$$[\eta] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{du}{dy}\right]} = \frac{\left[\frac{K}{L^2}\right]}{\left[\frac{1}{T}\right]} = \left[\frac{KT}{L^2}\right] \dots \dots \dots (158)$$

Под влиянием срезающего усилия τ частица жидкости, имеющая первоначально форму прямоугольного параллелепипеда, сдвигается таким образом, что становится косоугольным параллелепипедом, чего отнюдь не бывает в идеальной жидкости. Эта деформация жидких частиц, проявляющаяся в изменении углов параллелепипеда, принимаемого за форму жидкой частицы, является характерным признаком для движения вязкой жидкости.

39. Закон Poiseuille'я. Равенством (157) можно воспользоваться для определения влияния, оказываемого внутренним трением жидкости на распределение скоростей по поперечному сечению в том случае, когда заранее известна картина упорядоченного потока; одновременно определится и величина потери энергии в этом потоке. В технической практике поперечные сечения чаще всего берутся круглыми. Формулы для распределения скоростей и потери энергии и были выведены сначала для круглого сечения, при чем обнаружилось полное соответствие с опытными данными, полученными



Черт. 93.

Пуазейлем еще задолго (в 1867 г.) до теоретического вывода.

Так как давления p_1 и p_2 в обоих поперечных сечениях „1“ и „2“ круглой трубы (черт. 98) можно принять распределенными равномерно, то сила, действующая в направлении движения на цилиндр с радиусом основания y , равна $\pi y^2 (p_1 - p_2)$. Боковая поверхность этого цилиндра равна $2\pi y l$ (расстояние между сечениями „1“ и „2“ равно l). Под действием только что упомянутой силы этот цилиндр смещается относительно другого цилиндра, его облегающего, и поэтому его боковая поверхность испытывает срезающее усилие

$$\tau = \frac{\text{сила}}{\text{поверхность}} = \frac{(p_1 - p_2)\pi y^2}{2\pi y l} = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{y}{2}.$$

Пользуясь равенством (157) получим следующее дифференциальное уравнение для определения функции $u = u(y)$:

$$\tau = -\chi \frac{du}{dy} = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{y}{2}.$$

Постоянная, получающаяся при интегрировании этого уравнения, определяется условием, что у стенок трубы жидкость прилипает к ним; следовательно, при $y = r$ и $u = 0$; в результате интегрирования получаем:

$$u = u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\chi l} (r^2 - y^2) \dots \dots \dots (159)$$

Таким образом, распределение скоростей при ламинарном движении ж круглой трубе совершается по закону параболы: в каждой меридианальной плоскости скорость является функцией расстояния r рассматриваемой точки от оси трубы, и само распределение скоростей графически представляется параболой, изображенной на черт. 93.

Введем обозначения:

$$\frac{p_1 - p_2}{l\gamma} = I \text{ — уклон (падение напора на 1 м длины).}$$

$$\nu = \frac{\chi g}{\gamma} = \frac{\chi}{\rho} \text{ — кинематический коэффициент вязкости.}$$

Введение последнего термина оправдывается тем, что в размерность ν „сила“ не входит; действительно:

$$[\nu] = \frac{[\chi]}{[\rho]} = \frac{[\chi]}{[\gamma]} \frac{[g]}{[l]} = \frac{\left[\frac{KT}{L^2} \right] \left[\frac{l}{T^2} \right]}{\left[\frac{K}{L^3} \right]} = \left[\frac{L^2}{T} \right] \dots \dots \dots (160)$$

Уравнение (159) принимает теперь форму: $u = \frac{I g}{4\nu} (r^2 - y^2) \dots \dots (161)$

Вместо u гораздо удобнее пользоваться другими, производными, величинами, имеющими непосредственное практическое значение: количеством протекающей жидкости (расходом) Q м³/сек. или же средней скоростью $V = \frac{Q}{\pi r^2}$. Так как через пространство между двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами оснований y и $y + dy$ в 1 секунду протекает количество жидкости $dQ = u \cdot 2y \cdot dy = \frac{I g \pi}{2\nu} (r^2 - y^2) y dy$, то через всю трубу протекает количество жидкости

$$Q = \frac{\pi g}{\gamma} \cdot \frac{I r^4}{\nu} \dots \dots \dots (162)$$

и средняя скорость равна

$$V = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{g}{8} \cdot \frac{I r^2}{\nu}; \dots \dots \dots (163)$$

следовательно, $V = \frac{u_{\max}}{2}$; обратно отсюда следует, что для поддержания рассматриваемого течения необходим уклон

$$I = \frac{p_1 - p_2}{\gamma l} = \frac{8}{g} \cdot \frac{\nu V}{r^2} = \frac{32}{g} \cdot \frac{\nu V}{D^2} \dots \dots \dots (164)$$

($D = 2r$).

Значит, потеря напора на единицу длины, происходящая при ламинарном течении в трубе с диаметром D со скоростью V прямо пропорциональна скорости V и вязкости ν и обратно пропорциональна квадрату диаметра трубы (или площади ее поперечного сечения).

Вывод сделанный из уравнения (164), известен под названием Poiseuille'a, который, как уже было сказано, полностью подтверждается опытными наблюдениями, если только рассматриваемое течение ламинарное.

Заметим, что в приведенных рассуждениях мы не вводили в рассмотрение напора, требуемого для поддержания скорости отдельных частиц.

40. Числовые значения кинематического коэффициента вязкости $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

Вода	при 0°	$\nu = 0,0178$ см ² /сек.
"	10°	" = 0,0133 "
"	20°	" = 0,0100 "
"	50°	" = 0,0056 "
"	100°	" = 0,0030 "
Оливковое масло	20°	" = 2,56 "
"	50°	" = 1,78 "
Цилиндровое масло для двигателей внутреннего сгорания (Deutzer Motoröl)	20°	" = 3,82 "
	50°	" = 0,60 "
	100°	" = 0,10 "
Воздух	0° и 760 мм	" = 0,145 "
	100° " 760 "	" = 0,271 "
	0° " 76 "	" = 13,3 "

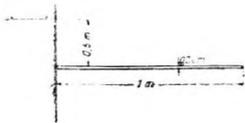
Poiseuille дает следующую формулу зависимости кинематического коэффициента вязкости воды от температуры

$$\nu \text{ [см}^2\text{/сек.]} = \frac{0,0178}{1 + 0,0337 T + 0,00022 T^2} \dots \dots \dots (165)$$

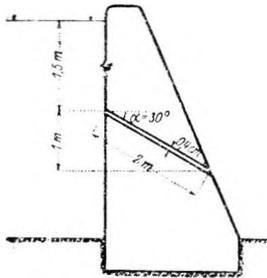
Пример 53. С какой скоростью вытекает вода при 10° С из трубы длиной в 1 м (черт. 94), если разность давлений у входа в трубу и выхода из нее равна 0,5 м.

По формуле (163) $V = \frac{g}{8} \cdot \frac{I r^2}{\nu} = \frac{981}{8} \cdot \frac{0,5}{1} \cdot \frac{0,01}{0,0133} = 46,2 \text{ см/сек.} = 0,462 \text{ м/сек.}$

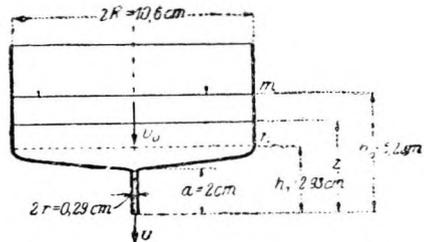
Пример 54. В подпорной стенке плотины на глубине $h = 1,5$ м под уровнем воды сделано отверстие в виде трубы с диаметром $D = 0,4$ см и длиной $l =$ м, наклоненной к горизонтальной плоскости под углом в 30°. Определить скорость истечения из этого отверстия и расход воды за 1 день, если температура воды равна 10°С.



Черт. 94.



Черт. 95.



Черт. 96.

В формулу (163) следует подставить $I = \frac{h + l \sin \alpha}{l} = \frac{1,3 + 2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 1,25$; поэтому скорость равна $V = \frac{g}{8} \cdot \frac{I r^2}{\nu} = \frac{981}{8} \cdot \frac{1,25 \cdot 0,04}{0,0133} = 462 \text{ см/сек.} = 4,62 \text{ м/сек.}$, а расход в 1 секунду $Q = V r^2 \pi = 462 \cdot 0,04 \pi = 58,1 \text{ см}^3\text{/сек.}$ Расход же за день будет равен $58,1 \cdot \frac{86400}{1000} = 5020 \text{ л}$ или 5 м^3 . В этих примерах скорости V оказались сравнительно незначительными; это показывает, что, действительно, следовало применять формулы для ламинарных потоков.

Пример 55. Для определения вязкости смазочных веществ чаще всего употребляется прибор Энглера, весьма удобный при обращении, а потому и принятый в технической практике. Он состоит из цилиндрического сосуда A (черт. 96) со сферическим дном, в середине которого приделана узкая трубка для вытекания с диаметром $2r = 0,29$ см: ее можно запирать краном. Сосуд A наполняется исследуемой жидкостью до определенной высоты: затем открывают кран и дают жидкости опуститься до другой определенной (отмеченной) высоты, в результате чего вытекает 200 см³ жидкости. Наблюдают время T , в течение которого жидкость вытекала. Это время, очевидно, и дает непосредственно меру вязкости. Если при таком же опыте с водой при 20°C время истечения обозначить через T_0 , то отношение

$$E = \frac{T}{T_0} \dots \dots \dots (166)$$

называют величиною вязкости испытуемого смазочного масла по шкале Энглера. Остальные размеры прибора следующие: $R = 5,3$ см, $h_0 = 5,2$ см, $h_1 = 2,93$ см, $a = 2$ см. Сосуд A можно помешать в водяную баню и таким путем измерять вязкость смазочных масел при различных температурах.

Задачей теории является определение зависимости времени истечения T и числа E от коэффициента вязкости ν и, по возможности, определение обратной зависимости — вязкости ν от наблюдаемых значений T .

Чтобы в узкой выводной трубке на самом деле происходило ламинарное течение, необходимо как следует закруглить ее входное отверстие, чтобы там не наступало сжатия или каких-нибудь других препятствий. Если из-за потерь на трение принять во внимание только те, которые происходят внутри узкой трубки, а не внутри самого сосуда, а также пренебречь пьезометрической высотой, необходимой для получения вытекающей жидкостью скорости V , дополненное уравнение Д. Бернулли представится в форме $\frac{V_0^2}{2g} + z = \frac{V^2}{2g} + h_w$; член $\frac{V_0^2}{2g}$ можно отбросить вследствие его малости; высота же сопротивления h_w , возникающего вследствие трения (вязкости) жидкости в узкой трубке (длина ее = a), согласно формуле (164), равна:

$$h_w = aI = \frac{8\nu a}{gr^2} \cdot V.$$

Для определения V , как функции z , получаем следующее уравнение:

$$V^2 + \frac{16\nu a}{r^2} \cdot V - 2gz = 0.$$

Решая его относительно V и обозначая $\frac{gr^4}{32\nu^2 a^2} = \frac{0,006773}{\nu^2} = k$ (вместо g и a подставлены их значения) получим:

$$V = \frac{8\nu a}{r^2} [\sqrt{1 + kz} - 1]$$

Чтобы вычислить время опорожнения, воспользуемся, как и при аналогичном вопросе для идеальной жидкости, уравнением неразрывности в следующей форме:

$$-R^2 \pi \frac{dz}{dt} = r^2 \pi V;$$

после подстановки в него полученного выше значения V , оно преобразуется в следующее:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{8\nu a}{R^2} [1 - \sqrt{1 + kz}].$$

Интегрируя его в пределах от $z = h_0$ до $z = h_1$, получим окончательно:

$$T = \frac{8\nu a R^2}{gr^4} \left[\log \frac{C_0 - 1}{C_1 - 1} + C_0 - C_1 \right] \dots \dots \dots (167)$$

где сокращения введены следующие обозначения:

$$C_0 = \sqrt{1 + kh_0} = \sqrt{1 + \frac{0,03522}{\nu^2}}, \quad C_1 = \sqrt{1 + kh_1} = \sqrt{1 + \frac{0,01985}{\nu^2}}.$$

Для воды при 20°C и $\nu = \text{см}^2/\text{сек.}$ время истечения оказывается равным $51,6$ сек. и для вязкости E испытуемого смазочного масла по шкале Энглера получается выражение:

$$E = \frac{T}{T_0} = 20,11 \left[2,3026 \log_{10} \frac{C_0 - 1}{C_1 - 1} + C_0 - C_1 \right] \nu \dots \dots \dots (168)$$

Решая это уравнение относительно ν , входящего также в C_0 и C_1 найдем для $\nu > 1$ следующее приближенное значение:

$$\nu [\text{см}^2/\text{сек.}] = 0,0864 E - \frac{0,08}{E} \dots \dots \dots (169)$$

которое дает возможность определить коэффициент вязкости ν по наблюдаемому значению E . Для значений $\nu \leq 0,01$ прибор не дает правильных показаний; в этом случае в качестве жидкости для сравнения удобнее брать не воду, а жидкость более вязкую.

Вместо этой приближенной формулы, полученной Mises'ом Ubbelohde предложил другую, дающую значения, более удовлетворяющие наблюдениям, но зато теоретически необоснованную:

$$\nu \text{ [см}^2\text{/сек.]} = 0,0732 E - \frac{0,0631}{E} \dots\dots\dots (170)$$

41. Трение смазочных веществ. В механике твердого тела трение в подшипниках рассматривается как „сухое“ трение, зависящее только от материала цапфы и нормального давления, но отнюдь не от окружной скорости U вращающейся цапфы. Это, однако, не согласуется с наблюдениями прежде всего в отношении направления смещения цапфы в подшипнике, которое можно определить по расположению в подшипнике мест, наиболее изношенных. Наблюдения показывают, что это смещение происходит в направлении вращения цапфы (считаемого от направления давления цапфы, как на черт. 98), в то время, как при гипотезе сухого трения смещение должно было бы происходить в направлении, обратном вращению цапфы.

Это противоречие наблюдения с теорией в существенном устраняется, если трение в подшипнике рассматривать, как жидкое. Хотя такая гидродинамическая теория трения смазочных веществ на много сложнее и до сего времени дала окончательно вполне удовлетворительные ответы еще на все вопросы, тем не менее, в противоположность теории сухого трения, она дает более точное представление о физических явлениях, происходящих при трении в подшипнике. Поэтому приведем здесь, по крайней мере, основные положения этой теории.

При помощи особых приспособлений, например, смазочного кольца, в подшипник вводится смазочное масло и этим достигается образование между цапфой и подшипником сплошного жидкого слоя, благодаря которому сухое трение заменяется жидким; при сохранении же металлического, сухого соприкосновения между цапфой и подшипником происходит в самое короткое время „загорание“ подшипника и, следовательно, остановка его работы. Смазочное масло, являясь очень вязкой жидкостью, прилипает как к поверхности цапфы, так и подшипника; таким образом между ними создается поток вязкой жидкости, который несомненно следует считать л а м и н а р н ы м, так как он обладает очень незначительной толщиной и скорости в нем невелики. В то время, как движение воды в трубе поддерживается разностью давлений на концах рассматриваемого участка трубы, в нашем случае движение поддерживается моментом вращения, передаваемым смазочному маслу от цапфы.

Если бы центр поперечного сечения цапфы (с радиусом сечения r , длиной l) совпадал с центром поперечного сечения вкладыша подшипника, то давление в жидком слое смазочного масла, а вместе с ним и срезающее усилие τ распределялось бы по всей окружности равномерно; тогда, не принимая во внимание знака, можно было бы согласно формуле (157)

написать:

$$\tau = \chi \frac{U}{h} \dots\dots\dots (171)$$

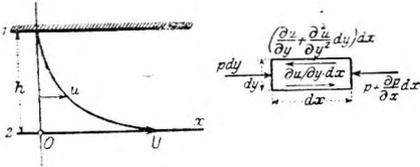
где h обозначает толщину жидкого слоя, а U —окружную скорость цапфы. Для преодоления срезающего усилия вдоль всей окружности цапфы необходим момент вращения

$$M = \tau Fr = \chi \frac{U}{h} \cdot 2\pi rlr = \chi \cdot 2\pi r^2l \cdot \frac{U}{h} \dots\dots\dots (172)$$

Это равенство показывает, что момент вращения цапфы, необходимый для преодоления трения, прямо пропорционален скорости и совершенно не зависит от давления друг на друга тел, разделенных слоем смазочного масла, т. е. не зависит от нагрузки цапфы; при сухом же трении наблюдается обратное: независимость от скорости и пропорциональность нагрузке цапфы.

В случае центрального положения цапфы, давления в смазочном масле и силы трения вокруг всей поверхности цапфы были бы постоянны; их сумма по всем направлениям равнялась бы нулю и не могла бы, следовательно, уравновесить никакой конечной нагрузки. Таким образом, цапфа может занимать центральное положение только при отсутствии нагрузки, и формулу (172) надо рассматривать только как предельную для очень малой нагрузки или очень большой скорости.

При всякой конечной нагрузке положение равновесия цапфы будет обязательно эксцентричным, и мы сейчас покажем, что это смещение цапфы при нагрузке, действующей по вертикали сверху вниз, и при положительном вращении (против часовой стрелки) происходит вправо, т. е. происходит как бы набегание цапфы на подшипник в направлении ее вращения. Кроме того, при соблюдении упрощенных условий, которые необходимо принять при разработке этого вопроса, положение равновесия оказывается сдвинутым в горизонтальном направлении от центрального положения.



Черт. 97.

Прежде всего нам необходимо найти закон изменения давления p в слое смазочного масла и закон изменения срезающего усилия τ в тонком кольцеобразном пространстве вокруг цапфы при ее нецентральной позиции. При этом мы будем пользоваться только теми вспомогательными методами, которые применялись нами до сих пор, что, конечно, позволит развить разбираемую нами теорию только до известного предела.

Рассмотрим поток вязкой жидкости между двумя параллельными стенками „1“ и „2“, расстояние между которыми равно h (черт. 97). Пусть стенка „2“ движется с равномерной скоростью U вправо в ее собственном направлении. Совместим ось x системы осей Oxy со стенкой „2“; тогда скорость потока u будет изменяться от значения 0 у стенки „1“ до значения U у стенки „2“.

Возьмем прямоугольник $dx dy$; на его противолежащие стороны dy действуют давления $p dy$ и $-(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy$; следовательно, избыток давления в направлении оси x равен $-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy$. Проекция трения на обеих параллельных сторонах dx на направление Ox равны $\tau \frac{\partial u}{\partial y} dx$ и $-\tau (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy) dx$; их сумма в направлении Ox равна $-\tau \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy$. Если активные силы (вес и т. п.) не принимать во внимание, а силами инерции пренебречь, как слишком малыми, то необходимо должно быть:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ или } \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\tau} \frac{dp}{dx} \dots \dots \dots (173)$$

Подобное же вычисление для направления оси y приводит к результату что $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$; значит, давление по всему сечению остается одинаковым и зависит от одного только x . Интегрируя уравн. (173), получаем: $u = \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{dp}{dx} y^2 + Ay + B$, где A и B — интегральные постоянные (они могут быть и функциями от x). Для определения их служат пограничные условия: у граничных поверхностей жидкость прилипает к последним, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{для } y = 0, & \quad u = U, \\ \text{„ } y = h, & \quad u = 0; \end{aligned}$$

отсюда находим: $B = U, \quad A = -\frac{h}{2\tau} \cdot \frac{dp}{dx} - \frac{U}{h}.$

Подставляя их в предыдущее выражение для u , получаем:

$$u = U \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y}{h}\right) h y \dots \dots \dots (174)$$

Таким образом, изменение скорости u в зависимости от y совершается по закону параболы, изображенной на черт. 97. (Для $\frac{dp}{dx} = 0$ получается прямая линия). Количество протекающей жидкости, соответствующее этому распределению скоростей, найдется из равенства:

$$Q = \int_0^h u dy = U \frac{h}{2} - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{h^3}{12\alpha}$$

Найдя отсюда производную

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\alpha}{h^3} (Uh - 2Q) \dots \dots \dots (175)$$

и подставив ее значение в уравнение (174), получим вместо последнего:

$$u = U \left(1 - \frac{4y}{h} + \frac{3y^2}{h^2}\right) + \frac{6Q}{h^2} \left(1 - \frac{y}{h}\right) y \dots \dots \dots (176)$$

Из этого уравнения найдем срезавающее усилие у двигающейся стенки:

$$\tau = -\alpha \left[\frac{du}{dy} \right]_{y=0} = \frac{2\alpha}{h^2} (2Uh - 3Q) \dots \dots \dots (177)$$

Равенства (175) и (177) остаются в силе и в том случае, когда пограничные поверхности (стенки „1“ и „2“) наклонены друг к другу под небольшим углом. Применим их для слоя жидкости между цапфой и подшипником. Приняв за значение h среднюю толщину слоя в рассматриваемом месте, можем написать (черт. 98): $h = \delta - e \cos \varphi$, где $e = C'C$ и $\delta = [h]_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$. Подставляем в уравнение (175) $dx = r d\varphi$:

$$\frac{dp}{r d\varphi} = \frac{6\alpha}{h^3} (Uh - 2Q) \dots \dots \dots (178)$$

Из этого уравнения мы получим соотношение между количествами протекающей жидкости Q и величинами δ и e , если заметим, что p после обхода вокруг всей цапфы принимает первоначальное значение, т. е. p есть периодическая функция, и поэтому

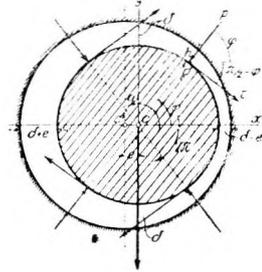
$$\int_0^{2\pi} dp = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\varphi} d\varphi = 0 \dots \dots \dots (179)$$

Подставив сюда вместо $\frac{dp}{d\varphi}$ ее значение из уравнения (178), получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r \cdot 6\alpha (Uh - 2Q)}{h^3} d\varphi = 0;$$

чтобы вычислить этот интеграл, представим его в виде суммы:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r \cdot 6\alpha (Uh - 2Q)}{h^3} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{6r\alpha \cdot Uh}{h^3} - 2Q \left[\int_0^{2\pi} \frac{A}{h^3} d\varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{B}{h^2} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{C}{h} d\varphi \right] = 0,$$



Черт. 98.

где A , B и C определяются способом, известным из интегрального исчисления (не следует забывать, что h есть функция от φ). Интегралы $\int \frac{d\varphi}{h}$, $\int \frac{d\varphi}{h^2}$, $\int \frac{d\varphi}{h^3}$ вычислим следующим образом:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta^2 - e^2}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = -\frac{dI}{d\delta} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{(\delta^2 - e^2)^3}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} = \frac{d^2 I}{d\delta^2} = \frac{2\pi(2\delta^2 + e)}{\sqrt{(\delta^2 - e^2)^5}}$$

В результате всех вычислений получим:

$$Q = U \frac{\delta(\delta^2 - e^2)}{2\delta^2 + e^2} \dots \dots \dots (180)$$

Суммируя силы, действующие на всю окружность цапфы по направлениям осей x и y , и вычисляя моменты относительно O , получим равенства:

$$X = - \int_0^{2\pi} p \cos \varphi r d\varphi + \int_0^{2\pi} \tau \sin \varphi r d\varphi \dots \dots \dots (181)$$

$$Y = - \int_0^{2\pi} p \sin \varphi r d\varphi - \int_0^{2\pi} \tau \cos \varphi r d\varphi \dots \dots \dots (182)$$

$$\mathfrak{M} = - \int_0^{2\pi} \tau r^2 d\varphi \dots \dots \dots (183)$$

Заменив τ и $r d\varphi$ их значениями из равенств (178) и (177), получим прежде всего, что $X = 0$; равенство $Y = G$ даст соотношение, из которого можно будет вычислить боковое смещение нагруженной цапфы; наконец, вычислив интеграл в правой части равенства (183), найдем момент вращения цапфы, необходимый для преодоления трения:

$$\mathfrak{M} = 4 \pi r^2 U \frac{\delta^2 + 2e^2}{(2\delta^2 + e^2) \sqrt{\delta^2 - e^2}}; \dots \dots \dots (184)$$

в механике твердого тела для этого момента получается совершенно другое выражение. Хотя положения этой теории могут быть частично оспариваемы, а некоторые выводы ее не совсем удовлетворительны, тем не менее она дает поучительный пример применения основных законов гидравлики в области, требующей вследствие своего важного значения в технике дальнейших исследований.

42. Число Рейнольдса. При увеличении скорости движения воды в трубе или канале, достигаемого повышением разности давлений на их концах (например, путем увеличения наклона трубы), происходит, как уже было сказано, следующее явление: при достижении скоростью определенного значения движение воды перестает быть ламинарным и становится совершенно беспорядочным, турбулентным. Можно заметить, как от стенок трубы или канала отрываются маленькие вихри, попадающие во внутрь жидкости и своим появлением нарушающие существовавшее до того упорядоченное движение частиц воды. При турбулентном движении каждая частица описывает многократно изломанный, зигзагообразный путь; в результате главное движение, обуславливающее движение воды вперед, складывается с этим, трудно поддающимся описанию, неправильным вихревым движением.

Почти все движения воды в технических сооружениях (каналах, трубах), а также в естественных руслах, при тех скоростях, которые в них применяются или наблюдаются, могут служить примерами турбулентного движения.

Ясно, что величину срезающего усилия, возникающего между соприкасающимися жидкими частицами при ламинарном движении, нам удалось найти на основании принятых положений потому, что форма линий тока была принята заранее известной. В узких трубах и при небольших скоростях такую картину потока можно наблюдать и на самом деле. Далее, вполне ясно, что при турбулентном движении, когда каждая частица жидкости движется по вышеописанному неправильному пути, всякое вычисление, основанное на предположении определенного расположения линий тока, не приведет ни к какому результату.

С этой новой природой потока связан, отличный от пуазейлевского, закон, дающий выражение потери напора, происходящей при турбулентном движении в трубе. Знание этого закона крайне важно для тех технических расчетов, при которых приходится иметь дело с турбулентными движениями. Как только что было замечено, непосредственные вычисления ничего не могут дать для вывода этого закона, и поэтому пришлось прибегнуть к опытам, при помощи которых и была уже давно получена эмпирическая формула для этого закона. Теоретический же вывод его долгое время оставался неразрешимым научным вопросом. Только в 1879 г. О. Рейнольдс вывел его путем, хотя и отличным от прямых, непосредственных вычислений, но не менее убедительным, а именно: путем рассмотрения подобно протекающих потоков.

Говоря о подобии двух потоков, мы под этим подразумеваем не только их геометрическое подобие, но и механическое. Геометрическое подобие, заключающееся, например, в совпадении линий тока на всем протяжении обоих потоков, конечно, должно быть обязательным; оно должно относиться также и к неровностям стенок. Однако, наличия одного только геометрического подобия отнюдь недостаточно, чтобы можно было быть уверенным в совпадении всего процесса обоих движений. Должно быть еще механическое подобие: должны совпадать уравнения движения жидкости вместе с входящими в них числовыми коэффициентами; из последних особое значение имеет один, называемый числом Рейнольдса, который, правда, получается при условии полного непринятия в расчет внешних сил, например силы тяжести и т. п.

Уравнение движения жидкости, составленное на основании принципа Д'аламбера, выражает собою следующее: если к силам, действующим на жидкую частицу, присоединить еще силу инерции, то под действием всех этих сил частица будет находиться в равновесии. Силы инерции дадут в уравнении члены формы

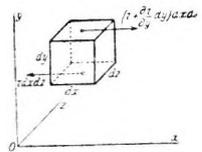
$$\frac{\partial V}{\partial t} \text{ или } V \frac{\partial V}{\partial s},$$

размерность которых равна $\left[\frac{V^2}{L} \right]$.

Чтобы найти форму членов уравнения движения, зависящих от вязкости — полные выражения этих членов нам здесь не понадобятся, — рассмотрим движение жидкой частицы в форме прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz . Движение пусть происходит в направлении оси x (черт. 99). Если срезающее усилие на нижней грани $dx dz$ равно τ , тогда сила, действующая на эту грань, равна $\tau dx dz$, а сила, действующая на противоположную грань, равна $\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) \cdot dx dz$. В результате в направлении оси x окажется избыток $\frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dz$.

Введя в это выражение вместо τ его значение из равенства (157), получим вместо него следующее:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dx dy dz.$$



Черт. 99.

Разделив все члены уравнения движения на массу частицы $\rho dx dy dz$, найдем, что члены, зависящие от вязкости, имеют форму $\frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, так как $\frac{x}{\rho} = \nu$; размерность их равна $\left(\frac{\nu V}{L^2}\right)$

Частное от деления размерности членов, зависящих от инерции, на размерность членов, зависящих от вязкости, есть отвлеченное число. Оно называется числом Рейнольдса, соответствующим рассматриваемому потоку. Напишем его в следующей форме:

$$\Re = \frac{VL}{\nu} \dots \dots \dots (185)$$

Здесь L обозначает какой-нибудь характерный для разбираемого случая размер (диаметр трубы, ширина канала, глубина крыла и т.п.), V —какую-нибудь характеристическую скорость, а ν — коэффициент вязкости жидкости.

Итак два геометрически подобные потока будут подобны также и в отношении влияния инерции и вязкости в том случае, если для обоих потоков совпадают числа \Re , вычисленные для соответственных значений V, L и ν в обоих потоках. Если жидкость в обоих потоках одинаковая (например вода или воздух), ν будет одинаковым для обоих потоков, и два геометрически подобные потока будут также подобны и механически при условии соблюдения равенства соответствующих произведений VL .

Пример 56. Испытание моделей. В аэродинамической трубе испытывается модель крыла самолета, глубина которого $L = 0,3$ м. Глубина крыла натурального размера $L_2 = 1,2$ м. Какова должна быть в трубе скорость воздушного потока, чтобы он был подобен потоку, получающемуся при движении самолета со скоростью $V_2 = 50$ м/сек.

$$V_1 L_1 = V_2 L_2, \text{ т.е. } V_1 = \frac{V_2 L_2}{L_1} = \frac{50 \cdot 1,2}{0,3} = 200 \text{ м/сек.}$$

Чтобы избежать необходимости применения такой большой скорости, можно производить испытание модели не в воздухе, а в воде. Если температура воды равна 10°C , то $\nu_1 = 0,0133$ см²/сек, а для воздуха $\nu_2 = 0,145$ см²/сек² (при 0°C и 760 мм), и из уравнения

$$\frac{V_1 L_1}{\nu_1} = \frac{V_2 L_2}{\nu_2}$$

получим:

$$V_1 = V_2 \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_2} = 50 \cdot \frac{1,2}{0,3} \cdot \frac{0,0133}{0,145} = 18,3 \text{ м/сек.}$$

43. Закон сопротивления при турбулентном течении. Итак мы знаем, что ламинарное течение при достижении скоростью определенного критического значения перестает быть таковым и становится турбулентным с другим уже, конечно, законом сопротивления. Этот переход течения из одного состояния в другое почти всегда совершается внезапно. Если даже закон сопротивления для турбулентного течения неизвестен, мы все-таки можем сделать предположение, что для подобных потоков, т. е. для потоков с одинаковыми реинольдсовыми числами \Re , переход от одного течения к другому должен происходить при равных значениях \Re . В тот момент, когда течение становится турбулентным, значения сопротивлений, обуславливаемых вязкостью, должны совпадать для обоих течений; но в следующий момент закон сопротивления уже будет другой. Основанием возможности такого предположения служит совершенно внезапный переход одной формы течения в другую. Для ламинарного течения закон сопротивления выражался равенством (164):

$$I = \frac{32}{g} \cdot \frac{\nu V}{D^2}.$$

Положим, что в турбулентной области этот закон выражается равенством:

$$I_1 = \varepsilon \frac{V^\alpha}{V^\beta}.$$

Тогда на основании только что сказанного, для подобных потоков в месте перехода значения I и I_1 должны совпадать, и, следовательно, должно получаться одно и то же значение для \Re ; иными словами в месте перехода одного состояния потока в другое оба закона неизменно связаны между собою числом \Re ; это значит, что при $I = I_1$ т. е. когда $\frac{32}{g} \cdot \frac{\nu V}{D^2} = \varepsilon \frac{V^\alpha}{D^\beta}$, должно быть:

$$\frac{V^{\alpha-1} \cdot D^{\beta-2}}{\nu} \sim \frac{VD}{\nu} = \Re.$$

Отсюда следует, что $\alpha=2$, $\beta=1$ и закон сопротивления для турбулентного течения представится в форме:

$$I_1 = \varepsilon \cdot \frac{V^2}{D} \dots \dots \dots (186)$$

ε мы рассматривали как величину постоянную, что однако, вовсе не является обязательным; ее можно считать зависящей от величин V , D , ν . Но, если такая зависимость существует, то опять-таки сочетание величин V , D и ν , входящих в ε , должно быть функцией от \Re . Предыдущие рассуждения останутся в силе, если ε принять просто за функцию от \Re ; тогда равенство (184) можно переписать так:

$$I_1 = \varepsilon(\Re) \frac{V^2}{D} \dots \dots \dots (187)$$

В дальнейшем мы увидим, что в некоторых эмпирических формулах для сопротивления в трубах, зависящего от трения, ε действительно является функцией произведения VD ; зависимость от ν обыкновенно не приходится вводить в расчет, так как большей частью приходится иметь дело с потоками из одинаковых жидкостей (воды или воздуха). Таким образом формулы типа (187), с точки зрения этой теории, следует рассматривать как „правильные по своей размерности“.

Что касается числового значения \Re , то в результате своих опытов Рейнольдс нашел, что в круглой трубе поток остается ламинарным, пока $\Re = \frac{VD}{\nu} \leq 2000$; при переходе числом \Re этого значения (в сторону увеличения) поток становится турбулентным. Это значение \Re называют критическим рейнольдсовым числом.

Критическая скорость, соответствующая $\Re \leq 2000$, равна [после подстановки значения ν из формулы (165)]:

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{крит}} \text{ см/сек} &= \frac{2000\nu}{D} = \frac{35,6}{1 + 0,0337T + 0,00022T^2} \cdot \frac{1}{D} (D \text{ в см}) \\ \text{или} \\ V_{\text{крит}} \text{ м/сек} &= \frac{1}{278} \cdot \frac{1}{1 + 0,0337T + 0,00022T^2} \cdot \frac{1}{D} (D \text{ в м}) \end{aligned} \right\} \dots (188)$$

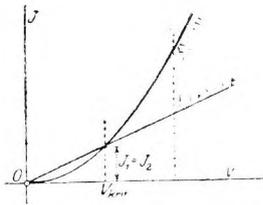
Пример 57. В трубопроводе скорость движения воды $V = 1 \text{ м/сек}$; $D = 0,4 \text{ м}$. Тогда при 20°C $\Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{100,40}{0,01} = 40000$, следовательно, движение наверно турбулентное.

Однако, новейшие работы показали, что критическое значение числа указывающее место перехода ламинарной области течения в турбулентную, вовсе не обладает определенным, точным значением, как это предполагал Рейнольдс; наоборот, эта величина зависит от свойств того участка трубы, на протяжении которого производятся наблюдения и, в особенности, — от рода препятствий, существующих при самом входе в трубу, от шероховатости трубы и т. п., так что критической скорости могут соответствовать самые разные значения числа \Re .

Таким образом, полученное выше критическое значение числа $\Re = 2000$ не носит абсолютного характера, оно может принимать разные значения в зависимости от тех условий, в которых происходит рас-

сма триваемое течение. В свободной струе влияние вязкости проявляется очень незначительно, критическая скорость оказывается на много большей, чем даваемая выше найденным значением ре й н о л ь д с о в а числа ($\Re \sim 2000$); напротив, при движении между шероховатыми стенками, часто встречающемся в технике, значение числа \Re оказывается намного меньшим, т. е. критическая скорость, при переходе через которую поток становится турбулентным, значительно меньше, чем вычисленная из значения $\Re \sim 2000$. Поэтому при истечении из сосудов движение свободной струи большей частью бывает ламинарным, а течения по каналам с негладкими стенками и в естественных руслах, наоборот, большей частью бывают турбулентными.

На черт. 100 графически изображено изменение I в зависимости от скорости V ($I - V$ — кривая) для ламинарной и турбулентной областей. Для ламинарной области получается прямая, для турбулентной — парабола. Этими законами, основным (линейным) и гидравлическим (квадратичным) преимущественно и пользуются в технической гидравлике.



Черт. 100.

Укажем еще на одно отличие между обоими состояниями потоков: при ламинарном течении в круглой трубе распределение скоростей совершается по закону параболы, при турбулентном же — распределение происходит более равномерно: кривой распределения будет кубическая парабола (по Базену) или полуэллипс. О теоретическом выводе этих законов распределения будет сказано в п. 44. В турбулентной области это распределение, конечно, относится к главному движению жидкости, а не к тому побочному, вихре-

вому, которое, как было сказано выше, примешивается к главному.

Подведем итог всему сказанному: при определенной критической скорости, значение которой зависит от вязкости, линейных размеров и формы рассматриваемого потока, ламинарное состояние потока переходит в турбулентное; последнее отличается от первого не только картиной течения, но и законом потери энергии вследствие вязкости и законом распределения скоростей.

Пример 58. Закон Фруда для испытания судовых моделей. Для того, чтобы результаты испытания судовых моделей можно было применить к действительным судам, прежде всего, конечно, необходимо полное геометрическое подобие модели и самого судна в натуральном размере; должны, например, удовлетворять отношению подобия глубины погружения. Но какое должно быть отношение между скоростями модели и действительного судна, чтобы удовлетворялись также условия механического подобия. Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что величина скорости движения и особенно величина сопротивления движению судна зависят от движения поверхностных волн, которое в свою очередь в существенном зависит от ускорения силы тяжести g . Следовательно, движение частиц воды определяется главным образом силою тяжести; поэтому уравнение движения воды в вертикальном направлении будет иметь форму:

$$\left(g - \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} - \dots \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}.$$
 Так как g для модели и судна одно и то же, то для механического подобия обоих движений все длины и скорости должны быть изменены так, чтобы совпадали и остальные члены, входящие в левые части уравнений, т. е. для модели и судна должны быть одинаковы отношения $\left[\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \sim \left[\frac{V^2}{L} \right]$. Итак, если два явления — движение судна и движение модели, происходящие на свободной поверхности воды, должны быть механически подобны, то отношение скоростей модели и судна должно быть равно отношению квадратных корней из соответственных длин. Числом, характеризующим это отношение, будет

$$\delta = \frac{V^2}{Lg}; \dots \dots \dots (189)$$

называемое числом Фруда.

Пример 59. Приведенное число оборотов турбины. При составлении уравнений, которые были бы действительны для целого класса определенных явлений или

процессов, в частности, для определенного класса машин, приведенные выше соображения о размерности имеют большое значение.

Известно, что мощность N турбины зависит от следующих величин: от напора H , количества оборотов в секунду n , веса единицы объема воды γ и от ускорения силы тяжести g . Из этих пяти величин N, H, n, γ, g можно составить выражение, размерность которого равняется нулю, именно:

$$\frac{Nn^2}{\gamma H \cdot (gH)^{\frac{3}{2}}}$$

Действительно, подставляя размерности входящих в него величин, получим:

$$\frac{\left[\frac{KL}{T^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{T^2} \right]}{\left[\frac{K}{L^3} \right] \cdot [L] \cdot \left[\frac{L^2}{T^2} \right]^{\frac{3}{2}}} = [0].$$

Так как γ и g для всех турбин в одном и том же месте земля одни и те же, то они не существенны для характеристики турбины, а потому при составлении характеристики их можно не рассматривать. Квадратный же корень из оставшихся величин,

$$n_3 = \frac{h}{H} \sqrt{\frac{N}{\sqrt{H}}} \dots \dots \dots (190)$$

называют приведенным числом оборотов турбины.

Это число играет основную роль при сравнении различных турбин и при проектировании турбинных установок.

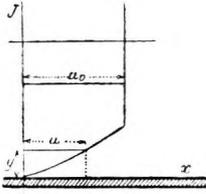
44. Закон Kármán Prandtl'a для распределения скоростей в гладких трубах. В предыдущем параграфе на основании свойств подобных потоков был выведен гидравлический закон сопротивления, возникающего от трения при турбулентном движении жидкости в круглой трубе. Этот закон дает выражение для потери напора вдоль трубы в зависимости от средней скорости, диаметра трубы и вязкости жидкости. Однако ни форма этого закона, ни те рассуждения, которыми мы пользовались при его выводе, не дают возможности судить о распределении скоростей по поперечному сечению трубы. Поэтому необходимо как-нибудь развить предыдущие рассуждения, чтобы получить понятие о характере распределения скоростей, и этим самым глубже проникнуть в сущность турбулентного движения. Это было сделано Kármán'ом и Prandtl'ем.

Непосредственные наблюдения над течением жидкости, особенно то обстоятельство, что при турбулентном движении скорости удивительно равномерно распределяются по всему поперечному сечению трубы, за исключением только очень небольшой области у стенок, привели к предположению, что трение играет существенную роль только у стенок, где жидкость соприкасается с твердым телом; внутри же жидкости трение проявляется настолько слабо, что там его можно совершенно не принимать во внимание. Поэтому при исследовании вопроса о сопротивлении трения можно ограничиться рассмотрением только пограничного слоя жидкости у самых стенок, предположив, что внутри потока жидкость движется по всему поперечному сечению с одинаковой скоростью u_0 .

В параграфе 43 в нашем исследовании мы исходили из выражения для потери напора (или уклона J); теперь же для получения зависимости срезающего усилия от скорости воспользуемся принципом подобия. При ламинарном течении мы имели между τ и разностью скоростей в двух соседних слоях соотношение (157); если разности скоростей u вблизи стенки соответствует слой маленькой толщины δ , то это соотношение можно записать в форме:

$$\tau = \kappa \frac{u}{\delta}$$

Чтобы найти соотношение между τ и u при турбулентном течении, поступим так: предположим, что для τ и u существуют зависимости:



Черт. 101.

$$\tau \sim u^\beta, \quad u \sim y^\alpha \sim \tau^{\frac{1}{\beta}} \dots \dots \dots (191)$$

и посмотрим, нельзя ли на основании соображений о размерности, установить какое-нибудь соотношение между степенями α и β .

Если состояние движения жидкости, в частности скорость ее u вблизи стенок (черт. 101), оказывается зависящей только от влияния ближайшей окрестности рассматриваемого места (но не от формы всего тела), тогда для гладких труб, в которых совершенно не сказывается влияния материала, скорость u следует в общем случае считать функцией величин y, v, τ и ρ , т.е.:

$$u = u(y, v, \tau, \rho).$$

Теперь подберем такое сочетание из этих четырех величин, которое заключало бы в себе оба предположения (191). Приняв во внимание размерности этих величин, найдем:

$$\left[\frac{y}{v} \right]^\alpha = \left[\frac{L}{L^2} \right]^\alpha = \left[\frac{T}{L} \right]^\alpha = \frac{1}{[u]^\alpha},$$

$$\left[\frac{\tau}{\rho} \right]^{\alpha+1} = \left[\frac{K}{KT^2} \right]^{\frac{\alpha+2}{2}} = \left[\frac{L^2}{T^2} \right]^{\frac{\alpha+1}{2}} = [u]^{\alpha+1}.$$

Оставив α пока неопределенным и перемножив оба написанные выражения, введя при этом еще множитель B , получим в левой части скорость u :

$$u = B \left(\frac{y}{v} \right)^\alpha \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \dots \dots \dots (192)$$

B есть, конечно, отвлеченное число (размерность его = 0), которое оказывается постоянным не только для гладких труб, но для шероховатых. Равенство это справедливо при всяких значениях α .

В частности, полагая

- $\alpha = 1$, получим: $\tau \sim u$, т. е. основной (линейный) закон Poiseuille'я.
- $\alpha = 0$, „ „ „ $\tau \sim u^2$ — закон для шероховатых стенок.

Новейшие наблюдения показывают, что для гладких стенок получаются хорошие результаты, если для β взять промежуточное между единицей и двойкой значение, именно, $\frac{4}{7}$; значит:

$$\tau \sim u^{\frac{7}{4}} \text{ или } u = \tau^{\frac{4}{7}},$$

и, согласно равенству (192):

$$\frac{4}{7} = \frac{1+\alpha}{2}, \text{ т. е. } \alpha = \frac{1}{7} \dots \dots \dots (193)$$

Упомянутые наблюдения относятся к зависимости между уклоном I и скоростью u ; о них будет сказано еще ниже, в п. 45. Если при этом, как мы сделали, считать, что трение играет роль главным образом в пограничном слое, то падение давления происходит главным образом благодаря преодолению срезающего усилия τ , имеющего место в этом пограничном слое. Поэтому τ проще всего предположить пропорциональным уклону I : $\tau \sim I$.

Зависимость $u = u(y)$ представится теперь:

$$u \sim y^{\frac{1}{7}}, \dots \dots \dots (194)$$

откуда следует, что в пограничном слое скорость u очень быстро возрастает с удалением от стенок.

На основании закона, выражаемого этим соотношением, — закона зависимости скорости от расстояния от стенки — получаем следующее уравнение для распределения скоростей в круглой трубе с радиусом a :

$$u = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right]^{\frac{1}{7}} ; \dots \dots \dots (195)$$

при $n =$ от 1,25 до 2 это уравнение с большой точностью подтверждается наблюдениями. Распределение скоростей, соответствующее этому уравнению, отмечено на чертеже 93 пунктирной кривой. Форма ее ясно показывает, что при турбулентном течении скорости распределяются по поперечному сечению более равномерно, чем при ламинарном, и что около стенок скорость очень быстро убывает до нулевого значения у самой стенки.

VII. Трубопроводы.

45. Сопротивление трения в цилиндрических трубах.

В предыдущих главах было выяснено, что всякое течение жидкости,—даже не обладающее полезной мощностью, как, например, поднятие воды на определенную высоту,—связано с потерей энергии на трение; поэтому, для поддержания течения необходима непрерывная затрата энергии, получаемой или механическим путем или благодаря естественному падению в поле земного тяготения. Мы говорим здесь о потере энергии, так как часть всей энергии, которой обладает рассматриваемая жидкость, преобразуется при движении вследствие трения в тепло и не может уже быть превращена обратно в энергию давления или скоростную.

Знание величины этой потери является весьма важным, в особенности при определении мощности водоподъемных машин, снабжающих городские водопроводы, гидросиловых установок и вообще при расчетах всех сооружений, где происходит течение воды в трубах.

Движение воды в трубах, как и всякий механический процесс, требует своей теории; каждый успех последней влечет за собою более целесообразное использование рассматриваемого процесса, и чем точнее эта теория дает возможность учесть все детали, тем рациональнее может быть выполнено нужное техническое сооружение. Поэтому, не должно быть удивительным, что установление законов для трения в трубах являлось в свое время одной из важнейших задач технической гидравлики. Займемся сейчас цилиндрическими трубами, как наиболее распространенными.

При расчетах водопроводов нам придется иметь дело прежде всего со следующими величинами:

Q — количество протекающей жидкости (расход) в $m^3/сек.$, V —средняя скорость в $m/сек.$, D — диаметр трубы в m , I — уклон (отвлеченное число).

Если напор зависит только от разности высоты h между концами трубы, то, при длине трубы l , $I = \frac{h}{l}$; если, кроме того, в обоих концах трубы имеется еще разность давлений $p_1 = p_0$, то I будет определяться равенством:

$$I = \frac{h}{l} + \frac{p_1 - p_0}{\gamma l} \dots \dots \dots (196)$$

Между тремя величинами Q , V и D существует соотношение:

$$Q = \frac{D\pi^2}{4} V \dots\dots\dots (197)$$

так что только две из них являются независимыми. Если из всех сопротивлений принимать в расчет только сопротивление трения, то весь находящийся в распоряжении уклон I служит только для поддержания режима течения несмотря на трение. Так как течение в трубе турбулентное, то зависимость уклона от средней скорости V определяется равенством (186), которое при наличии равных давлений на концах трубы и после замены ε через $\frac{\lambda}{2g}$ принимает вид:

$$I = \frac{h}{l} = \lambda \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \text{ или } h = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \dots\dots\dots (198)$$

И это уравнение никоим образом не является интегралом уравнения движения, так как оно получено не интегрированием. Оно показывает, что определенная часть h всего находящегося в распоряжении напора расходуется на преодоление внутреннего и внешнего трения (трения от вязкости жидкости и трения жидкости о стенки трубы), т. е. служит для поддержания определенного режима течения.

После того, как форма закона сопротивления установлена, весь вопрос сводится к правильному и целесообразному определению значения λ (λ — отвлеченное число); оказывается, что оно колеблется в пределах от 0,02 до 0,03.

Полагая λ постоянной и придав ей из принимаемых ею значений наибольшее (0,03), получим формулу Dupuit:

$$\lambda = 0,03 \dots\dots\dots (199)$$

Значения, даваемые равенством (198) при таком предположении, большей частью оказываются слишком большими.

Как было указано в п. 43, принцип подобия, приведший нас к закону сопротивления для турбулентных потоков, вовсе не требует, чтобы λ была постоянной. Но если она является функцией некоторых величин — такими могут быть V и D , — то эти величины должны входить в выражение функции обязательно в сочетании $\frac{VD}{\nu} = \Re$. Так как опыты над трением производились почти исключительно с водой, при чем зависимость ν от температуры не принималась во внимание, то с точки зрения принципа подобия следует рассматривать правильными по своей конструкции те формулы, которые содержат величины V и D только в виде произведения VD . К числу таких формул принадлежит формула Lang'a.

$$\lambda = \alpha + \frac{0,0018}{\sqrt{VD}} \dots\dots\dots (200)$$

выведенная из более старых наблюдений, сделанных главным образом Вейсбахом. α в ней следует давать значения:

a) для стеклянных и тянутых стальных с гладкими местами соединенной α от 0,010 до 0,012;

b) для чугунных и железных труб $\alpha = 0,02$.

Значение 0,0018 берется для воды, температура которой равна приблизительно 15° С; при 3° С оно увеличивается до 0,0024, а при 100° С — уменьшается до 0,0004.

Формулы, встречающиеся в старой литературе, в которых λ принимается зависящим или от одного только V (у Вейсбаха, в более старых его формулах) или от одного только D (у Дарси), следует, конечно, рассматривать, как совершенно необоснованные, и действительно, они оказываются мало-мальски пригодными лишь в очень узких областях.

Для пользования формулой (200) в различных случаях служит следующая таблица, в которой приведены наиболее употребительные значения V и D .

		Диаметр в м	V (м/сек.) = 0,1	= 0,50	= 1,0	= 1,5	= 2,0	= 4,0
\sqrt{VD}	$D=0,08$		0,090	0,2	0,282	0,346	0,4	0,565
	$=0,15$		0,122	0,274	0,387	0,474	0,547	0,775
	$=0,20$		0,141	0,316	0,447	0,547	0,633	0,894
	$=0,50$		0,224	0,5	0,706	0,865	1,0	1,414
	$=1,00$		0,316	0,707	1,0	1,222	1,414	2,0
$\frac{0,0018}{\sqrt{VD}}$ ($T=15^\circ\text{C}$)	$D=0,08$		0,0202	0,009	0,0064	0,0052	0,0045	0,0032
	$=0,15$		0,0147	0,0066	0,0046	0,0038	0,0033	0,0023
	$=0,20$		0,0127	0,0057	0,004	0,0033	0,0028	0,002
	$=0,50$		0,008	0,0036	0,0025	0,0021	0,0018	0,0012
	$=1,00$		0,0057	0,0025	0,0018	0,0015	0,0013	0,001
$\frac{0,0023}{\sqrt{VD}}$ ($T=5^\circ\text{C}$)	$D=0,08$		0,0258	0,0115	0,0082	0,0067	0,0058	0,0041
	$=0,15$		0,0187	0,0084	0,0059	0,0049	0,0042	0,0029
	$=0,20$		0,0162	0,0073	0,0051	0,0042	0,0036	0,0025
	$=0,50$		0,0102	0,0046	0,0032	0,0027	0,0023	0,0015
	$=1,00$		0,0073	0,0032	0,0023	0,0019	0,0017	0,0013

Другая простая формула для λ была выведена из многочисленного опытного материала Flamant'ом в 1892 году и позже теоретически обоснована (на основании принципа подобия) Blasius'ом. Последний нашел, что при течении в трубах из однородных материалов остается постоянным выражение:

$$\frac{ID}{V^2} \cdot \left(\frac{DV}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}} = a' = \text{const}, \dots \dots \dots (201)$$

что вполне согласуется с законом сопротивления Kármán — Prandtl'я; на это соотношение мы ссылались в п. 44. Придадим ему форму равенства (198), заменив предварительно $2ga'\nu^{\frac{1}{4}}$ через a ;

$$I = \frac{2ga'\nu^{\frac{1}{4}}}{(VD)^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{a}{\sqrt{VD}} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \dots \dots \dots (202)$$

таким образом,

$$\text{III.} \quad \lambda = \frac{a}{\sqrt[4]{VD}} \dots \dots \dots (203)$$

где по Flamant'у для a следует брать значения (при $T=15^\circ\text{C}$):

для труб свинцовых, стеклянных, белой жести: $a =$ от 0,0104 до 0,0122,
для старых железных и стальных труб: $a = 0,0180$.

На практике большую часть берет последнее значение a ; при вычислениях пользуются следующей таблицей:

		Диаметр в м	V (м/сек.) = 0,1	= 0,5	= 1,0	= 1,5	= 2,0	= 4,0
$\sqrt[4]{VD}$	$D=0,08$		0,30	0,45	0,53	0,59	0,63	0,75
	$=0,15$		0,35	0,52	0,62	0,69	0,74	0,88
	$=0,20$		0,38	0,56	0,67	0,74	0,80	0,95
	$=0,50$		0,47	0,71	0,84	0,93	1,00	1,19
	$=1,00$		0,56	0,84	1,00	1,11	1,19	1,41
$\frac{0,018}{\sqrt[4]{VD}}$	$D=0,08$		0,060	0,04	0,034	0,031	0,028	0,024
	$=0,15$		0,051	0,035	0,029	0,026	0,024	0,020
	$=0,20$		0,048	0,032	0,027	0,024	0,022	0,019
	$=0,50$		0,038	0,025	0,021	0,019	0,018	0,015
	$=1,00$		0,032	0,021	0,018	0,016	0,015	0,013

В формулах II и III λ зависит от свойств материала трубы, но эти формулы применимы только к гладким трубам, в которых не сказывается влияние шероховатости стенок. Если, в целях достижения еще большей точности, желательно учесть и влияние шероховатости стенок, следует ввести в формулу некоторую величину, которая численно характеризовала бы эту всегда существующую шероховатость, как бы она ни была мала.

Назовем такую величину „абсолютной шероховатостью“ (K). Однако в формулу вводится не само K , а отношение $\frac{K}{D}$ — относительная шероховатость, так как иначе в формуле оказалась бы величина с размерностью, чего не должно быть. На основании наблюдений Базена и Р. Мизеса была получена следующая формула для шероховатых труб:

$$IV. \quad \lambda = 0,01 + \sqrt{\frac{K}{D}} + 1,77 \sqrt{\frac{\nu}{VD}} \dots\dots\dots (204)$$

В частности для воды при 5° С, когда $\nu = 0,000\ 015\ m^2/сек.$,

$$\lambda = 0,01 + \sqrt{\frac{K}{D}} + \frac{0,0023}{\sqrt{VD}} \dots\dots\dots (205)$$

Приводим таблицу несколько округленных значений абсолютной шероховатости K , вычисленных Мизесом:

Абсолютная шероховатость K .

Материал	$10^8 K$ (в м)	$10^4 \sqrt{K}$ (в м ^{1/2})
Стекло	от 6,4 до 25,6	от 2,5 до 5,1
Тянутые латунь, свинец, медь	„ 6,4 „ 32,0	„ 2,5 „ 5,7
Цемент шлифованный	„ 240 „ 480	„ 15,5 „ 22
„ необработанный	„ 640 „ 1280	„ 25 „ 36
Резиновые рукава обыкновенные	„ 200 „ 400	„ 14 „ 20
„ „ шероховатые	„ 480 „ 960	„ 22 „ 30
Железо	„ 640 „ 1600	„ 25 „ 40
Жесть или чугун, асфальтированные	„ 950 „ 1900	„ 30 „ 44
Чугун, новые трубы	„ 3200 „ 6400	„ 60 „ 80
„ старые „	„ 8000 „ 16000	„ 90 „ 126
Жесть	„ 6400 „ 16000	„ 80 „ 126
Дерево	„ 1600 „ 3200	„ 40 „ 57
Каменные стены из тесанного камня	„ 6400 „ 12000	„ 80 „ 110
Бутовая кладка, скала	„ 64000 „ 120000	„ 250 „ 360

Из всех приведенных формул четвертая, благодаря члену, зависящему от шероховатости, наиболее полно учитывает условия движения воды в трубопроводах, и поэтому при вычислениях лучше всего пользоваться ею.

V. Другие формулы. Кроме приведенных формул, до известной степени теоретически обоснованных, существует еще много других, выведенных чисто эмпирическим путем. Получаются они следующим образом: за форму закона они принимают произвольное алгебраическое выражение, одночленное и многочленное, и определяют входящие в это выражение коэффициенты и показатели степеней так, чтобы получившаяся в результате формула как можно точнее передавала определенный ряд наблюдений. Теория наименьших квадратов дает наиболее общий метод для решения этой задачи. Отдельные формулы, полученные таким путем, порою употребляются, но ни одна из них не имеет общего значения.

46. Расчет трубопроводов. Равенства (197) и (198) вместе с одной из четырех формул п. 45 для λ дают два уравнения между четырьмя величинами Q , V , D и I , так что только две из них требуют предварительного задания, другие же две определяются из системы уравнений. Проще всего,

конечно, вести вычисления, пользуясь для λ формулой I, но зато при этом результаты получаются далеко не точные. Пользование же другими формулами требует значительно более трудных выкладок. Поэтому при практических вычислениях принято поступать так: искомую величину, например, D , определяют сначала, пользуясь для λ формулой I; найденное значение D подставляют в одну из трех других формул (II, III или IV) и находят отсюда более точное значение для λ ; при помощи этого λ вновь определяют уже более точное значение для D , опять подставляют это значение в одну из формул и т. д. Повторяют этот прием до тех пор, пока получающиеся последовательные значения D будут мало отличаться друг от друга; большей частью оказывается достаточным повторить указанные вычисления один, два раза.

Итак, весь расчет трубопровода сводится к определению правильного значения λ .

Оставляя временно λ неопределенным, получаем из равенств (197) и (198)

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \sqrt{\frac{4Q}{2g \lambda}};$$

решим это уравнение относительно D ; найдем, подставив вместо

$$\sqrt{\frac{8}{\pi^2 g}} = 0,607;$$

$$D = 0,607 \sqrt[5]{\lambda} \cdot \sqrt[5]{\frac{Q^2}{I}} \dots \dots \dots (206)$$

Полагая $\lambda = 0,03$, получим из равенств (197) и (198):

$$DI = 0,00154 V^2, \quad Q = \frac{D\pi^2}{4} \cdot V = 20 \sqrt{D^3 I}.$$

Если две из четырех величин Q , V , D и I известны, то при решении соответствующих систем уравнений могут встретиться следующие возможности:

$$\left. \begin{aligned} Q &= 20 \sqrt{D^3 I} = 0,785 D^2 V = 0,00000187 \frac{V^5}{I^2}, \\ D &= 0,302 \sqrt[5]{\frac{Q^2}{I}} = 0,00154 \frac{V^2}{I} = 1,128 \sqrt{\frac{Q}{V}}, \\ I &= 0,0025 \frac{Q^2}{D^5} = 0,00154 \frac{V^2}{D} = 0,00137 \sqrt{\frac{V^5}{Q}}, \\ V &= 25,5 \sqrt{DI} = 1,27 \frac{Q}{D^2} = 14,0 \sqrt[5]{QI^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (207)$$

Приведенные решения являются первыми приближениями, которыми уже пользуются для дальнейших, более точных вычислений. Ниже приведены примеры, в которых показано, как вести вычисления; в них применены все формулы I—IV и полученные результаты отмечены соответствующими римскими цифрами.

а) Даны две из трех величин Q , V , D ; определить третью и I .

Пример 60. $Q = \frac{1}{3}$ м/сек., $V = 1,2$ м/сек., $T = 5^\circ \text{C}$, трубы чугунные старые. Из равенства (197) непосредственно получаем: $D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}} = 0,594$ м. Конечно удобнее взять $D = 0,6$ м; тогда соответствующее значение скорости будет: $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 1,18$ м/сек.

Теперь находим I :

$$I \lambda = 0,003, \quad I = \lambda \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{V^2}{g2} = 0,00354 \text{ (слишком велико!)}.$$

$$\text{II } \lambda = 0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{1,18 \cdot 0,6}} = 0,022, I = 0,0026.$$

$$\text{III } \lambda = \frac{0,0180}{\sqrt{1,18 \cdot 0,6}} = 0,0196, I = 0,0023.$$

$$\text{IV } \lambda = 0,01 + \frac{90}{10^4 \sqrt{0,6}} + \frac{0,0023}{\sqrt{1,18 \cdot 0,6}} = 0,0242, I = 0,0029.$$

Пример 61. Мощность, необходимая для работы водопровода. Для работы горизонтально проложенного водопровода требуется определенный уклон; его величина определяется равенством (198) где для λ берется одно из значений, даваемых формулами I — IV. Длине водопровода l соответствует высота потери $h = \Pi$, для преодоления которой необходима мощность L [кВт/сек.] = $\gamma Qh = \gamma Q \Pi$, или в лошадиных силах

$$N \text{ (л. с.)} = \frac{L}{75} = \frac{\gamma Q \Pi}{75} \dots \dots \dots (208)$$

Для данных примера 55, т. е. для $Q = \frac{1}{3}$ м³/сек., $I = 0,0029$ и при длине водопровода $l = 500$ м, требуемая мощность

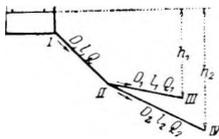
$$N = \frac{1000 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,0029 \cdot 500}{75} = 6,45 \text{ л. с.}$$

Пример 62. Расчет разветвленного водопровода по формуле Дюпюи производится следующим образом. При помощи формулы (207) для I , определяется высота сопротивления для каждой ветви водопровода; затем каждая из этих высот складывается с высотой сопротивления главной магистрали, и полученные суммы приравниваются разностям высот между верхним уровнем и местом окончания каждой из ветвей.

а) Дано разветвление, изображенное на черт. 102; известны $h_1, h_2, l, l_1, l_2, Q, Q_1, Q_2$, найти D_1, D_2 .

Третья из формул (207), будучи применена к ветвям водопровода I—II—III и I—II—IV, дает

$$h_1 = 0,0025 \left[\frac{Q^2 l}{D^5} + \frac{Q_1^2 l_1}{D_1^5} \right], \quad h_2 = 0,0025 \left[\frac{Q^2 l}{D^5} + \frac{Q_2^2 l_2}{D_2^5} \right];$$

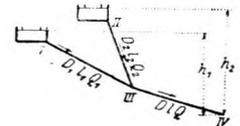


Черт. 102.

отсюда:

$$D_1 = \sqrt[5]{\frac{Q_1^2 l_1}{400 h_1 - \frac{Q^2 l}{D^5}}},$$

$$D_2 = \sqrt[5]{\frac{Q_2^2 l_2}{400 h_2 - \frac{Q^2 l}{D^5}}}.$$



Черт. 103.

б) Для трубопровода с устройством, изображенным на черт. 103, даны $l, l_1, l_2, D, D_1, D_2, h_1, h_2$. Найти Q_1, Q_2 .

Заметив, что $Q = Q_1 + Q_2$, найдем по предыдущему:

$$h_1 = 0,0025 \left[\frac{(Q_1 + Q_2)^2 l}{D^5} + \frac{Q_1^2 l_1}{D_1^5} \right], \quad h_2 = 0,0025 \left[\frac{(Q_1 + Q_2)^2 l}{D^5} + \frac{Q_2^2 l_2}{D_2^5} \right].$$

Получили для Q_1 и Q_2 два квадратные уравнения, которые и надлежит решить. Формула Дюпюи применяется также для расчета наиболее выгодного в экономическом отношении диаметра трубопровода при наличии определенных условий о стоимости постройки и эксплуатации установки.

Так как формулы II и IV относительно D (а также и V) имеют довольно сложный вид, предпочитают определять D (или V) сначала из формулы I, а затем уже, пользуясь методом последовательных приближений, применяют для нахождения D (или V) формулу II или IV. Формула III позволяет определять D (или V) непосредственно; действительно, из равенств (197 и 202) получаем:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \left(\frac{2g}{a} \right)^{\frac{4}{7}} \cdot I^{\frac{4}{7}} \cdot D^{\frac{5}{7}}; \dots \dots \dots (209)$$

получившееся выражение, однако, настолько сложно, что и в этом случае лучше пользоваться методом последовательных приближений, повторяя

вычисления до тех пор, пока колебания между последовательными значениями определяемой величины не станут достаточно малыми.

б) Даны Q, I , определить D и V .

Пример 63. $Q = 0,5 \text{ м}^3/\text{сек.}$, $h = 18 \text{ м}$, $l = 1200 \text{ м}$, следовательно $I = \frac{h}{l} = 0,015$; трубы железные. Сначала определяем D по формуле I и равенству (206):

$$D = 0,302 \sqrt[5]{\frac{Q^2}{I}} = 0,53 \text{ м}; \quad V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2,26 \text{ м/сек.}$$

Теперь из формулы IV (205) находим: $\lambda = 0,01 + \frac{80}{10^4 \sqrt{0,53}} + \frac{0,0018}{\sqrt{2,26 \cdot 0,53}} = 0,0227$.

Из равенства (206) вторично определяем значение D , на этот раз более точное:

$$D = 0,607 \sqrt[5]{\lambda} \cdot \sqrt[5]{\frac{Q^2}{I}} = 0,5 \text{ м},$$

и соответствующая скорость $V = 2,54 \text{ м/сек.}$

Вычисляя по полученному значению D еще раз λ , получим: $\lambda = 0,023$, а при помощи этого значения λ получим для D и V почти те же значения, что и раньше.

с) Даны D и I , определить V и Q .

Пример 64. В водоотливной штольне, сделанной в естественной скале, $D = 2 \text{ м}$, $I = 0,001$. Найти V и Q .

I. По формуле (207) при $\lambda = 0,03$; $V = 25,5 \sqrt{DI} = 1,14 \text{ м/сек.}$

IV. Находим теперь более точное значение λ по формуле (205):

$$\lambda = 0,01 + \frac{250}{10^4 \sqrt{2}} + \frac{0,0023}{\sqrt{1,14 \cdot 2}} = 0,0293 \cong 0,03.$$

Значит, при большом диаметре штольни, сделанной в естественной скале, формула (205) дает для λ значение, совпадающее со значением, предложенным Дюпюи. Наконец, находим Q :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot V = 3,58 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

е) Даны V и I , найти D и Q .

Пример 65. В скалистом грунте водохранилища требуется сделать водоспускное отверстие так, чтобы уклон был равен $I = 0,005$, а скорость течения воды $V = 1,14 \text{ м/сек}$ (та же, что и в примере 64). Определить D и Q .

I. Формула (207) для $\lambda = 0,03$ дает: $D = 0,00154 \frac{V^2}{I} = 0,4$. Теперь из формулы IV получаем во втором приближении:

$$\lambda = 0,01 + \frac{250}{10^4 \sqrt{0,4}} + \frac{0,0028}{1,14 \cdot 0,4} = 0,0551$$

и

$$D = \lambda \cdot \frac{1}{I} \cdot \frac{V^2}{2g} = 0,73 \text{ м};$$

далее в 3 приближении: $\lambda = 0,0426$, $D = 0,567 \text{ м}$,

" 4 " " : $\lambda = 0,0458$, $D = 0,605 \text{ м}$.

Диаметр следует взять равным 0,6 м, и искомый расход равен

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot V = 0,322 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

Случай задания величин V и I на практике встречается очень редко.

47. Местные сопротивления в трубопроводах. Вышеприведенные формулы служат для подсчета потерь на трение в прямых участках цилиндрических труб. Однако прокладка и пользование трубопроводами требуют различных приспособлений, как то: колен для поворота труб, расширений, сужений и разных регулирующих приборов, вроде кранов, задвижек, вентиляей и пр.; вполне ясно, что каждое такое приспособление вызывает потерю мощности и уменьшение скорости воды в трубе. Определение этих потерь чисто теоретическим путем при современном состоянии гидромеханики — невозможно. Дело в том, что их вели-

чина обуславливается характером движения воды вблизи рассматриваемого приспособления, а картину этого движения мы можем представить себе только очень и очень приближенно. Поэтому для определения местных потерь приходится прибегать к экспериментальным исследованиям.

В находящихся в употреблении технических справочниках (Foerster, Dubbel, Hütte) даны самые подробные указания о величине всех местных сопротивлений, возникающих в трубопроводах от различных приспособлений. Для каждой отдельной потери указывается соответствующая ей высота, выраженная в части скоростной высоты $\frac{V^2}{2g}$. Уравнение давления Д. Бернулли, дополненное членом, выражающим эти потери, имеет вид:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + h = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + (\text{сумма всех высот потерь } \Sigma h_w), \dots \dots \dots (210)$$

где индексы „0“ и „1“ относятся к месту входа и выхода воды, а h обозначает имеющуюся в распоряжении разность высот.

Этим уравнением можно воспользоваться для приближенного определения скорости в трубопроводе при наличии в нем определенных приспособлений, вызывающих местные потери. Для этого все скорости, входящие в выражения для высот потерь, при помощи уравнений неразрывности выражаются через скорость в трубе, которая, таким образом, остается единственным неизвестным в выше написанном уравнении. Впрочем необходимо заметить, что сопротивление, вызываемое трением, на много больше всех остальных сопротивлений, так что при более или менее длинном трубопроводе можно пользоваться без всяких опасений формулами п. 46 и при наличии в трубе приспособлений, вызывающих местные потери, правда, при условии, чтобы эти потери не были выше обычных.

Укажем наиболее важные местные сопротивления.

1. Сопротивление при истечении из трубы или при входе в нее:

а) при хорошо закругленных отверстиях, согласно формуле (57),

$$h_w = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad \zeta = 0,065; \dots \dots \dots (211)$$

б) при отверстиях с острыми краями ($\mu \cong 0,60$) $\zeta = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) = 1,78$.

2. Внезапное расширение трубы сечения от F_1 до сечения F . Согласно формуле (134)

$$h_w = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad \zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \dots \dots \dots (212)$$

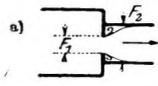
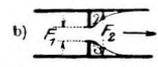
При постепенном расширении высота потери может быть представлена формулой:

$$h_w = (\text{от } 0,12 \text{ до } 0,2) \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1 \right] \frac{V^2}{2g} \dots \dots \dots (213)$$

3. Сужение трубы диафрагмой вызывает потерю потому, что благодаря присутствию диафрагмы струя жидкости сначала суживается, а потом опять расширяется до полного поперечного сечения трубы. Положив

$$h_w = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g},$$

следующий ряд значений (по Вейсбаху):

а) 	$\frac{F_1}{F_2} = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	а) $\zeta = 232$	51	20	9,6	5,3	3,1	1,9	1,2	0,74	0,48
б) 	б) $\zeta = 226$	48	17,5	7,8	3,8	1,8	0,8	0,3	0,06	—

Черт. 104.

Если в случае б) поперечное сечение сжатой струи положить равным αF_1 , то коэффициент сопротивления можно представить формулой, аналогичной формуле (212):

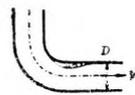
$$\zeta = \left(\frac{F_2}{aF_1} - 1\right)^2; \dots\dots\dots (214)$$

числовые же значения ряда б) по Вейсбаху можно объединить в формулу:

$$\alpha = 0,63 + 0,37 \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^3 \dots\dots\dots (215)$$

4. Закругления вызывают сопротивление по двум причинам: во-первых, сразу за поворотом происходит отставание струи жидкости от стенки трубы, отчего образуется пространство, заполненное вихрями; во-вторых, после поворота на довольно значительном протяжении трубы течение воды принимает усиленно беспорядочный характер; оба же эти явления, как известно, вызывают потерю энергии.

а) Для прямоугольных закруглений (черт. 105, D — диаметр, R — радиус кривизны средней линии) коэффициенты сопротивления равны:



Черт. 105.

при круглом сечении трубы $\zeta = 0,13 + 0,16 \left(\frac{D}{R}\right)^{3,5}$
 „ „ „ „ „ „ $\zeta = 0,2 + 0,27 \left(\frac{D}{R}\right)^{3,5} \dots\dots\dots (216$

Выполняя вычисления для ряда значений $\frac{D}{R}$, получим таблицу:

круглое сечение	{	$\frac{D}{R} = 0,1$	0,4	0,8	1,0	1,4	1,8	2,0
		$\zeta = 0,13$	0,14	0,21	0,29	0,66	1,41	1,98
		$\zeta = 0,12$	0,15	0,29	0,40	1,01	2,27	3,23

Для нормализованных закруглений $\frac{D}{R} = 0,1$.

Для закруглений с углом δ° за коэффициент сопротивления можно брать величину $\zeta \cdot \frac{\delta^\circ}{90^\circ}$.

б) для колен с углом δ (черт. 106) по Вейсбаху

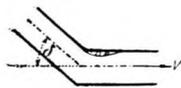
$$\zeta = \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2 \sin^4 \frac{\delta}{2} \dots\dots\dots (217)$$

т. е. для

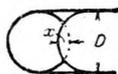
{	$\delta =$	20°	40°	60°	80°	90°	120°	140°
{	$C =$	0,05	0,14	0,36	0,74	0,98	1,86	2,43

5. Задвижка в круглой трубе (черт. 107).

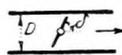
{	$\frac{x}{D} =$	0 (открыта)	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
{	$\zeta =$	0,05	0,08	0,8	1,5	3,0	8,6	20	98	∞



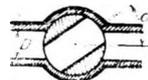
Черт. 106.



Черт. 107.



Черт. 108.



Черт. 109

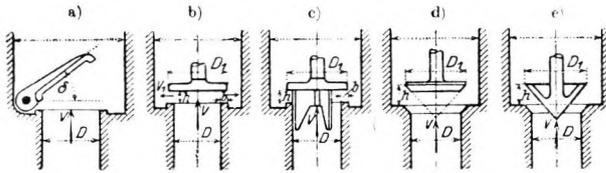
6. Дроссельный клапан в круглой трубе (черт. 108)

{	$\delta =$	5°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°
{	$\zeta =$	0,24	0,52	1,54	3,91	10,8	18,7	32,6	118	751

7. Кран в круглой трубе (черт. 109):

{	$\delta =$	5°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	65°
{	$\zeta =$	0,05	0,29	1,56	5,17	17,3	31,2	52,6	206	486

8 Вентили. Нижеприведенные формулы для сопротивлений, вызываемых вентилями, относятся исключительно к вентилям в прямых участках цилиндрических труб. Для сопротивлений же, вызываемых всевозможными конструкциями вентилях в больших водоводах, примыкающих к насосам, и в трубопроводах для гидравлических силовых установок общих формул не имеется.



Черт. 110.

Пусть D —диаметр трубы, h —высота подъема вентиля; коэффициенты сопротивления для различных вентилях, изображенных на чертеже 110 а) — равны:

а) шарнирный вентиль (клапан).

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = 15^\circ \quad 20^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 70^\circ \\ \zeta = 90 \quad 62 \quad 30 \quad 9,5 \quad 3,2 \quad 1,7 \end{array} \right.$$

б) тарелочный клапан без нижней направляющей:

$$\zeta = \alpha + \beta \left(\frac{D}{h}\right)^2 \dots \dots \dots (218)$$

где $\alpha = 0,55 + \frac{4(b-0,1 \cdot D)}{D}$, $\beta = 0,15$ для узких и $0,16$ для широких стыков;

в) тарелочный клапан с нижней направляющей:

$$\zeta = \alpha + \beta \left[\frac{D^2}{(\pi D - \pi c) h} \right]^2 \dots \dots \dots (219)$$

где α надо давать значения из б), увеличенные в $0,8$ — $1,6$ раз, β — в $1,7$ — $1,75$ раз; πc есть общая ширина опорных выступов, измеренная по окружности πD ;

г) конический вентиль с плоским дном:

$$\zeta = 2,6 - 0,8 \frac{D}{h} + 0,14 \left(\frac{D}{h}\right)^2 \dots \dots \dots (220)$$

е) конический вентиль с коническим дном:

$$\zeta = 0,6 + 0,15 \left(\frac{D}{h}\right)^2 \dots \dots \dots (221)$$

Общность приведенных здесь формул для ζ проистекает оттого, что сопротивление, вызываемое вентилем, сначала представляют в форме $\zeta \cdot \frac{V^2}{2g}$, т. е. зависящим от скорости протекающей жидкости; затем это сопротивление разлагают на два: одно, зависящее от скорости V , и другое, зависящее от скорости V_1 по другую сторону вентиля (см., например, черт. 110-б):

$$\zeta \frac{V^2}{2g} = \alpha \frac{V^2}{2g} + \beta \frac{V_1^2}{2g}$$

Присоединяя к этому уравнению еще уравнение неразрывности

$$V \cdot \frac{D\pi^2}{4} = V_1 \cdot \pi D h,$$

получаем формулу для ζ : $\zeta = \alpha + \beta' \left(\frac{D}{h^4}\right)^2 = \alpha + \beta \left(\frac{D}{h}\right)^2$, которая хорошо подтверждается опытами (С. Bach).

9. Разветвление трубы. Если скорость в ответвленной трубе равна V_1 высота сопротивления, вызываемого ответвлением, приближенно представится формулой (по Maillet и Gènieys):

$$h_w = 2 \frac{V_1^2}{2g} \dots \dots \dots (222)$$

10. Всасывающая коробка с обратным клапаном:

$$\begin{cases} D = 0,04 & 0,07 & 0,1 & 0,15 & 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0,75 \\ \zeta = 12 & 8,5 & 7 & 6 & 5,2 & 3,7 & 2,5 & 1,6 \end{cases}$$

Определение коэффициента сопротивления какого-нибудь приспособления (вентиля и т. п.) производится следующим образом: испытуемое приспособление вставляется в предназначенный для опыта трубопровод, по которому начинают пропускать воду, но так, чтобы ее движение было установившимся. Пусть h — пьезометрическая высота, ζ_0 — коэффициент сопротивления трубопровода без приспособления, коэффициент сопротивления которого нужно определить, V, V_0 — скорости течения при наличии приспособления и без него. Тогда будем иметь уравнения:

$$h = (1 + \zeta_0 + \zeta) \frac{V^2}{2g}, \quad h = (1 + \zeta_0) \frac{V_0^2}{2g} \quad (V_0 > V).$$

Скорости V_0 и V определяются измерением или взвешиванием количества протекающей массы воды. Если h при обоих испытаниях одно и то же, получаем из этих уравнений:

$$\zeta = 2gh \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_0^2} \right) \dots \dots \dots (223)$$

Совершенно таким же путем производится опытное определение коэффициента трения λ в трубе. Измеряя в прямой цилиндрической трубе, предназначенной для опыта, величины h, l, V и D , найдем из равенства (198):

$$\lambda = \frac{2ghD}{lV^2} \dots \dots \dots (224)$$

Пример 66. Определить мощность центробежного насоса, подающего в минуту 3600 л воды с глубины 2 м на высоту 15 м. Известны: $D = 180$ мм, $l = 30$ м; в начале трубопровода находится всасывающая коробка, а в самом трубопроводе имеются 4 закругления и одна задвижка.

Воду надо подымать на высоту $h = 2 + 15 = 17$ м; средняя скорость $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2,36$ м/сек.

Из формулы IV определяем λ : $\lambda = 0,01 + \frac{25}{10^4 \cdot \sqrt{0,18}} + \frac{0,0023}{\sqrt{2,36} \cdot 0,18} = 0,0194$; высота потери вследствие трения в трубе

$$h_t = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = 0,93 \text{ м};$$

для всасывающей коробки, 4 закруглений и задвижки общая высота потери:

$$h_w = (5 + 4 \cdot 0,12 + 0,05) \cdot \frac{V^2}{2g} = 1,58 \text{ м}.$$

Таким образом, полезная мощность насоса N (в лошадиных силах), необходимая для поднятия воды и преодоления сопротивлений, должна быть равна:

$$N = \frac{\gamma Q(h + h_t + h_w)}{75} = \frac{1000 \cdot 0,06 \cdot 19,51}{75} = 15,6 \text{ л. с.}$$

Принимая коэффициент полезного действия насоса $\eta = 0,75$, определим его эффективную мощность:

$$N_e = \frac{N}{0,75} = 20,8 \text{ л. с.}$$

Пример 67. Найти изменение скорости течения жидкости в трубе, вызываемое коническим вентиляем с плоским дном; дано: $\frac{D}{h} = 4$.

Обозначив через V и V_1 скорость в трубе до вентиля и после, получим из уравнения Д. Бернулли:

$$\frac{V}{2g} = (1 + \zeta) \frac{V_1^2}{2g}, \quad V_1 = \frac{V}{\sqrt{1 + \zeta}} \dots \dots \dots (225)$$

По 8д) $\zeta = 2,6 - 0,8 \cdot 4 + 0,14 \cdot 16 = 1,61$. Таким образом $V_1 = \frac{V}{1,62}$.

На ряду с круглыми профилями труб употребляются также овалы и другие, составленные из круговых дуг различных радиусов; для них существуют формулы, аналогичные формулам для круглых труб. Числовые коэффициенты определяются в каждом отдельном случае особыми опытами. Впрочем для этих коэффициентов имеются и эмпирические формулы; они приводятся в различных справочниках (см., например, Weugauch, Hydraulisches Rechnen).

Пример 68. В участке трубопровода с переменным сечением трение определяется формулой того же вида, что и для постоянного сечения, только с другими коэффициентами, найденными опытным путем.

Для канала между лопатками турбинного колеса высоту потери вследствие трения относят к наибольшей скорости и получают для нее следующее выражение:

$$h_r = \zeta_r \cdot \frac{w_2^2}{2g},$$

где w_2 есть скорость воды при выходе из канала. Дополненное уравнение Д. Бернулли представится:

$$\frac{w_1^2}{2g} + h = \frac{w_2^2}{2g} (1 + \zeta_r) \dots \dots \dots (226)$$

Это уравнение можно получить также из выражения для мощности, передаваемой водой равномерно движущемуся каналу. Пусть количество протекающей воды равно Q м³/сек., высота — h ; тогда передаваемая сосуду мощность равна

$$L = \gamma Q h + \gamma Q \left(\frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g} \right) - \zeta_r \gamma Q \cdot \frac{w_2^2}{2g}$$

(сохранены обозначения черт. 75), или, введя скорость u сосуда,

$$L = \frac{\gamma Q}{g} (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2).$$

Из скоростных треугольников при входе и выходе из канала находим:

$$\begin{cases} c_1^2 = w_1^2 + u^2 + 2 w_1 u \cos \beta_1 \\ c_2^2 = w_2^2 + u^2 + 2 w_2 u \cos \beta_2, \end{cases}$$

и отсюда: $c_1^2 - c_2^2 = w_1^2 - w_2^2 + 2 u (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2)$. Приравнявая оба выражения для L , получим уравнение (226).

VIII. Каналы и реки

48. Основные сведения о движении воды в открытых руслах. При теоретическом обосновании законов турбулентного движения жидкости мы встретились с большими затруднениями даже при движении воды в круглой трубе—простейшем профиле. Только благодаря принципу подобия, совершенно выходящему из рамок механики твердого тела, удалось до известной степени преодолеть встретившиеся затруднения. Поэтому не должно быть удивительным, что попытки теоретического вывода законов движения воды в открытых искусственных руслах с другими профилями (полукруг, прямоугольник, трапеция и т. д.), а тем более в естественных руслах, могут дать сомнительные результаты. Все-таки, перенося рассуждения, применявшиеся при изучении движения воды в круглой трубе, на случаи более сложных движений, удается получать формулы и для них, при чем для технических целей эти формулы могут быть признаны удовлетворительными. Формулы эти необходимы, главным образом, для расчета деривационных каналов для вновь устраиваемых гидравлических силовых установок и правильного—с точки зрения техники и экономии—использования существующих источников водной энергии.

В настоящей главе мы не будем различать движений воды в руслах с искусственными и естественными профилями, так как законы движения для того и другого случая тесно связаны друг с другом. Искусственные профили—это такие, которые применяются при устройстве искусственных каналов; большей частью они бывают в форме прямоугольника

или трапеции, реже—полукруга. Законы, выведенные для таких профилей, могут быть применены и для замкнутых профилей, отличных от круглого (например овального и т. п.).

Естественные профили—это поперечные сечения встречающихся в природе ручьев, рек, потоков. Законы движения для всех этих случаев выражаются одинаково построенными простыми формулами.

В нашем изложении, являющемся только введением в обширную теорию открытого русла, нам придется остановиться, главным образом, на установлении закономерных соотношений между геометрическими величинами, характеризующими русло реки или канала—в качестве таковых берется уклон I и одна из величин, зависящих от профиля,—и среднюю скорость V . Тогда, зная V и площадь F профиля, мы будем знать количество протекающей воды или ее расход:

$$Q = FV. \dots \dots \dots (227)$$

Это же уравнение может служить для определения средней скорости по известным Q и F .

Между прочим, движение воды в руслах в целом похоже на движение в круглой трубе. Течение здесь так же, как и в трубе, турбулентное; так же, как и в трубе, происходит прилипание воды к стенкам — берегам и дну. Главное отличие состоит в том, что в открытых руслах у воды имеется свободная поверхность, что, впрочем, для нашего элементарного изложения несущественно.

Что же касается распределения скоростей по поперечному сечению, то не может быть и речи, как это было в случае круглой трубы, о симметрии относительно оси; в лучшем случае, при правильных профилях может быть симметрия относительно вертикальной средней плоскости. Наибольшая скорость в вертикальном сечении бывает или на самой свободной поверхности или вблизи нее, наибольшее из этих наибольших значений—в самой середине русла при правильных профилях и большей частью где-нибудь в стороне — при неправильных.

49. Установившееся движение в каналах и реках. Распределение скоростей и величину разности давлений, необходимую для поддержания ламинарного параллельного течения жидкости через какой-нибудь профиль, можно вычислить, если так же, как и в п. 39, предположить известной форму линий тока и для трения двух соседних слоев жидкости принять опять закон, выражаемый уравн. (157). Тогда для широкого прямоугольного канала эти вычисления можно провести без всяких затруднений, правда, если при этом совершенно не принимать в расчет влияния боковых стенок; распределение скоростей от дна до свободной поверхности изобразится отрезком параболы, а для количества протекающей жидкости получится закон, аналогичный закону Poiseuille'я. Однако, такая форма течения встречается только в очень мелких каналах и при очень небольших скоростях, и поэтому ее практическое значение невелико.

Основанием для вывода общей формулы выражения уклона, необходимого для поддержания в русле течения воды, течения в действительности являющегося турбулентным, послужит опять обстоятельство, уже раз отмеченное нами: при турбулентном течении скорости распределяются по поперечному сечению почти равномерно, за исключением лишь небольшой области у стенок потока, в которой скорость быстро убывает до нулевого значения у самой стенки и которая главным образом и является местом возникновения сопротивления.

При установившемся движении некоторого количества жидкости с длиной l и весом G в русле реки с постоянным уклоном I свободной поверхности, движущая сила равна GI , так как разность давлений в концах участка l можно не принимать во внимание. Эта сила необходима главным

образом для преодоления срезающих усилия τ , возникающих у границ профиля. Если поэтому предположить, что средняя скорость V в реке устанавливается уже в самой близи от границ профиля, и зависимость (191) срезающего усилия от скорости, выведенную в п. 44, представить в форме

$$\tau = cV^\beta, \dots \dots \dots (228)$$



Черт. 111.

то в таком случае

$$GI = \tau \times \text{смачиваемая площадь} = \tau \cdot U \cdot l, \dots (229)$$

где через U обозначен смачиваемый периметр (черт. 111), вдоль которого жидкость соприкасается с берегами и дном. Смачиваемая площадь $U \cdot l$ и вызывает сопротивление движению. Из уравнения (229), заметив, что $G = \gamma Fl$, находим:

$$l = \frac{c}{\gamma} \cdot V^\beta \cdot \frac{U}{F}, \dots \dots \dots (230)$$

Величина $\frac{F}{U} = R$ выражает собою некоторую длину, зависящую от формы профиля, и называется гидравлическим радиусом; она имеет большое значение для расчетов движения воды в руслах. Для прямоугольных профилей гидравлический радиус приближенно можно принять равным глубине, для круглого профиля — половине радиуса.

Полагая в равенстве (230) $\beta = 2$, что соответствует принятию гидравлического закона сопротивления (закона возрастания сопротивления пропорционально квадрату скорости) и заменяя $\left(\frac{\gamma}{c}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ через λ , определим из этого равенства значение V :

$$V = \lambda \sqrt{RI} \dots \dots \dots (231)$$

Эта формула, уже давно известная под названием формулы de Ghézy, показывает, что геометрическими величинами, от которых в существенном зависит V , являются гидравлический радиус R и уклон I . В качестве первого приближения для λ берется постоянное значение $\lambda = 50 = \text{const}$ (Courtois и Eytelwein), 1850 г.).

Пример 69. Профиль, пропускающий наибольшее количество жидкости. Согласно формуле (231), при заданном I наибольшая скорость V , а следовательно, и наибольший расход $Q = FV$, получается при профиле, для которого принимает наибольшее значение гидравлический радиус R . Так как, $R = \frac{F}{U}$, то профилем с наибольшим расходом будет тот, который при заданном F имеет наименьший смачиваемый периметр U , или—при заданном U —наибольшую площадь F . Кривая, обладающая таким свойством, как известно, есть окружность; это изопериметрическое свойство относится и к частям окружности.

Однако в виду трудности выполнения, искусственные профили в виде круга (или части его) не делаются; за форму профиля берут большей частью прямоугольник или трапецию. Тот из них, который пропускает наибольшее количество жидкости, находится способом, известным на теории maxima и minima.

Пусть, например, профиль выбран в виде равнобокой трапеции и задан угол наклона берега α (черт. 112); тогда, если $F = \text{const}$ или дано, должно быть: $U = b + 2s = \text{min}$. Имеем:

$$F = (b + s \cos \alpha) h = b(h + \text{ctg } \alpha) h \text{ или } b = \frac{F}{h} - h \text{ctg } \alpha.$$

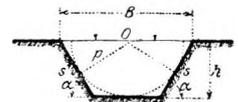
Представим теперь U как функцию одного только h :

$$U = b + 2s = b + 2 \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{F}{h} - h \text{ctg } \alpha + 2 \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Значение h , для которого U принимает наибольшее значение, определится из условия:

$$\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{F}{h^2} - \text{ctg } \alpha + \frac{2}{\sin \alpha} = 0,$$

откуда следует: $h = \sqrt{\frac{F \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}}.$



Черт. 112.

Далее, при помощи предшествующих равенств находим:

$$B = b + 2s \cos \alpha = \frac{F}{h} - h \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2h \operatorname{ctg} \alpha = \frac{F}{h} + h \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2h}{\sin \alpha} = 2s;$$

так как опущенный из O на s перпендикуляр $p = s \sin \alpha = h$, следует, что искомая трапеция описана около полукруга радиуса h с центром в точке O .

Для прямоугольника $\alpha = \pi$ следовательно,

$$h = \sqrt{\frac{F}{2}} = \sqrt{\frac{bh}{2}} \quad \text{или} \quad h = \frac{b}{2}.$$

Если кроме h неопределенной является также и величина угла α , U будет функцией двух переменных, h и α , и значения этих независимых переменных, для которых U принимает минимальное значение, определяется из условий: $\frac{dU}{dh} = 0, \frac{dU}{d\alpha} = 0$. Выполняя дифференциро-

вание, получим: $\frac{dU}{d\alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} = 0$, т. е.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad B = b + s = 2s. \quad b = s,$$

значит, профилем дающим наибольший расход, будет половина правильного шестиугольника, описанного около круга с радиусом h и центром в O .

Постепенно увеличивающаяся точность наблюдений над течением воды в каналах и реках и установление факта, что на скорость течения решающее влияние оказывают свойства берегов и дна, привели к необходимости изменить формулу (231), выведенную на основании самых элементарных соображений, и изменить так, чтобы она учитывала и свойства речного грунта. Такое изменение формулы оказалось возможным сделать тремя способами.

I способ. К правой части формулы (231) присоединяется еще один или несколько членов; их подбирают так, чтобы дополненная формула давала значения, как можно ближе совпадающие с результатами наблюдений. Однако такие формулы (Ргопу и др.) не получили распространения, так как они не учитывают свойств берегов.

II способ. Вид формулы (231) сохраняется, но λ считается уже не постоянной, а функцией, либо R , либо U , либо того и другого. Кроме того, в формулу вводятся величины (одна или несколько), зависящие от свойств речного грунта. Формулы, составленные таким путем, дают значения, хорошо совпадающие с результатами наблюдений в каналах и реках. К их числу принадлежат:

а) формула G a n g u i l l e t - K u t t e r'a:

$$V = \lambda \sqrt{RI}, \quad \text{при чем} \quad \lambda = \frac{23 + \frac{0,00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \dots \dots \dots (232)$$

Величина n , входящая в эту формулу, называется коэффициентом шероховатости. Значения ее приведены в следующей таблице:

	n	$\frac{1}{n}$
1. Каналы с очень гладкими стенками (строганные доски, цементная штукатурка).....	0,01	100
2. Каналы со стенками из нестроганных досок	0,012	83
3. Каналы со стенками, облицованными кирпичом или очень гладко отесанным камнем.....	0,013	77
4. Каналы, облицованные тесаным камнем.....	0,017	59
5. Каналы с земляными стенками, реки, ручьи.....	0,025	40
6. Потоки с большими гальками и водорослями.....	0,030	33

Определение свойств речного грунта, рассматриваемого, с точки зрения механики, как шероховатая поверхность, затрудняется одним обстоятельством, которое вообще всегда встречается при изучении явлений

трения, именно: степень шероховатости удается определить только в зависимости от материала речного дна и берегов, но не от свойств формы поверхности дна и берегов.

б) Новая формула Bazin'a, выведенная на основании многочисленных и тщательных наблюдений:

$$V = \frac{87}{1 + \sqrt{\frac{\beta}{R}}} \sqrt{RI}, \dots (233)$$

где для β следует брать значения из приведенной таблицы.

	$V \beta$	β
1. Строганные доски, цементная штукатурка.....	0,06	0,0036
2. Нестроганные доски, тесаный камень, кирпич.....	0,16	0,0256
3. Бутовая кладка.....	0,46	0,2116
4. Легкий булыжник, слежавшийся плотный земляной грунт, русло, чисто высеченное в скале.....	0,85	0,7225
5. Земляные каналы в хорошем состоянии.....	1,30	1,6900
6. " " с большими гальками и водорослями.....	1,75	3,0625
7. Русла рек с валунами.....	2	4

(и выше).

Эта формула замечательна тем, что отмечает падение влияния шероховатости при увеличении R ; при $R = \infty$ влияние шероховатости совсем исчезает. Так и должно быть в действительности: чем больше R , т. е. чем глубже канал или река, тем менее должно сказываться влияние грунта дна и берегов.

Для полукруглого профиля значения V , даваемые обеими формулами должны быть увеличены на 6 — 10%.

III способ. Формула остается одночленной, но R и I берутся в некоторых степенях, сначала произвольных, а затем уже определяемых на основании наблюдений. Выражения такого вида

$$V = \lambda R^{\alpha} \cdot I^{\beta}, \dots (234)$$

очень удобны (после предварительного логарифмирования) для определения α и β по способу наименьших квадратов при любом числе наблюдений. В последнее десятилетие было предложено большое число таких формул. Последняя из них и, как видно, наиболее удовлетворяющая действительности, предложена Ph. F o g s c h h e i m e r'ом:

$$V = \lambda \cdot R^{0,7} \cdot I^{0,5}, \text{ при чем } \lambda \sim \frac{1}{n} \dots (235)$$

где n коэффициент шероховатости из формулы G a n g u i l l e t - K u t t e r'a (232). При составлении этой формулы использован материал старых наблюдений B a z i n'a и многочисленных новых, произведенных самим F o g s c h h e i m e r'ом.

Эта формула, которая, между прочим, лучше передает наблюдения B a z i n'a, чем его собственная формула (233), дает тот же тип зависимости I от V , что и исходная формула (231) так что всегда, как в искусственных каналах, так и в естественных руслах, следует принимать $I \sim V^2$. Что же касается зависимости I от R , то ее приходится определять только опытным путем; обосновать ее теоретически пока не удастся.

Так как все выведенные здесь формулы выражают V через R и I , то при решении задач могут встретиться 3 случая: даны 1) R, I ; 2) V, R ; 3) V, I ; найти третью величину. Определение V по заданным R и I совершается просто по всем трем формулам, обратная же задача — нахождение I по заданным V и R , по формуле G a n g u i l l e t - K u t t e r'a очень трудна, по формулам же B a z i n'a и F o g s c h h e i m e r'a решается еще довольно просто. Третий случай — определение гидравлического радиуса R по заданным V и I ; непосредственно найти R можно только по формуле F o g s c h h e i m e r'a. При пользовании же другими формулами приходится прибегать к методу последовательных при-

ближений, который уже применялся при расчете трубопроводов. Процесс вычислений разобран в примерах п. 50; при их решении применены все формулы (231), (232), (233), (235) вместе с уравнением неразрывности.

Если дан профиль, составленный из частей различной глубины, которые к тому же могут обладать разными коэффициентами шероховатости, уравнение неразрывности надо составлять для каждой отдельной части профиля. Например для профиля, изображенного на чертеже 113, который при высокой воде заполняется почти весь, уравнение неразрывности представится так:



Черт. 113.

$$Q = F_1 V_1 + F_2 V_2 + F_3 V_3 = [\lambda_1 F_1 \sqrt{R_1} + \lambda_2 F_2 \sqrt{R_2} + \lambda_3 F_3 \sqrt{R_3}] \sqrt{I}. \quad (236)$$

При вычислении гидравлических радиусов R_1, R_2, R_3 граничные линии, отмеченные на чертеже 113 пунктиром, не следует включать в смачиваемые периметры U_1, U_2, U_3 , так как эти линии в действительности не существуют и потому около них не возникает никакого трения; итак в выражения $R_1 = \frac{F_1}{U_1}, R_2 = \frac{F_2}{U_2}, R_3 = \frac{F_3}{U_3}$ надо подставить значения U_1, U_2, U_3 , отмеченные на чертеже пунктирными стрелками.

Для представления о величинах коэффициентов сопротивления $\sqrt{\beta}$ и λ (в формулах Bazin'a Фогсхеймера), на основании действительно произведенных измерений, приводим данные о некоторых реках и ручьях, часть которых взята из Ежегодника Центрального Гидрографического Бюро в Вене.

Наименование рек и ручьев.	Средняя скорость V м/сек	Уклон I	Площадь поперечного сечения M^2	Ширина в м	Смачиваемый периметр U м	Средняя глубина h м	Гидравлическ. радиус $R = \frac{F}{U}$	$\sqrt{\beta}$ по Bazin'у	λ по Forchheimer'у
Польцен у Вартенберга	0,30	0,00075	2,85	3,25	4,63	0,88	0,62	4,1	15,3
Тауерн у Симплана	0,34	0,00175	—	~ 2	—	0,23	0,23	2,0	23,0
Рейн у Базеля	1,94	0,0012	—	—	—	2,10	2,10	1,834	35,2
Дунай у Маритгаузена	1,7	0,00055	750	271	280	2,77	2,68	1,49	38,6
Ладовитцер	0,48	0,00065	1,70	5,20	5,69	0,33	0,3	1,21	43,8

50. Примеры, а) Даны R, I ; найти V, Q .

Пример 70. Определить скорость течения по каналу, прорытому в земле, с профилем в виде трапеции и размерами: $B = 12$ м, $b = 6$ м, $h = 3$ м, следовательно, наклон боковых стенок равен 1 : 1, если $I = 0,0003$.

Находим гидравлический радиус: $R = 1,875$. Формулы предыдущего параграфа дают:

- а) формула de Chézy: $V = 50 \cdot \sqrt{RI} = 1,18$ м/сек.
- б) " Ganguillet-Kutter'a : $\frac{1}{n} = 40, V = \lambda \sqrt{RI} = 45,0 \cdot \sqrt{RI} = 1,065$ м/сек.,
- в) " Bazina: $\sqrt{\beta} = 0,85, V = \frac{87}{0,85} \sqrt{RI} = 53,5 \cdot \sqrt{RI} = 1,265$ м/сек.,
 $1 + \sqrt{R}$
- д) " Forchheimer'a : $\lambda = \frac{1}{n} = 40, V = 40 \cdot R^{0,7} I^{0,5} = 1,072$ м/сек.

Пример 71. В широком и мелком канале с цементными стенками и дном $B = 40$ м, $b = 39$ м, $h = 0,5$ м, следовательно, наклон стенок 1 : 1, $I = 0,02, R = 0,45$.

- а) по формуле de Chézy: $V = 50 \sqrt{RI} = 1,565$ м/сек.
- б) " " Ganguillet-Kutter'a: $\frac{1}{n} = 100, V = 92,4 \cdot \sqrt{RI} = 2,89$ м/сек.

с) по формуле Bazin'a: $\sqrt{\beta} = 0,06$, $V = 80,1 \cdot \sqrt{RI} = 2,5$ м/сек.

д) " " Forchheimer'a $\lambda = \frac{1}{n} = 100$, $V = 100 R^{0,7} I^{0,5} = 2,85$ м/сек.

Из этих примеров видно, что результаты вычислений по формулам Ganguillet-Kutter'a и Forchheimer'a почти совершенно совпадают; формула Bazin'a дает либо слишком малые, либо слишком большие значения; формулу же de Chézy для технических расчетов следует признать непригодной.

б) Даны Q, I ; найти V, R и размеры профиля. Одним гидравлическим радиусом профиль, конечно, не определяется; необходимо знать предварительно форму профиля и его размеры, за исключением одного, который и следует найти.

Пример 72. Найти размеры земляного канала с профилем в форме трапеции, если уклон $I = 0,00003$, а расход должен быть равен $Q = 24$ м³/сек. Глубина профиля должна быть равна $h = 3$ м, а наклон стенок — 1 : 1,5. Значит, из размеров профиля неизвестна только ширина дна или свободной поверхности. Вычисления удобнее всего выполнить способом последовательных приближений. Приводим их (сохранены обозначения черт. 112).

1. По формуле Ganguillet-Kutter'a (232) при $h = 40$ (земля). $\lambda = \frac{114,7}{1 + \left(\frac{1,87}{\sqrt{R}}\right)}$

1 приближение: $R = h = 3$ м $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 55, V = \lambda \sqrt{RI} = 0,522 \text{ м/сек.}, \\ F = \frac{Q}{V} = 46 \text{ м}^2, b = 10,8 \text{ м}, s = 5,4 \text{ м}, \\ U = b + 2s = 21,6 \text{ м}, R = 2,11 \text{ м}. \end{array} \right.$

2 приближение: $R = 2,11$ м $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 50,1, V = 0,398 \text{ м/сек.} \\ F = 60,2 \text{ м}^2, b = 15,57 \text{ м}, U = 26,27 \text{ м}, R = 2,28 \text{ м}. \end{array} \right.$

3 приближение: $R = 2,28$ м $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 51, V = 0,42 \text{ м/сек.}, \\ F = 57 \text{ м}^2, b = 14,5 \text{ м}, U = 25,3 \text{ м}, R = 2,28 \text{ м}. \end{array} \right.$

Отсюда, размеры профиля:

$$B = 23,5 \text{ м}, b = 14,5 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$$

II. По формуле Bazin'a (233) при $\sqrt{\beta} = 1,3$ $\lambda = \frac{87}{1 + 1,3\sqrt{R}}$

1 приближение: $R = h = 3$ м $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 49,6, V = 0,47 \text{ м/сек.}, \\ F = \frac{Q}{V} = 51 \text{ м}^2, b = 12,5 \text{ м}, s = 5,4 \text{ м}, \\ U = b + 2s = 23,3 \text{ м}, R = \frac{F}{U} = 2,2 \text{ м}. \end{array} \right.$

2 приближение: $R = 2,2$ м $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 46,3, V = 0,375 \text{ м/сек.}, \\ F = 64 \text{ м}^2, b = 16,8 \text{ м}, U = 27,6 \text{ м}, R = 231 \text{ м}. \end{array} \right.$

3 приближение: $R = 2,31$ м $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 46,7, V = 0,39 \text{ м/сек.}, \\ F = 61,1 \text{ м}^2, b = 16 \text{ м}, U = 26,8 \text{ м}, R = 2,295 \text{ м}. \end{array} \right.$

Размеры профиля:

$$R = 25 \text{ м}, b = 16 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$$

III. По формуле Forchheimer'a (235) при $\lambda = 40$ $V = 40, R^{0,7} \cdot I^{0,5}$

1 приближение: $R = h = 3$ м $\left\{ \begin{array}{l} V = 0,47 \text{ м/сек.}, F = 51 \text{ м}^2, b = 12,5 \text{ м}, \\ U = 23,3 \text{ м}, R = 2,2 \text{ м}. \end{array} \right.$

2 приближение: $R = 2,2$ м $\left\{ \begin{array}{l} V = 0,38 \text{ м/сек.}, F = 63,2 \text{ м}^2, b = 16,6 \text{ м}, \\ U = 27,4 \text{ м}, R = 2,3 \text{ м}. \end{array} \right.$

3 приближение: $R = 2,3$ м $\left\{ \begin{array}{l} V = 0,39 \text{ м/сек.}, F = 61,2 \text{ м}^2, b = 15,9 \text{ м}, \\ U = 26,7 \text{ м}, R = 2,3 \text{ м}. \end{array} \right.$

Размеры профиля: $B = 25$ м, $b = 16$ м, $h = 3$ м.

с) Даны Q, R , и а й т и V, I . И в этом случае должны быть даны более подробные указания о профиле, при чем они должны удовлетворять условию: давать заданное значение гидравлического радиуса R .

Если за форму профиля взята трапеция с высотой h и наклоном стенок 1 : 1, тогда:

$$F = Bh - h^2, U = B - 2h + 2h\sqrt{2} = B + 0,83h; \quad R = \frac{F}{U} = \frac{Bh - h^2}{B + 0,83h},$$

откуда

$$B = h \cdot \frac{h + 0,83R}{h - R} \dots \dots \dots (237)$$

Пример 73. Найти уклон канала с профилем в виде трапеции и с наклоном боковых стенок 1 : 1, если количество протекающей воды $Q = 20 \text{ м}^3/\text{сек}$, $R = 1 \text{ м}$. Дно и стенки канала цементные.

Если высоту профиля взять равной 1,4 м, тогда по формуле (237) найдем: $B = 7,8 \text{ м}$; следовательно, ширина дна $b = B - 2 \cdot 1,4 = 5 \text{ м}$. При этих размерах смачиваемый периметр

$$U = 8,96 \text{ м}, F = 8,96 \text{ м}^2, \text{ откуда } V = \frac{Q}{F} = 2,93 \text{ м/сек}.$$

Из формулы Forchheimer'a (235) взяв $\lambda = 100$, получаем :

$$I = \frac{V^2}{\lambda^2 \cdot R^{1,4}} = 0,005.$$

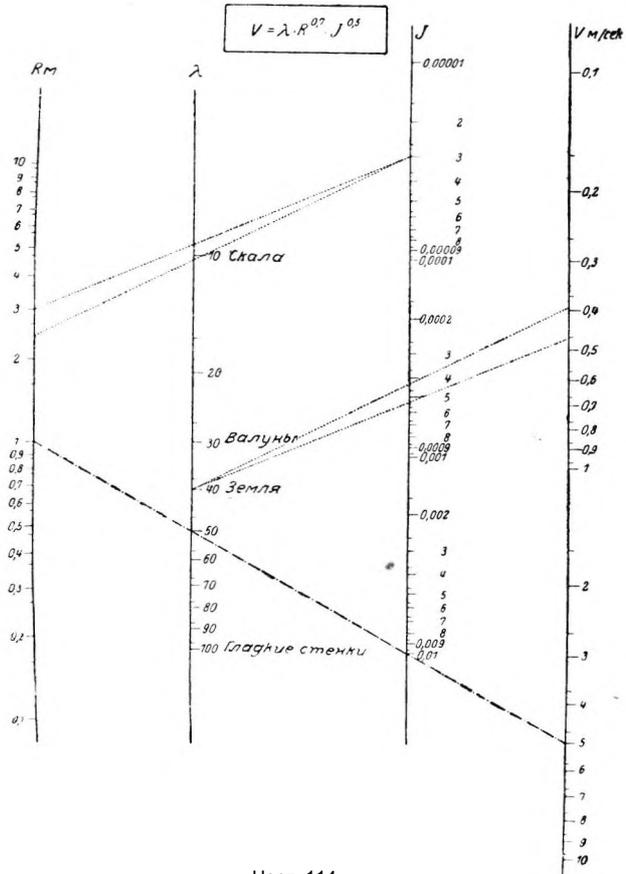
Вычисления по двум другим формулам производятся подобным же образом.

Задачи о движении воды в закрытых каналах произвольной формы, при полном или частичном их наполнении, решаются на основании соображений, аналогичных приведенным для открытых каналов. За более подробными указаниями отсылаем к работам Weugauch'a.

Как уже было сказано, приведенные нами формулы в теоретическом отношении не вполне удовлетворительны; но самую форму их все-таки можно считать теоретически обоснованной. На ряду с этими формулами имеется большое количество еще других, даже и формой своей не связанных с теорией; из них наиболее известной является формула Siedek'a, дающая весьма сложную зависимость скорости V от уклона I , ширины B свободной поверхности воды в канале, глубины h и еще нескольких величин, определяемых опытным путем. Не останавливаемся на ней, так как она по своей годности для практических расчетов далеко уступает приведенным одночленным формулам.

51. Употребление номограмм. При вычислениях по формулам типа (235), крайне полезными для облегчения работы оказываются логарифмические диаграммы, так называемые номограммы, составляемые различными способами.

На черт. 114 помещена такая номограмма для формулы Forchheimer'a. Построена она следующим образом: формула логарифмируется, и для каждого переменного V, λ, I, R вычерчивается логарифмическая шкала подобно той, что имеется на обыкновенной счетной линейке. Что касается выбора масштаба для отдельных шкал, проще всего поступить так: вычисляем две группы соответственных



Черт. 114.

значений переменных V , λ , R , I ; за первую группу можно взять, например, значения $R = 1$, $\lambda = 50$, $I = 0,01$, $V=5$, которые и располагаются на одной прямой линии (черт. 114). Второй группой соответственных значений определяются масштабы всех четырех шкал.

Диаграмма на чертеже 114 построена так, что произведению $R^{0.7} \cdot I^{0.5}$ соответствует бесконечно удаленная точка прямой, соединяющей соответственные точки R и I обеих шкал. Каждому значению произведения соответствует определенное направление; поэтому возрастание величин на обеих шкалах должно идти в противоположных направлениях. Чтобы умножить это произведение на определенное значение λ , проводят через соответствующую точку шкалы λ прямую, параллельную отрезку, соединяющему точки R и I , до пересечения со шкалой V . Точка пересечения даст искомую скорость V .

Результаты вычислений, сделанных в предшествующих примерах, при пользовании этой номограммой получаются гораздо быстрее. Заданные в примере 67 значения $R = 3$ (или 2,3), $I = 0,00003$, $\lambda = 40$ определяют прямые, которые пересекают шкалу скорости в точке $V=0,47$ (или 0,39). Эти прямые, отмеченные на черт. 114 пунктиром, в действительности, конечно, не проводятся.

52. Определение расхода (количества протекающей жидкости). Непрерывно продолжающееся экономическое развитие всех культурных стран и связанное с этим истощение угольных запасов привели к необходимости наилучшего использования имеющихся в природе водных сил. Предварительным шагом к использованию источников этих сил является точный подсчет их энергии. Каждая форма энергии является производением двух факторов: интенсивности и количества. Интенсивность энергии движущейся воды измеряется разностью высот (напором) между верхней и нижней точками потока, подобно тому, как при тепловом обмене интенсивность измеряется разностью температур; количество же энергии движущейся жидкости определяется ее расходом в русле канала или реки. Разность высот определяется нивелировкой, так что в дальнейшем этого вопроса касаться больше не будем.

Что же касается определения расхода, то для этого во вновь прорываемых каналах служат формулы, приведенные в п. 49. При определении же расхода в естественных руслах эти формулы дают результаты, недостаточно надежные, особенно, если принимать во внимание разницу количеств воды, зависящую от времен года, сильных атмосферных осадков, сильных засух и т. д. В этих случаях, а также при контрольных наблюдениях за течением воды в уже построенных деривационных каналах необходимо прибегать к непосредственному измерению расхода, или, что то же самое, — к измерению средней скорости.

Из наиболее старых измерительных приборов для этих целей следует упомянуть о различных поплавках, из них в особенности — о гидрометрическом шесте и двойном шаре. Они дают среднее значение скорости в вертикальной плоскости быстрого течения на протяжении определенного участка течения. Результатами таких измерений в случае нужды можно пользоваться только для профилированных каналов, но отнюдь не для естественных русел. Другие же из старых измерительных приборов, как, например, водяной флюгер, гидрометрический маятник и др., дают показания, относящиеся к определенному месту русла, но точность этих приборов тоже весьма незначительна.

Однако, рациональное использование водных сил требует точного определения расхода воды; этого можно достичь измерением скорости в достаточном количестве точек, взятых по всему поперечному сечению русла. Имеется только два измерительных прибора, позволяющих производить наблюдения с требуемой точностью и надлежащей быстротой: трубка Пито и гидрометрическая вертушка

(вертушка В о л ь т м а н а); при измерениях в природных условиях приходится пользоваться почти исключительно различными конструкциями вертушек.

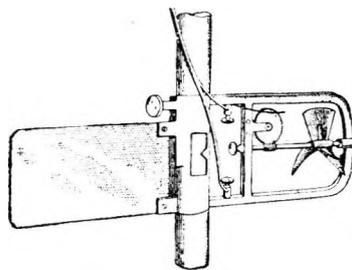
1. Трубка Пито (п. 17, пример 30) представляет из себя согнутую под прямым углом трубку, одно колено которой, устанавливаемое против течения, у конца сужено. Жидкость в этой трубке находится в покое и в вертикальном колене, сделанном из стекла, устанавливается на некоторой высоте, превышающей высоту свободной поверхности текущей воды. Это превышение, отсчитываемое по шкале, помещенной на другой стеклянной трубке, установленной вертикально рядом с первой, но не изогнутой, и служит мерою скорости в рассматриваемом месте.

2. Гидрометрическая вертушка представляет из себя небольшой гребной винт, ось которого вращается на шариковых подшипниках (черт. 115). Число оборотов ее за определенный промежуток времени подсчитывается при помощи зубчатой передачи и электрического контактного приспособления.

Число оборотов n в единицу времени (в секунду) и является мерой скорости V в рассматриваемом месте. Так как каждая вертушка вследствие своего собственного трения начинает давать показания только при определенной конечной скорости V_0 , то действительная скорость V будет определяться формулой:

$$V = V_0 + an. \dots \dots \dots (238)$$

Постоянные V_0 и a определяются для каждой вертушки опытным путем и отмечаются на вертушке или в приложенном аттестате. Чтобы вертушка устанавливалась по потоку, к ней сзади приделана тонкая пластинка, действующая наподобие руля.

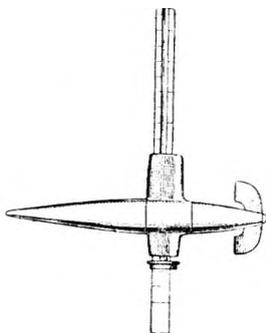


Черт. 115.

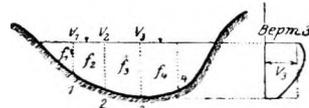
Для повышения точности наблюдений в последнее время употребляются электрические вертушки (системы DBF—Dubs, Bitteri, Fischer); протекающая вода, вращая пропеллер вертушки, приводит в действие маленькую динамомашину; величина получающегося тока указывается очень чувствительным гальванометром; вертушка же устраивается так, что показания гальванометра прямо пропорциональны скорости течения V . Такая конструкция создает возможность отсчета мгновенных значений скорости V .

Для того, чтобы прибор возможно меньше нарушал вокруг себя течение воды, он заключается в удобообтекаемую оболочку, из которой наружу выходит только пропеллер (черт. 116). Из этих же соображений „профилируется“ и стержень, к которому прикреплена вертушка (см. п. 56, 3).

Для измерения расхода поперечное сечение реки или канала разбивают на части достаточным количеством вертикалей и определяют вертушкой скорости в нескольких местах каждой вертикали (черт. 117). По полученным значениям V_1 и $V_2\dots$ определяется средняя скорость на каждой вертикали; тогда за средние скорости течения воды для площадей f_1, f_2, \dots , лежащих между последовательными вертикалями, можно принять соответственно величины $\frac{V}{2}, \frac{V_1 + V_2}{2}$ и т. д., и весь расход представится суммой:



Черт. 116.



Черт. 117.

$$Q = \sum_i f_i \frac{(V_{i-1} + V_i)}{2} \dots \dots \dots (239)$$

Можно поступить еще иначе: последовательно соединяют точки поперечного сечения с одинаковыми скоростями; измеряют площади, заключенные внутри получившихся кривых — изотах, и умножают их на разности скоростей между соседними кривыми. Сумма этих произведений и дает величину расхода.

В последнее время изобретены приборы, позволяющие вести автоматическую запись расхода и, благодаря этому, точнее следить за его колебаниями. Такую возможность, правда, только для каналов с искусственными профилями дает измерительная решетка Фебинга; в этом приборе расхода определяется силой, с которою вся протекающая масса воды действует на решетку, вращающуюся около оси и усаженную маленькими удобообтекаемыми телами.

53. Кривая подпора для прямоугольного профиля. В предыдущем параграфе при изучении движения воды в естественных руслах предполагалась равномерность этого движения и неизменность профиля. Однако, во многих случаях является необходимым рассматривать ускоренное или замедленное движение. Наиболее важный пример такого рода дает движение, вызываемое запрудой реки при помощи плотины (п. 23). Плотины устраиваются для искусственного повышения уровня воды в целях более лучшего использования ее энергии. Достигаемое плотиной повышение уровня — по сравнению с естественным его положением — называют высотой подпора. Это повышение получается, конечно, не только у самой плотины, но вдоль значительного участка реки вверх по течению, длина которого — длина подпора — зависит от различных обстоятельств, главным образом, от высоты плотины, глубины воды, скорости незапруженного потока и от профиля. Знание длины подпора, вызываемого постройкой плотины, является чрезвычайно важным, в частности, для определения горизонтов силовых установок, расположенных друг за другом по течению реки.

Кривая, по которой располагается уровень свободной поверхности воды в русле, перегороженной плотиной, называется кривой подпора. Для получения уравнения этой кривой надо найти такие решения уравнения движения, дополненного членом, учитывающим сопротивление, которые соответствовали бы установившемуся, но вдоль русла реки неравномерному распределению скоростей; затем эти решения применяются к рассматриваемому (незапруженному) потоку. Таким образом получается форма свободной поверхности воды до самой близи плотины; форма же массы воды, переливающейся через плотину, этой кривой не дается.

Так как целью настоящей книги являются только руководящие указания, остановимся на простейшем случае определения кривой подпора, введя следующие упрощающие задачу предположения.

1. Вода течет по руслу с постоянным прямоугольным профилем большой ширины B и небольшой глубины h , которая остается небольшой и после повышения уровня, вызываемого перегораживанием русла плотиной. Поэтому можно считать, что гидравлический радиус везде равен глубине, $R = y$.

2. Давление по всему рассматриваемому участку реки или канала не изменяется, т. е. $\frac{dp}{ds} = 0$.

3. Закон сопротивления возьмем гидравлический и в простейшей форме, даваемой уравнением de Chèzy (231): $v^2 = \lambda^2 RI$; закон этот считаем верным для любой части русла, глубина которого y может быть и переменной; значит будет переменной и скорость v вдоль русла. Тогда величина сопротивления для единицы массы протекающей воды, т. е. ускорение, представится так:

$$gI = \frac{g}{\lambda^2} \cdot \frac{v^2}{R} = ga \cdot \frac{v^2}{y}, \dots \dots \dots (240)$$

где $\frac{1}{\lambda^2} = a$ рассматривается как постоянная. Обозначив неизменный уклон dna через I_1 глубину незапруженной воды через h и соответствующую скорость через V , будем иметь соотношение:

$$I = \frac{aV^2}{h} \dots \dots \dots (241)$$

Если в уравнение движения (46), выведенное в п. 16, ввести в качестве ускорения, направленного против движения, еще сопротивление (240), получим для места P :

$$b - \frac{dv}{dt} = v \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{s} \frac{dp}{ds} - g \frac{dz}{ds} - gI = -g \frac{dz}{ds} - ga \frac{v^2}{y} \dots (242)$$

В этом уравнении — $\frac{dz}{ds} = I$ обозначает переменный уклон свободной поверхности воды, поднятой плотиной (если z отсчитывать по вертикали вверх); следовательно,

$$I = \frac{v}{g} \frac{dv}{ds} + a \frac{v^2}{y} \dots \dots \dots (243)$$

Из этого уравнения, являющегося основным для дальнейших рассуждений, следует, что уклон свободной поверхности должен преодолевать ускорение массы жидкости и сопротивление. Если ускорение, как в нашем случае отрицательно ($\frac{dv}{ds} < 0$), сопротивление в каждом месте преодолевается общим действием уклона свободной поверхности и отрицательного ускорения массы жидкости.

Введем в это уравнение вместо переменного уклона I свободной поверхности постоянный уклон dna $I_1 = -\frac{az_1}{ds}$; для перехода воспользуемся соотношением, получаемым из черт. 118: $y - dz_1 = y + dy - dz$ или

$$I = -\frac{dz}{ds} = -\frac{dz_1}{ds} - \frac{dy}{ds} = I_1 - \frac{dy}{ds} \dots \dots \dots (244)$$

Воспользуемся еще уравнением неразрывности $Q = Fv = byv = bhV$ и вытекающим из него уравнением

$$v = V \cdot \frac{h}{y}, \quad \frac{dv}{ds} = -V \cdot \frac{h}{y^2} \cdot \frac{dy}{ds} \dots \dots \dots (245)$$

Уравнение (243) переписется теперь так:

$$I = I_1 - \frac{dy}{ds} = -\frac{V^2 h^2}{g y^3} \frac{dy}{ds} + a \frac{V^2 h^2}{y^3} \text{ или} \\ \frac{dy}{ds} \left(y^3 - \frac{V^2 h^2}{g} \right) = I_1 \left(y^3 - \frac{a V^2 h^2}{I_1} \right) \dots \dots \dots (246)$$

Воспользуемся еще, наконец, равенством (241) и, введя для сокращения обозначение $\frac{V^2 h^2}{g} = k^3$, придадим уравнению (246) следующий окончательный вид:

$$\frac{dy}{ds} = I_1 \cdot \frac{y^3 - h^3}{y^3 - k^3} \dots \dots \dots (247)$$

Это есть дифференциальное уравнение кривой подпора.

Если числитель и знаменатель дроби в правой части этого уравнения разделить на y^3 и перейти к пределу $y = \infty$ (большая глубина), получим: $\frac{dy}{ds} = I_1$; тогда из равенства (244) следует: $I = 0$, т. е. кривая подпора (продолженная в бесконечность в направлении течения реки) имеет горизонтальную асимптоту.

Полагая $h = k$, следовательно (при $\lambda = 50$, $g \cong 10$), $I = ag = \frac{g}{\lambda^2} = \frac{10}{2500} = 0,004$, из того же уравн. (247) получим $\frac{dy}{ds} = I_1$; но тогда и $I = 0$, т. е. в этом случае кривой подпора была бы горизонтальная прямая. Высоте подпора H у плотины соответствовала бы длина подпора L , определяемая равенством:

$$\sin \alpha \sim I_1 = \frac{H}{L}; \text{ следовательно, } L = \frac{H}{I_1} \dots \dots \dots (248)$$

Значение $h = k$ разделяет два возможных случая: когда $h > k$ и когда $h < k$. При

$$\begin{aligned} h > k, & \quad I_1 < 0,004; \\ h < k, & \quad I_1 > 0,004. \end{aligned}$$

Реки с $I_1 < 0,004$ называются равнинными, с $I_1 > 0,004$ — горными. Кривые подпора, определяемые уравнением (247) для этих двух случаев отличны друг от друга. Разделяя в уравн. (247) переменные, получаем:

$$I_1 ds = \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy = dy + \frac{h^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy;$$

заменяем y через ηh (η — величина с нулевой размерностью) и интегрируем:

$$I_1 s = h\eta + \frac{h^3 - k^3}{h^2} \int \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} + C.$$

Интеграл в правой части легко вычисляется после разложения подынтегральной дроби на простейшие; выполнив вычисления, получим:

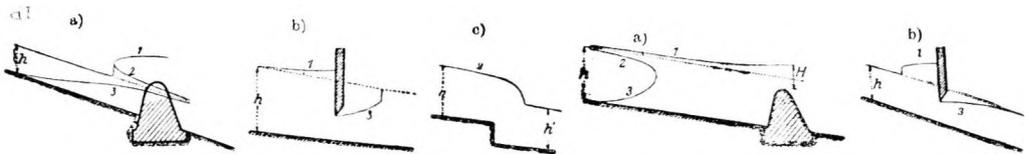
$$\left. \begin{aligned} I_1 s &= h\eta - \frac{h^3 - k^3}{6h^2} \left\{ \log \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} - 2\sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}} \right\} + C \\ \text{или} \quad I_1 s &= h\eta - \frac{h^3 - k^3}{h^2} \cdot f(\eta) + C. \end{aligned} \right\} (249)$$

Значения функции $f(\eta)$ впервые были вычислены I. I. Ch. Bresse; приводим ряд их:

$\eta =$	0,0	1,5	0,6	1	1,05	1,10	2,00	5,00	10	∞
$f(\eta) =$	-0,605	0,088	0,033	∞	0,88	0,68	0,32	0,02	0,005	0

Формы кривых подпора, даваемые уравнением (249) для $C = 0$ и при $s = \infty$, т. е. при $h = y$ или $\eta = 1$, указаны на чертеже 119 для равнинных рек, на чертеже 120 — для горных. В обоих случаях кривая подпора состоит из трех ветвей, из которых две соединены друг с другом. Значение этих ветвей следующее.

Ветвь „1“ является кривой подпора в реке, перегороженной плотиной; по ветви „3“ располагается уровень воды, вытекающей из-под слегка при-



Черт. 119.

Черт. 120.

поднятого щита, при чем до щита кривой подпора служит ветвь „1“; наконец, ветвь „2“ является кривой спада при пороге или геологическом сбросе дна (черт. 119-с).

Между прочим замечено, что у волны, образующейся при прорыве подпорной плотины и устремляющейся вниз по течению реки, передняя стенка почти отвесная — волна имеет форму ветви „2“ с крутоспускающимся ко дну концом; этим объясняются большие разрушения, производимые такими волнами.

В горных потоках (черт. 120), перегороженных плотиной, уровень воды располагается по ветви „1“, при чем на некотором расстоянии от плотины (не доходя ее) происходит внезапный резкоочерченный изгиб свободной поверхности — прыжок воды. При истечении из-под приподнятого щита (черт. 120-b) уровень располагается опять по ветви „3“, при чем до щита образуется прыжок воды.

Из хода приведенных исследований ясно, как надо поступать в случае определения кривой подпора для других профилей и при применении других формул для сопротивления трения, более сложных чем формула de Chézy. К более трудным вопросам подобного рода отнесится определение влияния неровностей дна реки, переменного уклона I_1 береговых сооружений; сюда же относятся явления, связанные с перекатами, наносами. Решения всех этих и подобных им вопросов показывают, что каждой реке или каналу свойственны свои особые черты, и часто бывает трудно заранее определить, как река или канал отзовется на различного рода изменения, вносимые в условия их течения рукой человека или природы.

IX. Сопротивление жидкостей движущимся в них телам.

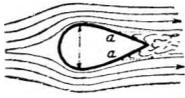
54. Причина сопротивления жидкостей. Уже давно было известно, что для поддержания движения какого-нибудь тела, со всех сторон окруженного покоящейся водой (или воздухом), необходимо наличие непрерывно действующей силы. Выражаясь механически, при движении всякого тела в жидкости (воде, воздухе) в последней появляется сила сопротивления, равная и прямо противоположная по направлению силе, поддерживающей движение тела.

Относительно механических причин этого сопротивления долгое время существовали совершенно ошибочные представления. В течение же последних лет усиленное развитие судостроения и в особенности воздухоплавания заставило произвести большое количество тщательных исследований, в результате которых проблема сопротивления оказалась вполне удовлетворительно решенной почти до конца. Эти исследования показали, что сопротивление, оказываемое жидкостью равномерно движущемуся в ней телу (неравномерное, т. е. ускоренное или замедленное движение, представляет из себя явление еще более сложное и до сего времени мало исследованное), складывается из двух частей, причинами возникновения которых являются:

1. Поверхностное трение (поверхностное сопротивление), возникающее от скольжения вдоль поверхности тела обтекающей его жидкости. Так же, как и при движении жидкости в трубах и каналах, местом возникновения почти всего поверхностного трения является пограничный слой жидкости, соприкасающийся с телом; в этом слое происходит быстрый переход скорости окружающей жидкости к скорости движущегося тела, к которому жидкость как бы прилипает. Величина поверхностного трения зависит, прежде всего, от величины и шероховатости тела и, кроме того, от скорости. Поверхностное трение может быть уменьшено тщательной полировкой поверхности.

2. Сопротивление формы, возникающее, как показывает само название, от формы тела, иными словами, от характера обтекания жидкостью движущегося тела. Это сопротивление можно рассматривать как сумму давлений, оказываемых жидкостью на отдельные элементы поверхности, ограничивающей рассматриваемое тело, и поэтому оно называется еще сопротивлением давления.

Обтекание тела жидкостью может происходить самым различным образом в зависимости от формы тела. Для примера опишем обтекание



Черт. 121.

тела вращения с закругленным передним концом и заостренным задним (черт. 121), равномерно двигающегося в бесконечном параллельном потоке. У переднего края притекающая жидкость разделяется на две части, которые плавно обтекают тело вплоть до миделевого сечения (наибольшего сечения, перпендикулярного к направлению движения). Скорость этого обтекания увеличивается, начиная от точки разветвления, до миделевого сечения, где она

достигает наибольшего значения. У кормовой части обтекаемого тела обе части обтекающей жидкости уже не соединяются, так как, примерно, в точках *a, a* они отрываются от тела, образуя между собой так называемое мертвое пространство — пространство, в котором жидкость находится в сильном вихревом движении. Эти вихри, непрерывно образующиеся при движении и только на некотором расстоянии от тела исчезающие и являются причиной сопротивления формы: энергия вихрей расходуется на преодоление трения, преобразуясь в тепло, и уже больше не участвует в динамическом процессе. В большинстве случаев (кроме плоских пластинок, двигающихся параллельно направлению потока) это сопротивление формы во много раз превышает сопротивление трения. Чтобы сделать его как можно меньше, надо по мере возможности уменьшить размеры мертвого пространства, что достигается приданием телу такой формы, у которой точки отрыва лежат как можно ближе к задней, кормовой части. Этим объясняется уменьшение сопротивления тел с заостренной кормовой частью. Удалось найти настолько удобные формы тел вращения (сигарообразные тела), что их сопротивление равно $\frac{1}{27}$ сопротивления круглой пластинки с одинаковой площадью миделевого сечения.

Для тел с большой длиной, например, для троссов или подкосов аэропланов, которые при движении расположены своей длиной перпендикулярно к направлению движения (или несколько наклонно), подбирают такой плоский профиль, при обтекании которого создавалось бы, так же, как и при обтекании округленных тел, возможно меньшее мертвое пространство. Другие же тела с неудобно обтекаемой формой (провода, стойки, раскосы аэропланов) заключают внутрь такой оболочки, которая давала бы наименьшее сопротивление, — „профилируют“ их.

55. Закон сопротивления. Опытами установлено, что величина сопротивления, испытываемого телом при его движении в жидкости, зависит от следующих величин:

- 1) плотности $\rho = \frac{\gamma}{g}$ той среды, в которой происходит движение;
- 2) размеров тела, которые проще всего характеризуются величиной миделевого сечения F или величиной площади проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения;
- 3) скорости V тела относительно окружающей жидкости (относительной скорости) и, наконец,
- 4) величины, выражающей влияние формы тела.

Рассматривая размерность величин s , F и V , замечаем, что произведение $\rho F V^2$ дает величину, размерность которой равна $[k]$, т. е. представляет из себя силу; помножив это выражение еще на некоторый множитель ζ_w , учитывающий влияние формы, так называемый коэффициент сопротивления, получим следующее выражение для закона сопротивления:

$$W = \zeta_w \cdot \rho F V^2 \dots \dots \dots (250)$$

Коэффициент сопротивления ζ_w есть, конечно, отвлеченное число. Этой формулой пользуются почти во всех практических расчетах.

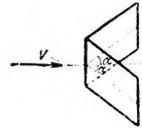
В воздухоплавании эту формулу принято писать несколько иначе: в нее вводится давление, соответствующее скоростной высоте (динамическое давление, Staudruck) $q = \frac{\rho V^2}{2} = \gamma \frac{V^2}{2g}$. Его можно вычислить для каждого места по уравнению Д. Бернулли или же непосредственно отсчитать по трубке Пито, поставленной в рассматриваемом месте отогнутым концом против потока. Полагая еще $2 \zeta_w = c_w$, придадим закону сопротивления (250) форму:

$$W = c_w \cdot F \cdot q \dots \dots \dots (251)$$

Форма закона (250) была указана уже Ньютоном, и на основании следующих соображений: тело при своем движении ежесекундно отталкивает со своего пути массу жидкости $M = \rho F V$ [кг/сек./м] и сообщает каждому элементу массы, до того находившемуся в покое, скорость, пропорциональную V ; следовательно, сопротивление пропорционально количеству движения, возникающему в 1 секунду:

$$W \sim \rho F V^2.$$

Только Ньютон при выводе этого закона предполагал, что сопротивление вызывается благодаря ударам частиц, отталкиваемых движущимся телом; значит, по его гипотезе величина сопротивления оказывалась зависящей только от явлений, происходящих на передней стороне тела. В качестве следствия такого представления вытекало бы, например, что сопротивление диэдра, изображенного на чертеже 122, должно быть в два раза больше сопротивления каждой пластинки, наклоненной под тем же углом α , в отдельности. Наблюдения же показывают, что сопротивление диэдра с углом α в 30° составляют только 60% двойного сопротивления отдельной пластинки с тем же углом наклона. Это объясняется тем, что обтекание потоком диэдра происходит совершенно иначе, чем обтекание отдельной наклоненной пластинки. Таким образом, сопротивление тела, составленного из нескольких частей, нельзя определять как сумму сопротивлений его частей в отдельности.



Черт. 122.

При скоростях, встречающихся в технике, можно не принимать во внимание изменений давления и объема, связанных с движением, и формула (250) важна тем, что в этом случае она дает хорошие приближения как для воды, так и для воздуха.

При адиабатическом изменении состояния (см. п. 68) $p = k \cdot \rho^{1.4}$; изменению плотности $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ на 1 % соответствует изменение давления $\frac{\Delta p}{p}$ на 1,4%, а последнему при $p = 1$ кг/см² соответствует изменение пьезометрической высоты (в воздухе!) на

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{0,014 \cdot 10000}{1,2} = 117 \text{ м,}$$

чему в свою очередь, согласно уравнению Д. Бернулли, соответствует скорость

$$V = \sqrt{2g \cdot \Delta h} \sim \sqrt{20 \cdot 117} = 48 \text{ м/сек.}$$

У пропеллеров скорости доходят до 100 м/сек, чему соответствует изменение плотности только на 4%. Поэтому в вопросах технического воздухоплавания воздух приближенно можно считать несжимаемым. Тогда приведенные ниже значения годны как для воздуха, так и для воды. Влияние окружающей среды отмечается в формуле (250) одной лишь плотностью ρ , при чем

для воды $\rho = \frac{1000}{g}$ [кг/сек.²/м⁴]

для воздуха при 0°C и 760 мм. $\rho = \frac{1,293}{9,81} \cong \frac{1}{8} [\text{кг}^2 \text{сек.}^2/\text{м}^4]$.

Но в тех случаях, когда скорости оказываются значительно большими, как, например, в баллистике, точнее говоря, когда скорости приближаются к скорости распространения звука, принимать воздух в целях упрощения исследований несжимающимся — уже нельзя.

Таким образом, вопрос о сопротивлении тела, со всех сторон окруженного жидкостью, сводится к определению коэффициента сопротивления ζ_w , что в настоящее время приходится делать почти исключительно опытным путем. Теоретическое определение возможно только в очень немногих особых случаях. Опытные измерения производятся в аэродинамических трубах, в которых путем тяги создается по возможности равномерный (во времени и пространстве) поток воздуха, обтекающий испытываемое тело. При помощи особых взвешивающих приспособлений (большей частью, самых обыкновенных весов) измеряется сила, с которою воздушный поток действует на испытываемое тело; эта сила равна сопротивлению при обратном движении, т. е. при движении тела в покоящемся воздухе, как большей частью и бывает в действительности. Для изучения же явлений, происходящих при движении, совершенно безразлично, движется ли тело относительно воздуха или наоборот (принцип относительности Галилео-Ньютоновой механики).

Согласно изложенному в п. 42, значение для различных движений сохраняет свою величину только до тех пор, пока рассматриваемые движения механически подобны, т. е. имеют одинаковые числа Рейнольдса $\Re = \frac{VL}{\nu}$. Таким образом, в общем случае ζ_w является функцией \Re , $\zeta_w = \zeta_w(\Re)$. Так как вязкость ν входит в формулу (250) только через \Re , то из только что сказанного следует, что до тех пор пока сопротивление формы на много больше сопротивления трения, ζ_w остается почти постоянным. Это бывает, например, у плоских пластинок, продуваемых перпендикулярно к их плоскости или под большими углами атаки; у них оказывается постоянным для всех размеров подобных форм, меняясь лишь в зависимости от формы пластинок (см. п. 56,1). Если же сопротивление трения играет значительную роль, как, например, у тонких пластинок, продуваемых параллельно их собственному направлению, то дает себя знать зависимость ζ_w от \Re , что в свою очередь влечет за собою изменение квадратичного (гидравлического закона) сопротивления.

В настоящее время мы еще очень далеки от обладания теорией сопротивления жидкостей, вполне законченной; пока мы знаем лишь приближенную картину происходящих при обтекании сложных физических явлений и умеем эти явления учитывать — имеем как бы количественную теорию. Опытным путем найдено большое количество числовых значений ζ_w для различных форм.

56. Числовые значения ζ_w для некоторых тел. В отношении сопротивления воздуху почти каждое тело имеет свои особенности, о которых здесь могут быть сделаны только самые краткие указания. Приводим числовые значения ζ_w , полученные как средние из наблюдений различных исследователей.

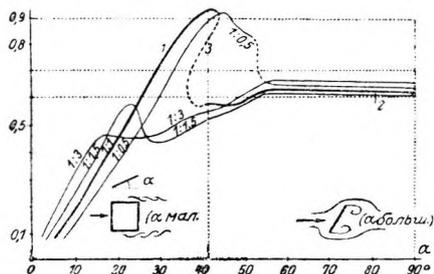
1. Плоские пластинки. а) Круг или квадрат, продуваемые перпендикулярно к их плоскости,

$$\begin{aligned} &\text{с небольшими площадями } (\sim 0,1 \text{ м}^2) \dots \zeta_w = 0,55, \\ &\text{с большими площадями } (\sim 1 \text{ м}^2) \dots \zeta_w = 0,65, \end{aligned}$$

б) Прямоугольник, продуваемый перпендикулярно к своей плоскости,

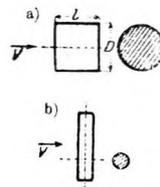
с отношением сторон 1 : 5 $\zeta_w = 0,70$,
 1 : 10 $\zeta_w = 0,78$.

с) Для квадратных пластинок, продуваемых при различных углах атаки α , ζ_w меняется в зависимости от α (черт. 123). Значения, расположенные на ветви „1“, получаются при постепенном увеличении угла атаки α от 0° ; в этом случае от краев пластинки отрываются два вихревых шнура, уходящие за пластинку (они могут быть сделаны видимыми при помощи дыма). Если же начать продувку с угла атаки $\alpha = 90^\circ$ и затем постепенно его уменьшать, получаются значения ζ_w , расположенные на ветви „2“; в этом случае причиной сопротивления является большое вихревое кольцо с задней стороны пластинки, которое при углах атаки, больших 40° , вызывает на много меньшее сопротивление, чем два вихревых шнура, срывающиеся с краев пластинки. На черт. 123 схематически представлены обе формы вихрей. Таким образом при $\alpha = 40^\circ$ получается разрывность в значениях ζ_w впервые замеченная Dines'ом. В ближайших пределах этого угла, надо полагать, возникают неустойчивые вихреобразования, ускользающие от непосредственного наблюдения.



Черт. 123.

д) Для неслишком больших α (например, меньших 30°) сопротивление W плоских пластинок приближенно может быть принято за линейную



Черт. 124.

функцию от α (см. черт. 123, ветвь „1“).

2. Круговой цилиндр или призма: а) продуваемые параллельно оси (черт. 124-а, l — длина, D — диаметр основания):

$\frac{l}{D} = 0$	0,5	1	2	4	7
$\zeta_w = 0,55$	0,54	0,44	0,40	0,41	0,47:

б) продуваемые перпендикулярно к оси (черт. 124-б):

$D = 0,05$ мм	(проволока)	0,2 мм	1 мм	1 см	3 см	15 см
$\zeta_w = 0,88$		0,64	0,52	0,49	0,48	0,32,

(Увеличение ζ_w с уменьшением диаметра проволоки объясняется увеличивающимся влиянием трения).

3. Для профилированных труб (цилиндрические трубы, заключенные в удобообтекаемые оболочки), продуваемых перпендикулярно к образующей:

$$\zeta_w = \text{от } 0,05 \text{ до } 0,08,$$

в зависимости от формы профиля.

4. Для шара ζ_w при малых скоростях приблизительно в 2 раза больше, чем при больших. Переходное значение скорости зависит от диаметра шара D . Например, при $D \sim 20$ см

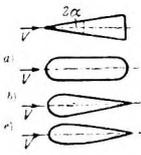
$$\zeta_w = 0,11 \text{ при скоростях } > 15 \text{ м/сек.},$$

$$\zeta_w = 0,3 \text{ „ „ } < 15 \text{ м/сек.}$$

5. Полушарие, открытое сзади..... $\zeta_w = 0,17$
 спереди..... $\zeta_w = 0,66$
6. Конус с угловым отверстием $2\alpha = 60^\circ$ $\zeta_w = 0,26$
 $2\alpha = 30^\circ$ $\zeta_w = 0,17$

7. Сигарообразные тела (черт. 126):

- а) цилиндр с двумя полушариями..... $\zeta_w = 0,060$
- б) полушар с конусом..... $\zeta_w = 0,040$
- в) наилучшая форма..... $\zeta_w = 0,024$.



Черт. 125 и 126.

Пример 74. Определить сопротивление шара с диаметром $D = 20$ см в воде при скорости $V = 2$ м/сек. Согласно формуле (250)

$$W = 0,11 \cdot \frac{1000}{g} \cdot \frac{0,04\pi}{4} \cdot 4 = 1,4 \text{ кг.}$$

Пример 75. Определить сопротивление сигарообразного тела наилучшей формы в воздухе; $F = 50$ м², $V = 20$ м/сек.

$$W = 0,024 \cdot \frac{1}{8} \cdot 50 \cdot 400 = 60 \text{ кг.}$$

В последнее время давление ветра, производимое им на различные инженерные сооружения, стали рассматривать происходящим не от ударов частиц воздуха, а от явлений, связанных с обтеканием сооружения потоком воздуха. Результаты, полученные таким путем для различного рода наземных построек (ангаров и т. п.), мостов, мачт и проводов электрических сооружений, оказались в значительной степени отличными от тех, которые получались при ньютоновом объяснении давления ветра; с этой же, новой точки зрения надо рассматривать сопротивление воздуха железнодорожным поездам.

X. Несущие поверхности (крылья аэроплана) и воздушные гребные винты (пропеллеры).

Одновременно с успехами воздухоплавательной техники, особенно колоссальными за последние годы, пополнялись и теоретические сведения, главным образом, в области теории несущих поверхностей. Были произведены фундаментальные исследования, связанные с именами Kutta, Жуковского и особенно Prandtl'я и его школы. Из технической аэродинамики, возникшей в результате этих исследований (в ней воздух рассматривается как несжимаемая жидкость), в этой книге могут быть даны только самые основные сведения.

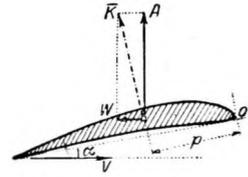
57. Свойства несущих поверхностей. В предыдущей главе мы рассматривали такие случаи движения тел в жидкости, когда сила K , с которою жидкость действует на тело, оказывалась направленной прямо против движения тела — происходил так называемый прямой удар жидкости. Но в общем случае эта сила составляет с направлением движения некоторый угол и поэтому может быть разложена на две составляющих: вертикальную A , называемую поддерживающей силой, и горизонтальную W , называемую лобовым сопротивлением, так что $K = A + W$. Сила же K называется полным сопротивлением. Свойство полного сопротивления давать составляющую в направлении, перпендикулярном движению тела, проще всего обнаруживается у плоских пластинок; только у них лобовое сопротивление оказывается довольно значительным, и потому на долю поддерживающей силы падает лишь небольшая часть полного сопротивления K ; для них отношение $\epsilon = \frac{W}{A}$, называемое коэффициентом скольжения, очень велико, и плоская поверхность, как несущая поверхность, невыгодна¹⁾. В этом отношении более выгодными оказываются изогнутые пластинки.

¹⁾ Вместо коэффициента скольжения $\epsilon = \frac{W}{A}$ часто пользуются обратной величиной $\frac{A}{W}$, называемой качеством несущей поверхности. *Прим. пер.*

Но совсем поразительные результаты дают не пластинки, а поверхности с профилями серпообразного вида с закругленным передним краем и заостренным задним. Профили такой формы (черт. 127), если их брать узкими и вытянутыми, при небольших углах атаки (угол между направлением скорости и каким-нибудь направлением в профиле) дают поддерживающую силу, во много раз превышающую лобовое сопротивление. Коэффициент скольжения $\epsilon = \frac{W}{A}$ очень незначителен, качество таких профилей велико.

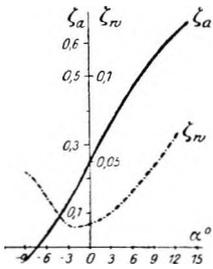
Для несущих поверхностей зависимость A и W от геометрических и механических величин выражается формулами того же типа, что и формула предыдущей главы для полного сопротивления W тела произвольной формы. Только здесь надо принять во внимание то, что и A и W зависят от угла атаки. Итак, имеем:

$$\left. \begin{aligned} A &= \zeta_a \cdot \rho F V^2, & \zeta_a &= \zeta_a(\alpha) \\ W &= \zeta_w \cdot \rho F V^2, & \zeta_w &= \zeta_w(\alpha) \end{aligned} \right\} \text{..... (252)}$$



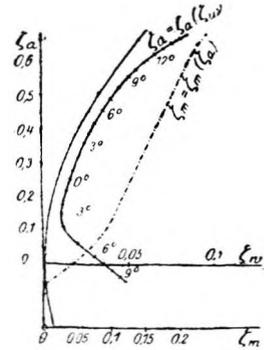
Черт. 127.

В этих формулах через F обозначена величина несущей поверхности, а не миделево сечение, как раньше; ζ_a называют коэффициентом поддерживающей силы, ζ_w — коэффициентом лобового сопротивления. Формулы эти показывают, что показателями свойств несущей поверхности являются величины ζ_a и ζ_w зависящие от угла атаки α . Эти зависимости определяются прямыми измерениями — продувкой профиля, производимой в аэродинамической трубе, и наносятся в виде кривых на чертеж (черт. 128). При этом надо всегда указывать, относительно какой прямой или направления несущей поверхности отсчитывается угол атаки α ; у вогнутых профилей за угол атаки принято считать угол, образуемый направлением движения с хордой, стягивающей вогнутость



Черт. 128.

профиля (черт. 127). Можно было бы угол атаки отсчитывать от направления, для которого поддерживающая сила равна нулю (для несущей поверхности, к которой относится чертеж 128, поддерживающая сила равна нулю при угле атаки равном -7°); но такой отсчет бы; бы затруднителен, так как направление, для которого поддерживающая сила равна нулю, заранее неизвестно и его пришлось бы определять тоже опытным путем.



Черт. 129.

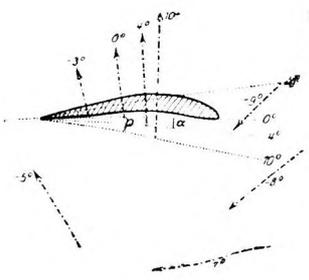
Еще проще свойства профиля, т. е. функции $\zeta_a = \zeta_a(\alpha)$, $\zeta_w = \zeta_w(\alpha)$, можно представить так называемой полярной кривой Эйффеля (черт. 129); точки этой кривой имеют своими координатами в прямоугольной системе осей соответственные значения ζ_a и ζ_w ; углы атаки, соответствующие этим значениям ζ_a и ζ_w отмечаются у точек кривой.

Указание компонентов A и W определяет только величину силы \bar{K} , с которою воздух действует на несущую поверхность, но не ее положение; следовательно, необходимо знать еще третью величину, которая позволяла бы определить линию действия силы \bar{K} . Такой величиной, как известно из статики, является момент относительно произвольной оси; за таковую можно было бы взять ось, проходящую через острый задний край несущей поверхности, но при практических измерениях за нее пред-

почитают брать прямую, проходящую через точку, лежащую на хорде, стягивающей вогнутость профиля (или на ее продолжении) и являющейся проекцией самой крайней точки переднего края профиля (точка O на черт. 127). И величина момента выражается формулой типа (252), только в правую часть вводится множителем некоторая длина, например, глубина на несущей поверхности τ ; это необходимо для того, чтобы размерности правой и левой частей были одинаковы. Итак:

$$\mathfrak{M} = \zeta_m \cdot \rho F V \cdot \tau^2, \quad \zeta_m = \zeta_m(\alpha) \dots \dots \dots (253)$$

Для экспериментального определения трех величин A , W и \mathfrak{M} модель несущей поверхности укрепляется на трех проволоках, не проходящих через одну точку; в этих проволоках сила воздушного потока вызывает напряжения, которые и измеряются. Получившиеся три величины однозначным образом определяют силу в плоскости. На чертеже 130 указаны линии действия силы K для различных значений угла атаки α , а на диаграмме Эйффеля (черт. 129) пунктиром нанесена кривая зависимости ζ_m от ζ_a , при чем ζ_m вычислены относительно упомянутой выше оси, проходящей через точку O . Из чертежа 130



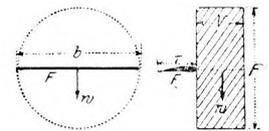
Черт. 130.

видно, что с увеличением угла атаки α линия действия силы K , а вместе с ней и точка пересечения ее с прямой, проходящей через задний край профиля и параллельной направлению потока, — эта точка называется центром парусности — перемещается к переднему краю несущей поверхности. Это свойство вогнутых профилей оказывается чрезвычайно важным для устойчивости аэроплана.

Определяя непосредственным измерением (манометром) распределение давления вдоль контура профиля несущей поверхности, для чего последняя делается полой с рядом дырок, которые могут закрываться, обнаружим, что с верхней стороны несущей поверхности при движении получается разрежение, а с нижней стороны, наоборот, — повышенное давление. Благодаря этой разности давлений и возникает поддерживающая сила несущей поверхности. Между прочим всасывающее действие сверху составляет приблизительно $2/3$, а давление снизу — $1/3$ всей поддерживающей силы.

Изучение теоретического обтекания несущей поверхности дает аналогичные результаты (п. 65). Действительное обтекание отличается от теоретического только в небольшой области у заднего края несущей поверхности, где при действительном обтекании происходит срыв вихрей.

58. Индуктивное сопротивление. Рассматривая горизонтальное движение аэроплана в воздухе, замечаем, что раз воздух действует на крыло (несущую поверхность), сообщая ему определенную поддерживающую силу, направленную вертикально вверх, то и крыло с равной по величине силой должно действовать на захватываемую им массу воздуха, сообщая ей некоторую скорость, направленную вниз. В действительности это движение отбрасываемой вниз массы очень быстро прекращается вследствие внутреннего трения воздуха. Часть же этой массы воздуха у края крыла вырывается из под него и устремляется в сторону и вверх.



Черт. 131.

Величину поперечного сечения массы воздуха, захватываемой описанным образом в каждую секунду, можно предположить равной (черт. 131)

$$F' = \frac{\pi b^2}{4}; \quad \text{тогда в каждую секунду вниз отбрасывается масса воздуха}$$

$$M = \rho F' V.$$

Обозначим через w пока еще неизвестную скорость, сообщаемую этой массе крылом; тогда количество движения ее, возникающее за одну секунду, будет равно Mw . Из теоремы импульсов следует:

$$A = Mw = \rho F' V w; \quad \text{отсюда:} \quad w = \frac{A}{\rho F' V}.$$

Но для сообщения этого движения требуется мощность WV . Если предположить, что работа мотора преобразуется в живую силу отбрасываемой вниз массы воздуха без всяких потерь, тогда:

$$WV = M \frac{w^2}{2} = \frac{A^2}{2\rho F' V} \quad \text{или} \quad W = \frac{A^2}{2\rho F' V^2} = \frac{2A^2}{\pi b^2 \rho V^2};$$

заменив A и W их значениями из равенств (252), получим окончательно:

$$\zeta_w = \frac{2}{\pi} \frac{\tau}{b} \cdot \zeta_a^2 \dots \dots \dots (254)$$

Этот чрезвычайно важный результат, полученный L. Prandtl'ем, показывает, что у несущих поверхностей конечной длины возникновение какой бы то ни было поддерживающей силы A вызывает появление сопротивления W даже в том случае, когда не происходит потерь энергии, расходуемой на создание движения. Это сопротивление, вызываемое поддерживающей силой и называемое поэтому индуктивным, оказывается тем меньше, чем больше ширина несущей поверхности. Поэтому крылья аэроплана берутся широкими и с небольшой глубиной τ ¹⁾.

Отметив на диаграмме Эйфеля значения индуктивного сопротивления для различных углов атаки (черт. 129), получим параболу, называемую параболой индуктивного сопротивления. Исследования, произведенные над несущими поверхностями, показали, что профильное сопротивление, т. е. разность между полным лобовым сопротивлением и индуктивным, для углов атаки, при которых взяты профили показывают хорошие качества и при которых ими только и пользуются, оказывается чрезвычайно малым; возникает оно почти исключительно от трения воздуха о поверхность крыла. Далее оказалось, что профильное сопротивление не зависит от относительного размаха крыла. Благодаря этому свойству, можно по полярной кривой несущей поверхности с одним относительным размахом, построить полярную кривую несущей поверхности с другим относительным размахом, но с таким же профилем.

59. Действие воздушного гребного винта (пропеллера) станет сразу ясным, если каждую его лопасть рассматривать как ряд прилегающих друг к другу несущих поверхностей, которые все приводятся во вращение около общей оси. Такое представление позволяет легко получить законы и формулы, необходимые для практического использования пропеллеров. Механическими величинами, характеризующими пропеллер, являются сила тяги Z , которую пропеллер должен создавать, и момент вращения M , необходимый для поддержания вращения пропеллера. Сразу же возникает вопрос о зависимости этих механических величин от величин геометрических и кинематических, определяющих, с одной стороны, размеры и форму винта, а с другой, — состояние движения. Что касается состояния движения, то надо отличать вращение винта на месте и вращение его, соединенное с поступательным движением. При первом состоянии движения ось вращения остается неподвижной, и приходится рассматривать

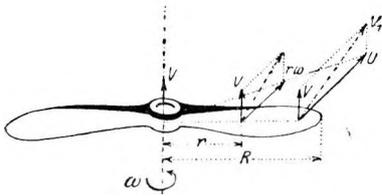
¹⁾ Образование индуктивного сопротивления можно объяснить еще так: скорость w отбрасываемой вниз массы воздуха, складываясь со скоростью V воздушного потока, обтекающего крыла (скорость крыла равна $+V$), перекашивает этот поток на некоторый угол α . В результате этого перекашивания поддерживающая сила уже не будет перпендикулярна к направлению движения крыла и, следовательно, дает в этом направлении составляющую направленную против движения крыла. Эта составляющая поддерживающей силы и есть индуктивное сопротивление.

Прим. пер.

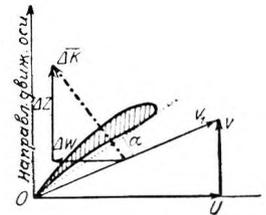
только скорость вращения около нее; при втором же состоянии ось движется в собственном направлении со скоростью V , в то время как пропеллер вращается вокруг оси с определенной угловой скоростью ω . Рассмотрим только установившееся движение пропеллера, т.-е. такое движение, при котором V и ω остаются неизменными.

Геометрической формой пропеллера является винтовая поверхность. Если шаг этой поверхности равен h , тогда угол наклона винтовой линии, лежащей на винтовой поверхности на расстоянии r от оси, определится из равенства $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2r\pi}$; значит, а тем меньше, чем больше r , и по мере удаления от оси винтовые линии становятся более плоскими.

Часть такой винтовой поверхности и берется в основу профилированных пропеллеров (большой частью двухлопастных). При движении (черт. 132) скорость каждого элемента пропеллера складывается геометрически из поступательной скорости V и тангенциальной скорости $r\omega$; последняя больше всего на концах лопастей, где она равна $U = R\omega$. Наклон скоростей к плоскости, перпендикулярной к оси вращения, изменяется в таком же отношении, в каком и наклон винтовой поверхности, так что углы атаки всех элементов по отношению к направлению их скорости одинаковы. За этот угол может быть выбран тот, при котором качество элемента, следовательно, и всего пропеллера, будет наилучшим.



Черт. 132.



Черт. 133.

На чертеже 133 изображен элемент лопасти, самый близкий к краю (совершающий наибольшую работу). Разложим силу воздуха $\overline{\Delta K}$, действующую на этот элемент, на две составляющие: ΔZ , параллельную оси, и $\overline{\Delta W}$, перпендикулярную к оси, так что $\overline{\Delta K} + \overline{\Delta Z} + \overline{\Delta W}$.

Сумму $\Sigma \Delta Z = Z$ называют тягой лопасти, $\Sigma (r \cdot \overline{\Delta W}) = \mathfrak{M}$ — моментом вращения (моментом силы сопротивления), возникающим от сопротивления отдельных элементов лопасти.

Чтобы получить зависимость этих динамических величин от величин геометрических и кинематических, возьмем сначала пропеллер, вращающийся на месте; в таком случае $V = 0$. Рассматривая пропеллер как ряд несущих поверхностей, сумеем равнодействующую Z элементарных тяг представить так:

$$Z = \zeta_K \cdot \rho F U^2,$$

где F есть проекция лопасти пропеллера на плоскость, перпендикулярную к его оси, а ζ_K — коэффициент тяги.

При движении пропеллера ($V \neq 0$, черт. 123) угол атаки каждого элемента становится тем меньше, чем больше скорость V , но во время движения он не изменяется, если только отношение $\frac{V}{U}$ сохраняет при движении свою величину. Изменение силы тяги, связанное с изменением угла атаки, отмечается в предыдущей формуле тем, что коэффициент полагают функцией отношения $\frac{V}{U}$, и формула принимает вид:

$$Z = \zeta_K \left(\frac{V}{U} \right) \cdot \rho F U^2 \dots \dots \dots (255)$$

На тех же основаниях величина момента вращения пропеллера \mathfrak{M} представляется формулой аналогичного вида, только с прибавлением в качестве множителя какой-нибудь длины, например R :

$$\mathfrak{M} = \zeta_M \left(\frac{V}{U} \right) \cdot \rho F U^2 \cdot R, \dots \dots \dots (256)$$

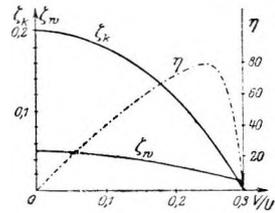
где ζ_M есть коэффициент момента силы сопротивления.

Таким образом, пропеллер вполне характеризуется функциями $\zeta_K = \zeta_K \left(\frac{V}{U} \right)$ и $\zeta_M = \zeta_M \left(\frac{V}{U} \right)$, которые, конечно, зависят не только от аргумента $\frac{V}{U}$, но и от формы профиля и лопасти.

Коэффициентом полезного действия пропеллера называют отношение полезной мощности пропеллера ZV кг.м/сек. к затраченной мощности мотора $L = \mathfrak{M}\omega$:

$$\eta = \frac{ZV}{\mathfrak{M}\omega} = \frac{\zeta_K \cdot V}{\zeta_M \cdot R\omega} = \eta \left(\frac{V}{U} \right) \dots \dots \dots (257)$$

На чертеже 134 представлены кривые функций ζ_K , ζ_M и η . При $V=0$ (вращение на месте) тяга пропеллера наибольшая, но зато наибольшую величину имеет и момент вращения; коэффициент же полезного действия $\eta = 0$. С увеличением V значения ζ_K и ζ_M уменьшаются, в то время как η увеличивается и достигает при некотором значении $\frac{V}{U}$ наибольшего значения, а затем опять уменьшается. Подобно тому, как поддерживающая сила несущей поверхности становится равной нулю при определенном угле атаки α , так и тяга пропеллера исчезает при определенном значении отношения $\frac{V}{U}$; при этом значении $\frac{V}{U}$ пропеллер, можно сказать, вращается в самом себе, не создавая тяги, и коэффициент полезного действия опять равен нулю. Из чертежа 134 видно, что η достигает наибольшего значения при определенной величине отношения $\frac{V}{U}$, при которой, следовательно, пропеллер показывает наилучшее качество, при котором его по мере возможности и заставляют работать.



Черт. 134.

Значения ζ_K , ζ_M , и η почти всегда определяются путем испытания модели. Модель, конечно, должна быть геометрически подобна действительному пропеллеру. Чтобы по результатам испытания модели можно было сразу получить тягу и момент вращения пропеллера в натуральном размере, формулы (255) — (257) переписываются в нижеследующей измененной форме, предложенной Эйфелем. Пусть n есть число оборотов пропеллера в 1 секунду; тогда:

$U = \frac{D\omega}{2} = \pi Dn$, $U^2 = \frac{\pi^2 D^2 n^2}{V^2}$ для подобных пропеллеров $F \sim D^2$ и поэтому:

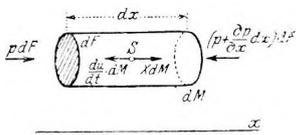
$$\left. \begin{aligned} Z &= \zeta'_K \left(\frac{V}{\pi Dn} \right) \cdot D^2 n^2 \\ \mathfrak{M} &= \zeta'_M \left(\frac{V}{\pi Dn} \right) \cdot D^3 n^2 \\ \eta &= \eta \left(\frac{V}{\pi Dn} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (258)$$

ζ'_K и ζ'_M легко вычисляются из ранее полученных коэффициентов ζ_K и ζ_M . По этим формулам сила тяги и момент вращения геометрически подобных пропеллеров разной величины определяются совсем просто.

XI. Общие уравнения движения идеальной жидкости.

В предыдущих параграфах ряд проблем гидравлики, большей частью весьма сложных, был разобран путем упрощения картины происходивших явлений тем, что они предполагались происходившими в пространстве одного измерения; составлялось и решалось только одно уравнение движения для направления самого движения. Явления же, игравшие роль или происходившие в направлении, перпендикулярном к направлению движения или совсем не принимались во внимание, или поправки на их влияние вводились в расчеты коэффициентами (расхода, вязкости, сопротивления), находившимися опытным путем. В нижеследующих параграфах будут сжато выведены основные уравнения движения жидкости в пространстве трех измерений, а в следующей главе будут разобраны случаи установившихся плоских и симметричных относительно продольной оси потоков. При этом придется опять ограничиться рассмотрением идеальной жидкости, что хотя и является отвлечением от действительности, тем не менее дает возможность получить представление о картине течения в таких областях, которые хоть сколько-нибудь удалены от неподвижных стенок или той половины погруженного в жидкость твердого тела, которая лежит против потока; иными словами, придется не рассматривать частей потока, лежащих в непосредственной близости к границам, составленным посторонними телами. Такого рода ограничения области рассмотрения потока приходится делать вообще в тех случаях, когда методы теории идеальной жидкости отказываются служить, например, при прилипании реальной жидкости к стенкам тел или при отрывании потока от стенок и связанного с ним образования вихрей на кормовой стороне тела.

60. Эйлеровы уравнения движения. Механическими величинами, которые должны определяться при помощи уравнений движения, являются скорость V и давление p во всех точках плоского или пространственного потока жидкости. Для вывода этих уравнений рассмотрим частицу жидкости в форме маленького цилиндра (черт. 135), ось которого параллельна оси x Декартовой системы координат, а центр в момент t находится в точке (x, y, z) . Так как мы рассматриваем массу жидкости в пространстве, то скорость каждой частицы определяется ее компонентами (u, v, w) по трем осям; в общем случае эти компоненты могут иметь разные значения не только в разных точках, но в одной и той же точке в различные моменты времени (при неустановившемся движении),



Черт. 135.

т.е. u, v и w в общем случае надо считать непрерывными и дифференцируемыми функциями от x, y, z и t :

$$V \begin{cases} u = u(x, y, z, t); \\ v = v(x, y, z, t); \\ w = w(x, y, z, t). \end{cases}$$

При движении частицы координаты x, y, z меняются со временем, и так как $\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w$, то ускорение в направлении оси x равно полной производной от u по t :

$$b_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z};$$

подобные же выражения получаются и для b_y и b_z . Давление p в общем случае также является функцией x, y, z и t .

На рассматриваемую частицу жидкости действуют в направлении оси x : активная (распределенная по объему) сила $X dM$ и поверхностные силы:

давление pdF на левое основание цилиндра и давление $-\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dF$ на правое основание. Силы, действующие на боковую поверхность цилиндра, будучи перпендикулярны к оси x , не дают составляющих в ее направлении. Сила инерции частицы в направлении оси x равна $b_x dM$. Под действием всех этих сил, согласно принципу Даламбера, частица будет находиться в равновесии:

$$XdM + pdF - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dF - \frac{du}{dt} dM = 0;$$

заменяв в этом уравнении dM через $pdF \cdot dx$, получим уравнение движения в эйлеровой форме:

$$b_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \dots \dots \dots (259)$$

Для направлений y и z получаются аналогичные уравнения. Эти три, дифференциальных уравнения содержат четыре неизвестные функции u, v, w и p ; следовательно для их определения необходимо присоединить к этой системе еще четвертое уравнение, которое получится, если математически выразить условие неразрывности потока.

61. Уравнение неразрывности и здесь, подобно тому как это было в случае элементарной жидкой струйки, должно выразить то обстоятельство, что в движущемся потоке нигде не может быть ни уплотнения, ни разрежения жидкости. Вообразим в жидком потоке геометрический прямоугольный параллелепипед и соответствующим образом выразим, что он заполнен жидкостью во все моменты времени.

Через боковую поверхность $dydz$ в единицу времени протекает количество жидкости $u dydz$, через поверхность, ей противоположащую — $-\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dydz$. Разность (положительная или отрицательная) этих количеств равна $\frac{\partial u}{\partial x} dx dydz$. Соответствующие разности для двух других пар поверхностей будут: $\frac{\partial v}{\partial y} dx dydz$ для $dz dx$, $\frac{\partial w}{\partial z} dx dydz$ для $dx dy$. Если в начале и в конце рассматриваемого момента времени параллелепипед должен быть одинаково наполнен жидкостью, необходимо (для всех t), чтобы сумма разностей протекающих количеств жидкости равнялась нулю, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (260)$$

Это и есть четвертое уравнение, которое надо присоединить к трем уравнениям (259), чтобы получить разрешимую систему дифференциальных уравнений. Итак, если функции u, v, w от независимых переменных x, y, z и t должны представлять компоненты скорости пространственного потока, то они должны удовлетворять уравнению (260) для всех моментов времени.

Проблема интегрирования системы уравнений (259) и (260) связана с заданием пограничных условий, которым должен удовлетворять данный поток. Последние заключаются в указании заранее кривых, между которыми должен протекать поток, при чем это условие можно формулировать еще так: скорости точек, лежащих на этих пограничных кривых, должны быть касательны к ним. В следующей главе мы увидим, как это пограничное условие упрощается для одного простого класса плоских потоков, именно — безвихревых.

62. Вихри и циркуляция. В предшествующем изложении мы неоднократно упоминали о вихрях, и хотя каждый связывает с этим понятием определенное представление, например картину движения воды при загребании ее веслами, все же это не дает нам определения вихря, которым можно было бы пользоваться для точных рассуждений. Введем такое опре-

деление: вихрь в каком-нибудь месте жидкости определяет величину скорости вращения жидкой частицы, находящейся в рассматриваемом месте.

При движении жидкости в общем случае наблюдается не только вращение, но и изменение формы жидкой частицы. Это изменение формы может рассматриваться как простая деформация; последняя, как известно из теории сопротивления материалов, заключается в удлинении в одном направлении и в сжатии в другом (перпендикулярном к первому). В случае жидкости надо не забывать о ее свойстве не сжиматься, что, впрочем, не накладывает существенного ограничения на эту деформацию. Таким образом, существенное изменение формы жидкой частицы состоит в соединении простой деформации с вращением, при чем частица может рассматриваться как твердая. Более детальный анализ этого вращения показывает, что компоненты угловой скорости $\bar{\omega}$ ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) могут быть представлены следующими выражениями (указываем только одно из них для оси z , два другие ω_y и ω_x получаются из указанного круговой перестановкой)¹⁾:

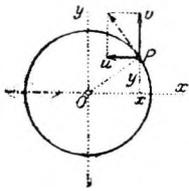
$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (261)$$

Все области, в которых вектор $\bar{\omega}$ ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) отличен от нуля, называются вихревыми; там же, где $\bar{\omega} = 0$, т. е. $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, движение называется безвихревым.

При вращении твердого тела около неподвижной оси z проекции скорости некоторой точки P на направления x и y равны (черт. 136):

$$u = -\omega_z y, v = \omega_z x.$$

Дифференцируя u по y , v по x и вычитая, получим: $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$,



Черт. 136.

т. е. угловая скорость ω_z совпадает в рассматриваемой точке с компонентом вихря по оси z .

С понятием вихря тесно связано понятие о циркуляции скорости. Циркуляцией скорости называется линейный интеграл от вектора скорости взятый вдоль кривой C :

$$\int_{(C)} V \cos(V, ds) ds = \int_{(C)} (u dx + v dy).$$

Если кривая C замкнутая, то тогда этот интеграл можно преобразовать по формуле Стокса в плоскостной, взятый по площади F , заключенной внутри кривой C . Получим:

$$I = \int_{(C)} (u dx + v dy) = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint \omega_z dF \dots (262)$$

т. е. циркуляция вдоль замкнутого контура, внутри которого имеются вихревые области, равна взятому по площади F интегралу от вихря ω_z . В безвихревых потоках циркуляция вдоль замкнутого контура равна нулю.

63. Уравнение давления для безвихревых потоков. Если поток во всей своей области не имеет вихрей, то в нем везде должны удовлетворяться соотношения:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \dots \dots \dots (263)$$

¹⁾ Пока еще не удается найти более удовлетворительного и к тому же более элементарного определения понятия „вихрь“.

Если предположить, что движение установившееся, то тогда в трех уравнениях (259) будет: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \frac{\partial w}{\partial t} = 0$. Умножив эти три уравнения (259) соответственно на dx, dy, dz , сложив их и приняв во внимание равенства (263), получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \left[X dx + Y dy + Z dz - u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \right].$$

Вводя опять функцию ускорения $Xdx + Ydy + Zdz = dW$ и заметив, что $u^2 + v^2 + w^2 = V^2$, перепишем предыдущее уравнение следующим образом:

$$dp = \rho \left[dW - d \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] \dots \dots \dots (264)$$

Если в качестве активного ускорения рассматривать опять только ускорение силы тяжести, то при оси z , направленной вертикально вверх, будем иметь:

$$W = -gz, \dots \dots \dots (265)$$

и интегрирование уравнения (264) для этого особого случая дает:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} = \text{const}, \dots \dots \dots (266)$$

т. е. получается уравнение давления в форме, уже полученной ранее в п. 17. Это уравнение имеет смысл для соответственных значений p, z и V , расположенных на одной определенной линии тока. Только когда значение постоянной, входящей в это уравнение, одно и то же для всех линий тока, сумма трех энергий в левой части уравнения (266) имеет одно и то же значение для любой точки внутри жидкости.

Что касается линий тока, то это те кривые, по касательным к которым направлены скорости частиц во всех точках потока; значит, они являются интегральными кривыми системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \dots \dots \dots (267)$$

где u, v и w есть скорости, зависящие от x, y, z и t и найденные интегрированием уравнений движения.

Если наперед заданная кривая должна быть границей области потока, то, очевидно, она должна быть и линией тока. Это замечание дает возможность представить себе, хотя бы приближенно, расположение линий тока жидкого потока, протекающего между какими-нибудь пограничными кривыми.

Отличительным признаком установившихся потоков является неизменяемость их формы и распределения скоростей во времени; в них u, v, w есть функции одних только координат x, y, z , так что линии тока всюду совпадают с траекториями отдельных частиц.

XII. Плоские и симметричные относительно продольной оси потока.

64. Потенциал скоростей и функция тока плоских безвихревых потоков. Если течение жидкости происходит параллельно плоскости xu , то скорости w и ускорения $\frac{dw}{dt}$ для всех точек равны нулю, равно как и производные $\frac{\partial}{\partial z}$. Из уравнений движения (259) поэтому остаются только два. Далее, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (268)$$

и условие отсутствия вихрей

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (269)$$

показывают, что u и v могут быть двояким образом представлены, как производные некоторой функции; действительно, уравнение (269) удовлетворяется при подстановке

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \dots\dots\dots (270)$$

а уравнение (268) — при подстановке:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \dots\dots\dots (271)$$

φ называют потенциалом скоростей или, короче, потенциалом, ψ — функцией тока. Подставляя равенство (270) в уравнение (269) и равенство (271) в уравнение (268), замечаем, что φ и ψ удовлетворяют так называемому дифференциальному уравнению Лапласа, т.е.

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (272)$$

Из равенств (270) и (271) следует, что φ и ψ являются действительной и мнимой частью аналитической функции Φ комплексного переменного $z = x + iy$

$$\varphi + i\psi = \Phi(z) = \Phi(x + iy) \dots\dots\dots (273)$$

Функцию Φ называют комплексным потенциалом потока. Обратно легко убедиться, что действительная и мнимая части любой аналитической функции комплексного переменного могут быть взяты в качестве потенциала и функции тока (или наоборот) плоского безвихревого потока. Действительно, взяв от Φ производную по z , мы получим компоненты скорости u и v .

$$\frac{d\Phi}{dz} = \Phi'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \dots\dots\dots (274)$$

$\Phi'(z)$ дает, следовательно, так называемую „сопряженную“ скорость $u - iv$, т.е. зеркальное отражение скорости $u + iv$ по отношению к действительной оси. $\Phi'(z)$ тоже есть функция комплексного переменного z , и из написанного равенства видно, что действительная и мнимая части любой аналитической функции комплексного переменного могут быть взяты в качестве компонентов скорости плоского потока. Линии тока (совпадающие здесь с траекториями) определяются согласно уравнения (267) уравнением:

$$v dx - u dy = 0,$$

или, принимая во внимание равенства (271),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0.$$

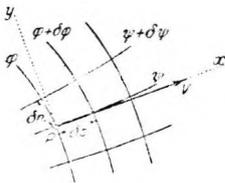
Отсюда следует, что уравнением семейства линий тока будет

$$\psi = \text{const} \dots\dots\dots (275)$$

Из равенств (270) и (271) следует далее, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \dots\dots\dots (276)$$

т.е. семейства кривых $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ образуют ортогональную систему, что, впрочем, уже ясно из их значения, как составных частей аналитической функции комплексного переменного. Семейство $\varphi = \text{const}$ называют потенциальными линиями. Между прочим, значения линий φ и ψ обратимы; это значит, что кривые $\varphi = \text{const}$ могут быть взяты



Черт. 137.

в качестве линий тока, а кривые $\psi = \text{const}$ — в качестве потенциальных линий плоского потока.

Если провести систему осей в направлении касательных к проходящим через какую-либо точку P кривым $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ (черт. 137) и обозначить через δs и δn лежащие в этих кривых отрезки, то из равенств (270) и (271) получатся так называемые „естественные“ уравнения:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \\ 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (277)$$

Из первого из этих уравнений следует, что $V \delta n = \delta \psi$; но $V \delta n$ равно количеству протекающей жидкости между кривыми $\psi = \text{const}$ и $\psi + \delta \psi = \text{const}$; отсюда:

$$Q = \int_0^1 V \delta n = \psi_1 - \psi_0, \dots \dots \dots (278)$$

т. е. количество жидкости, протекающей между двумя линиями тока, равно разности значений функции тока для этих линий.

Давление в каждой точке такого потока определяется уравнением:

$$\frac{p}{\gamma} - \frac{W}{g} + \frac{V^2}{2g} = \text{const}, \dots \dots \dots (279)$$

которое при $W = -gy$ (т. е. при вертикальной оси y) совпадает с ранее полученным уравнением Бернулли (47). В дальнейшем всегда будем понимать, что $V^2 = u^2 + v^2$.

Задача определения движения жидкости между двумя заданными пограничными кривыми может быть формулирована следующим образом: определить функцию $\varphi(x, y)$, которая внутри всей области удовлетворяла бы уравнению Лапласа (272), а на границе — условию (277): $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Общее решение этой задачи, единственным образом возможное, дается теорией потенциала.

Поэтому в случае плоских безвихревых потоков картина движения жидкости и распределение скоростей вполне определяются пограничными условиями; давление в каждой точке получается из уравнения давления (279) после определения скоростей.

Пример 76. Параллельный поток со скоростью V_0 в направлении оси x (т. е. движущийся из $+\infty$) определяется уравнением:

$$\Phi(z) = -V_0 z = -V_0(x + iy) = \varphi + i\psi;$$

следовательно, $\varphi = -V_0 x, \psi = -V_0 y$;

далее, $\Phi'(z) = -V_0 = u - iv$, т. е. $u = -V_0, v = 0$.

Пример 77. Радиальный поток (черт. 138) определяется уравнением:

$$\Phi(z) = V_0 r_0 \log z.$$

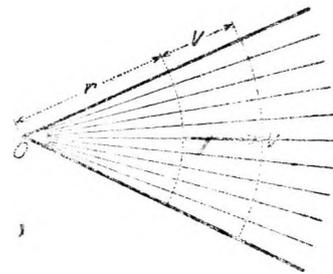
Дифференцируя, находим:

$$\Phi'(z) = V_0 r_0 \cdot \frac{1}{z} = V_0 r_0 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = u - iv,$$

т. е. $u = V_0 r_0 \cdot \frac{x}{r^2}, v = V_0 r_0 \cdot \frac{y}{r^2}.$

Значит, скорость направлена по радиусу и величина ее равна:

$$V^2 = u^2 + v^2 = V_0^2 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad V = V_0 \frac{r_0}{r}.$$



Черт. 138.

Она обратно пропорциональна расстоянию r и зависит от одного только r . Количество протекающей жидкости (в 1 секунду) между двумя стенками $\vartheta = \pm \alpha$ равно:

$$Q = \int_{-\alpha}^{+\alpha} V r d\vartheta = V_0 r_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\vartheta = V_0 r_0 \cdot 2\alpha.$$

Пример 78. Обтекание цилиндра с радиусом основания a .

а) Если жидкость протекает из бесконечности ($+\infty$) со скоростью $-V_0$, поток (черт. 139-а) определяется функцией:

$$\Phi(z) = -V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = \varphi_1 + i\psi_1, \dots \dots \dots (280)$$

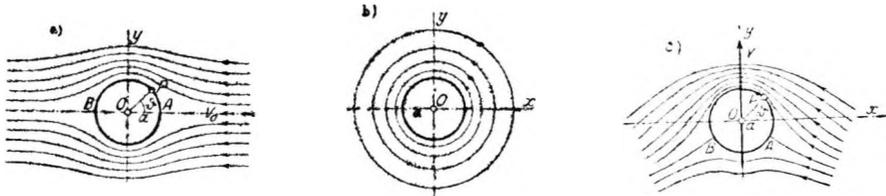
откуда

$$\varphi_1 = -V_0 x \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \psi_1 = V_0 y \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Отсюда видно, что линия тока $\psi_1 = 0$ состоит из $y = 0$ и $z^2 = a^2$, т. е. из оси x до передней критической точки A , где она разветвляется, затем из полуокружностей цилиндра, и — после их соединения в задней критической точке B — опять из оси x . Скорости равны:

$$V \begin{cases} u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -V_0 \left[1 + a^2 \frac{y^2 - x^2}{r^4} \right] \\ v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = V_0 \cdot 2 a^2 \frac{xy}{r^4}. \end{cases}$$

В обеих критических точках A и B скорость $V=0$.



Черт. 139.

б) Около цилиндра может существовать еще поток, изображенный на черт. 139-б у которого линиями тока являются окружности, concentric с окружностью цилиндра. Комплексный потенциал изобразится функцией:

$$\Phi_2(z) = -\frac{Ii}{2\pi} \log z = -\frac{Ii}{2\pi} [\log r + i\vartheta] = \frac{I}{2\pi} [\vartheta - i \log r] = \varphi_2 + i\psi_2 \dots \dots (281)$$

Линиями тока $\psi_2 = \text{const}$ являются окружности $r = \text{const}$. Скорость вдоль каждой линии тока постоянна и равна $V_2 = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$, т. е. обратно пропорциональна радиусу рассматриваемой линии тока. Циркуляция (п. 62) вдоль этой окружности равна

$$I = \int V_2 ds = V_2 \int ds = V_2 \cdot 2\pi r,$$

поэтому внутри этого круга в каком-то месте обязательно должен быть вихрь. Очевидно, что этот вихрь находится в точке $r = 0$, он, следовательно, представляет из себя точку. Критических точек у этого потока не имеется. Такого рода потоки около погруженного в жидкость тела называют чисто-циркуляционными.

с) Так как сумма двух функций комплексного переменного есть опять функция комплексного переменного, то и функцию

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = -V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{Ii}{2\pi} \log z \dots \dots \dots (282)$$

можно рассматривать как комплексный потенциал некоторого плоского потока. Окружность $r = a$ в обоих случаях а) и б) была линией тока; она будет таковой и в этом составном потоке $\Phi(z)$, картина которого представлена на черт. 139-с. Сообразно с величиной I обе критические точки отодвигаются все больше и больше вниз от действительной оси, пока не соединятся в самой нижней точке; при дальнейшем же увеличении I они опускаются еще ниже по оси I , превращаясь в „уединенную критическую точку“. Вычерчивание линий тока и определение скоростей в каждой точке не представляет никаких затруднений.

Эта форма потока является исходной для определения потоков около плоских и кривых пластинок, в частности, около несущих поверхно-

стей (крыльев самолета). При этом приходится пользоваться теорией конформных отображений как вспомогательным средством, имеющим очень большое практическое применение. Общее понятие об этой теории дано в следующем параграфе.

Пример 79. Сила, с которой поток, определяемый ур. (282), действует на цилиндр, равна сумме давлений жидкости $p \cdot dF$ на элементы поверхности dF цилиндра. Эти давления определяются из ур. (279), в котором, если объемные (Massenkräfte) силы отсутствуют, W следует положить равным нулю.

Так как нам нужны давления и скорости только у поверхности цилиндра, подставим в выражения для u_1, v_1 в примере 72: $x = a \cos \vartheta, y = a \sin \vartheta$; получим (черт. 139):

$$u_1 = -V_0(1 - \cos 2\vartheta) = -2V_0 \sin^2 \vartheta, \quad v_1 = 2V_0 \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Скорость V_1 этого потока в точках поверхности погруженного цилиндра направлена по касательной к его круговому поперечному сечению, так как $\frac{v_1}{u_1} = -\operatorname{ctg} \vartheta$. Найдем ее величину:

$$V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 = 4V_0^2 \sin^2 \vartheta, \quad \text{т.е.} \quad V_1 = 2V_0 \sin \vartheta.$$

Циркуляционный поток дает в точках цилиндра скорость $V_2 = \frac{I}{2\pi a}$, направленную тоже по касательной; скоростью составного потока у точек окружности $r = a$ будет

$$V = V_1 + V_2 = 2V_0 \sin \vartheta + \frac{I}{2\pi a}.$$

Если давление в бесконечно удаленной точке равно p_0 , то тогда из ур. (279) следует:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g}$$

и отсюда:
$$p = \left(p_0 + \frac{\gamma}{2g} V_0^2 \right) - \frac{\gamma}{2g} V^2 = \operatorname{const} - \frac{\gamma}{2g} \left[4V_0^2 \sin^2 \vartheta + 2 \cdot 0I \frac{\sin \vartheta}{\pi a} + \frac{I^2}{4\pi^2 a^2} \right].$$

Пользуясь этим выражением, определим сначала давление на погруженный в поток цилиндр в направлении оси x :

$$X = - \int p \cos \vartheta \cdot dF = 0;$$

в направлении же оси y на единицу длины цилиндра (следовательно, для $dF = a d\vartheta$) действует давление:

$$Y = - \int b \sin \vartheta \cdot dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{V_0 I}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{V_0}{g} \cdot \pi$$

или

$$Y = \rho V_0 I. \dots \dots \dots (283)$$

(при подстановке в выше написанный интеграл значения p оставляем только предпоследний член, так как остальные при интегрировании дают члены, равные нулю). Равенство (283) дает величину динамической поддерживающей силы потока, определяемого ур. (282). Это есть известная теорема Жуковского для случая погруженного в жидкость цилиндра: ее можно доказать и для случая погруженного тела произвольной формы. Особенно полезной эта теорема является в теории несущих поверхностей. Из равенства (283) видно, что для получения динамической поддерживающей силы необходимы как скорость V_0 потока (или тела), так и циркуляция I вокруг тела.

65. Конформные отображения. Простая связь, только что обнаруженная между плоскими потоками и теорией функцией комплексного переменного, наводит на мысль, что для определения плоских потоков при заданных пограничных условиях применимы все методы этой теории. И действительно, один из них—метод или теория конформных отображений оказывается особенно полезным. Сущность его заключается в конформном отображении одного потока на другой.

Если в плоскости z ($z = x + iy$) имеется поток с определенными пограничными условиями, то этот поток, как было разъяснено выше, вполне определяется указанием комплексного потенциала $\Phi(z)$. Заменим в этой функции переменное z новым переменным ζ ($\zeta = \xi + i\eta$) комплексной плоскости ξ, η при помощи отображающей функции

$$z = z(\zeta). \dots \dots \dots (284)$$

При этом отображении пограничные кривые перейдут в новые пограничные кривые, а функция $\Phi(z)$ преобразуется в функцию

$$\Phi(z) \rightarrow [z(\zeta)] = \Phi_1(\zeta), \dots \dots \dots (285)$$

дающую комплексный потенциал нового потока. Действительная и мнимая части функции $\Phi_1(\zeta) = \Phi_1(\xi + i\eta)$ дают потенциал и функцию тока нового потока в плоскости ξ, η .

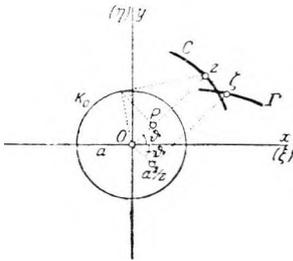
Таким образом, знание одного потока дает возможность определить все те потоки, которые из него получаются при отображении его какой-нибудь функцией вида (284). Следовательно, когда требуется решить какую-нибудь задачу о потоке, достаточно подыскать функцию, отображающую исследуемый поток, нами уже изученный. Однако, нахождение такой функции в общем случае представляет из себя необычайно трудную задачу. Для вышеупомянутой группы задач — для пластинок и несущих поверхностей такие функции указать легко, что и будет сделано в нижеприведенных примерах.

Для применений особое значение имеет отображение

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \dots \dots \dots (286)$$

(здесь уравнение типа (284) решено относительно ζ). Для того, чтобы выполнить отображение, указанное этой функцией, т. е., чтобы от точек плоскости z перейти к соответствующим точкам плоскости ζ , надо составить сумму обоих комплексных чисел z и $\frac{a^2}{z}$, что производится геометрическим

сложением отрезков, соединяющих начало координат с точками z и $\frac{a^2}{z}$ плоскости z (черт. 140). Комплексное число z можно представить в форме $z = x + iy = re^{i\vartheta} = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r^{i\vartheta}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют модулем z , ϑ — аргументом. В таком случае модуль $\frac{a^2}{z}$ равен $\frac{a^2}{r}$, а аргумент равен $-\vartheta$, и точку $\frac{a^2}{z}$



Черт. 140.

можно построить следующим образом: находим зеркальное отражение точки z относительно основного круга радиуса a ; получившуюся точку P зеркально отражаем относительно оси x , т. е. находим точку, симметричную ей относительно оси x . Эта точка и будет искомой. На чертеже 140 плоскости z и ζ совмещены; кривая Γ есть отображение кривой C плоскости z на плоскость ζ .

Отображение (286) оставляет точку $z = \infty$ неподвижной (т. е. ей соответствует в плоскости ζ точка $\zeta = \infty$); значит, поток искажается только в конечной части плоскости.

Конформные отображения получили свое название потому, что они обладают свойством сохранять подобие в бесконечно-малых частях отображаемой и отображенной областей. Легко доказать, что при отображении двух кривых плоскости z , пересекающихся под некоторым углом α , в плоскости ζ получаются кривые, пересекающиеся под тем же углом. В частности, прямые углы переходят в прямые, значит, системы потенциальных линий и линий тока потока в плоскости z переходят в такие же системы в плоскости ζ . Линейные элементы всех кривых, проходящих через определенную точку, изменяются в одном и том же отношении; с переходом в другие точки это отношение меняется, завися от формы отображающей функции.

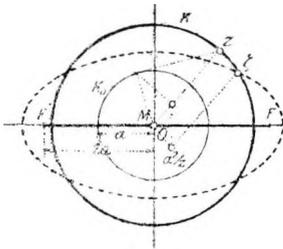
В гидромеханике конформные отображения с большим успехом применяются не только в теории несущих поверхностей, но также и в вопросах истечения.

Пример 80. Пластинки и несущие поверхности. Отображая круг K функцией (286) на плоскость ζ , будем получать различные области, в зависимости от положения начала координат O плоскости z относительно круга K .

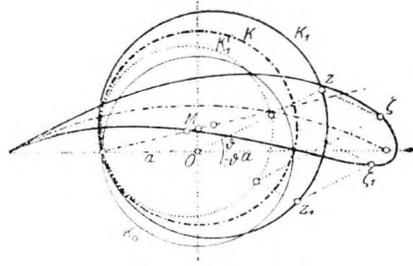
а) Начало координат находится в центре M круга K . Если круг K расположен вне основного круга K_0 (радиуса a), он отображается функцией (286) на эллипс (черт. 141-а); в частности, окружность основного круга при отображении этой функцией переходит в отрезок действительной оси от $x = -2a$ до $x = +2a$, т. е. поток, обтекающий основной круг, отображается в поток, обтекающий плоскую пластинку.

б) Начало координат лежит на оси y на некотором расстоянии от центра M . Отображением окружности K_0 с центром в M будет пластинка, изогнутая по дуге круга; отображением круга K_1 , заключающего в себе круг K_0 и касающегося его в точке A , будет профиль в виде несущей поверхности, заключающей в себе дугу, являющуюся отображением окружности K_0 (черт. 141-б).

Во всех случаях отображенная кривая строится по точкам способом, указанным на черт. 140; поток же определяется уравнением (282) после замены в нем z через функцию $z(\zeta)$, получаемую решением ур. (286) относительно z . Напомним, что ур. (282) до подстановки определяет поток около круга. Если поток движется не из направления положительной оси x , а под некоторым углом $\pm \alpha$ к этой оси, то это обстоятельство учитывается соответствующим изменением функции (286).

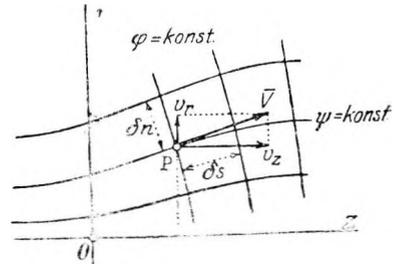


Черт. 141а.



Черт. 141б.

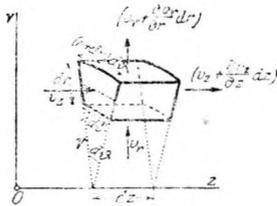
66. Поток, симметричные относительно продольной оси. Вторую группу потоков, в известном смысле подобных плоским потокам и одинаково с ними изучаемых, составляют безвихревые потоки, симметричные относительно продольной оси. Отличительным признаком их является то, что в них движение жидкости происходит в плоскостях, которые все проходят через неподвижную продольную ось, и движение это одинаково во всех таких плоскостях; для описания потока достаточно указаний, как происходит движение в одной из таких „меридиональных“ плоскостей.



Черт. 142.

Пусть Oz (черт. 142) — ось вращения, z и r — прямоугольные координаты какой-нибудь точки P , v_z и V_r — компоненты скорости V точки P . Условие отсутствия вихрей представится в этом случае совершенно так же, как и в случае плоских потоков:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad \dots \dots \dots (287)$$



Черт. 143.

Для вывода уравнения неразрывности рассмотрим в потоке геометрическую фигуру в виде части шарового сектора (можно предположить ее сделанной из проволоки, черт. 143), ширина которой dz , толщина — dr , внутренняя длина — $r \cdot d$, внешняя — $(r + dr) \cdot d$, и вычислим количества жидкости, протекающие через боковые поверхности этой фигуры. Через левую боковую поверхность $r \cdot d \cdot dr$ вытекает количество жидкости $v_z \cdot r \cdot d \cdot dr$, а через противоположащую поверхность вытекает

$$\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dr\right) \cdot r \cdot d\vartheta \cdot dr,$$

в рассматриваемом объеме остается количество жидкости

$$-\frac{\partial v_z}{\partial z} dz \cdot r \cdot d\vartheta \cdot dr.$$

Через внутреннюю цилиндрическую поверхность $r \cdot d\vartheta \cdot dz$ втекает количество жидкости $v_r \cdot r \cdot d\vartheta \cdot dz$, а через противоположную поверхность $(r + dr) \cdot d\vartheta \cdot dr$ вытекает $\left(v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)(r + dr) \cdot d\vartheta \cdot dz$; в рассматриваемом объеме остается количество жидкости

$$-\frac{\partial v_r}{\partial r} dr \cdot r \cdot d\vartheta \cdot dz - v_r \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot dz.$$

Если рассматриваемый объем все время должен быть наполнен жидкостью, сумма указанных остатков должна равняться нулю:

$$r \frac{\partial v_z}{\partial z} + r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r = 0 \text{ или } \frac{\partial (rv_z)}{\partial z} + \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \dots \dots \dots (288)$$

Таким образом, в этом случае уравнение неразрывности несколько отличается от подобного же уравнения в декартовых координатах; причиной этому является расширение элемента объема в направлении r .

v_z и v_r , входящие в уравнения (287) и (288), двояким образом могут быть представлены как производные одной и той же функции: или потенциала скоростей φ или функции тока ψ , совершенно так же, как это было и в случае плоских потоков. Действительно, уравнение (277) удовлетворяется при подстановке

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \dots \dots \dots (289)$$

а уравнение (288) — при подстановке

$$v_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \dots \dots \dots (290)$$

Подставляя равенство (289) в уравнение (288) и равенства (290) в уравнение (288), получим, после деления на r , дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции φ и ψ :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

и

$$\Delta_1 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \dots \dots \dots (292)$$

Первое из них называется потенциальным уравнением симметричного относительно продольной оси потенциала и цилиндрических координатах, а второе — дифференциальным уравнением функции тока Стокса.

Как и в случае плоских потоков, линиями тока являются кривые $\psi = \text{const}$; действительно, так как для линии тока направление скорости совпадает с касательной к линии, то

$$\frac{v_r}{v_z} = \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial z}}{\frac{\partial \psi}{\partial r}} \text{ или } \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0,$$

т. е. $\psi = \text{const}$. По прежнему, количество жидкости, протекающей между двумя кривыми $\psi_0 = \text{const}$ и $\psi_1 = \text{const}$, равно разности $\psi_1 - \psi_0$.

Также легко показать, что линии тока $\psi = \text{const}$ образуют с потенциальными линиями $\varphi = \text{const}$ ортогональную систему кривых; на самом деле:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \dots\dots\dots (293)$$

а это есть условие перпендикулярности двух кривых.

Наконец, обозначив через ds элемент кривой $\psi = \text{const}$ и через dn элемент кривой $\varphi = \text{const}$ получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \\ 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial s} \end{aligned} \dots\dots\dots (294)$$

Но зато в этом случае кривые $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ уже не могут заменять друг друга. Равенства (289) и (290) показывают, что функции φ и ψ имеют даже разные размерности.

Проблема интегрирования уравнений (291) и (292) сводится к построению симметричного относительно продольной оси потока внутри заданной меридиальной кривой; иными словами, надо определить такую функцию φ , чтобы она в заданной области удовлетворяла уравнению (291), а на границе области — условию (294):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

В следующем примере указаны некоторые случаи решения этой проблемы.

Пример 81. Полиномиальные и другие решения. Следующие функции удовлетворяют уравнениям (291) и (292), что нетрудно проверить подстановкой:

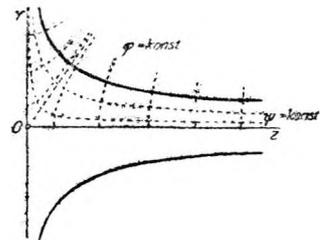
а) поток, параллельный оси z со скоростью V_0 .

$$\varphi = V_0 z, \psi = \frac{V_0 r^2}{2};$$

б) $\varphi = \log r, \psi = -z$ (черт. 144);

в) $\varphi = 2z^2 - r^2, \psi = 2r^2 z$;

д) $\varphi = \frac{1}{V} \frac{1}{z^2 + r^2}, \psi = \frac{z}{V} \frac{z}{z^2 + r^2}$



Черт. 144.

(Необходимо помнить еще равенства (289) и (290), которые оба должны давать одни и те же значения v_z и v_r).

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

ДИНАМИКА ГАЗОВ.

В этой части — в качестве дополнения — даны основные сведения о важнейших свойствах и изменениях состояния газов; разобраны важные для техники проблемы истечения газов из сосудов под внутренним давлением и течения газов в трубопроводах, поскольку эти проблемы можно разобрать, не вводя особых вспомогательных предложений из термодинамики

I. Основные законы для газов и изменения их состояния.

65. Законы для газов. В то время, как реальные жидкости несжимаемы — обладают постоянным объемом (т. е. с большим приближением можно считать $\rho = \text{const}$ при всех применяемых давлениях), каждый газ, наоборот, обладает свойством стремиться занять весь предоставленный ему объем. От величины этого объема зависит давление, которое существует в данном газе, и поэтому плотность ρ следует полагать функцией давления. — Газами мы будем считать все сильно сжимающиеся жидко-

сти; к ним принадлежат атмосферный воздух, просто так называемые газы, также и пары, в различных своих состояниях.

Для представления о физическом состоянии газа, кроме давления p и плотности ρ , необходимо знать еще третью величину — температуру, влияние которой в жидкостях заметно сказывалось лишь на величине вязкости; состояние же газов в существенном зависит от температуры. Она измеряется в градусах Цельзия и обозначается буквой T . Вместо нее часто вводится величина $\theta = T + 273^\circ$, называемая абсолютной температурой; она измеряется от „абсолютного нуля“ точки, лежащей на 273° ниже нуля скалы Цельзия. При увеличении температуры газа, заключенного в постоянном объеме, давление этого газа увеличивается. При изучении газов часто гораздо удобнее вместо плотности ρ или веса единицы объема γ иметь дело с удельным объемом v , т. е. объемом, занимаемым определенным весом газа, большей частью 1 кг при определенных значениях p и T . Между обеими величинами v и γ существует зависимость:

$$v \gamma = 1 \text{ или } v = \frac{1}{\gamma} \dots \dots \dots (295)$$

p , v и T (или θ) называют величинами, определяющими состояние газа. Закон Бойля-Гей-Люссака для случая так называемых идеальных газов устанавливает между этими величинами следующую зависимость:

$$p \cdot v = \Re \Theta = \Re (273 + T) \dots \dots \dots (296)$$

В этом уравнении \Re есть так называемая газовая постоянная, для каждого газа имеющая определенное значение. Измеряя p в $\text{кг}/\text{м}^2$ в v $\text{км}^3/\text{м}^3$ и T в градусах Цельзия, получим для \Re следующие значения:

для воздуха	$\Re = 29,27$
„ кислорода (O)	$\Re = 26,47$
„ азота (N)	$\Re = 30,19$
„ водорода	$\Re = 422,59$

Если величины p , v , T и p_0 , v_0 , T_0 обозначают два состояния газа, то уравнению (296) можно придать следующую форму:

$$\frac{pv}{273 + T} = \frac{p_0 v_0}{273 + T_0} \dots \dots \dots (297)$$

Это уравнение позволяет определить какую-нибудь одну из величин p , v или T , если известны две из них и еще три величины p_0 , v_0 , и T_0 для какого-нибудь начального состояния газа; например,

$$v = v_0 \frac{273 + T}{273 + T_0} \cdot \frac{p_0}{p}, \quad p = p_0 \frac{273 + T}{273 + T_0} \cdot \frac{v_0}{v},$$

$$273 + T = (273 + T_0) \frac{pv}{p_0 v_0} \dots \dots \dots (298)$$

Пример 82. Вес единицы объема γ_0 атмосферного воздуха при 760 мм ртутного столба и 0°C (нормальный вес единицы объема атмосферного воздуха).

Подставляя в ур. (298) $\Re = 29,27$, $p_0 = 0,76 \cdot 13600 = 10333 \text{ кг}/\text{м}^2$, $T = 0^\circ \text{C}$, получаем:

$$\gamma_0 = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{p_0}{\Re (273 + T_0)} = \frac{10333}{29,27 \cdot 273} = 1,293 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Таким образом столб воздуха из $29,27 \cdot 273 \cong 8000$ кубов со сторонами, равными 1 м, оказывает на свое основание давление, равное нормальному атмосферному (760 мм). Этот столб воздуха в 8000 м высотой называют высотой нормальной атмосферы (см. пример 2). Ур. (297) является основным для барометрического измерения высот.

Пример 83. Подъемная сила свободного аэростата. Пусть \Re есть объем свободного аэростата, наполненного газом с весом единицы объема γ $\text{кг}/\text{м}^3$, при нормальном давлении p_0 $\text{кг}/\text{см}^3$ (соответствующем давлению 760 мм ртутного столба) и температурой $T^\circ \text{C}$. Нормальная подъемная сила A такого шара, т. е. подъемная сила его в воздухе с весом единицы объема $\gamma_0 = 1,293 \text{ кг}/\text{м}^3$ и равным давлением, согласно принципу Архимеда, равна:

$$A = \Re (\gamma_0 - \gamma) = \Re \gamma_0 \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0}\right) = \Re \gamma_0 (1 - \delta) \dots \dots \dots (299)$$

В этом уравнении $\delta = \frac{\gamma}{\gamma_0}$ означает отношение веса единицы объема γ газа к весу единицы объема γ_0 воздуха при равных, конечно, нормальных значениях p_0 и T_0 (760 мм Hg и 0° C). Величина

$$\frac{A}{\mathfrak{B}} = \gamma_0 (1 - \delta) \dots \dots \dots (300)$$

есть подъемная сила на 1 куб. м газа при тех же условиях. (Заметим, что в приведенных рассуждениях мы не принимали во внимание изменения значений γ_0 и γ вдоль вышины шара.)

В прилагаемой таблице указаны значения подъемной силы на 1 м³ и на 1 кг (при 760 мм Hg и 0° C) водорода, светильного газа и гелия, употребляемых для наполнения аэростатов.

Г А З	Вес единицы объема γ [кг/м ³]	Удельный объем $\mathfrak{B} = \frac{1}{\gamma}$	Отношение $\frac{\gamma}{\gamma_0} = \delta$	$1 - \delta$	Нормальная подъемная сила на 1 м ³ $\gamma_0 (1 - \delta)$ [кг/м ³]	Подъемная сила на 1 кг газа $\frac{\gamma_0 (1 - \delta)}{\gamma_0 \delta} = \frac{1 - \delta}{\delta}$ кг/кг
Воздух	1,293 = γ_0	0,773	1	0	0	0
Водород очищенн.	0,089	11,23	0,067	0,933	1,20	13,8
" неочищ.	0,15	6,67	0,116	0,884	1,14	7,6
Гелий	0,18	5,56	0,139	0,861	1,11	6,2
Светильный газ .	0,59	1,695	0,456	0,544	0,7	1,2

Нормальная подъемная сила „Цепелина“ с объемом в 15000 м³ наполненного неочищенным водородом, равна

$$A = \mathfrak{B} \gamma_0 (1 - \delta) = 15000 \cdot 1,14 = 17100 \text{ кг.}$$

Действительная же его подъемная сила в большой степени зависит от атмосферных условий — давления, температуры, следовательно, меняется с временами года. Для Средней Европы вес единицы объема воздуха колеблется между следующими средними значениями:

для летнего минимума..... 770 мм Hg, $T = 25^\circ \text{C}$, $\gamma = 1,09 \text{ кг/м}^3$;
 для зимнего максимума..... 777 мм Hg, $T = 15^\circ \text{C}$, $\gamma = 1,38 \text{ кг/м}^3$

подобным же образом меняется и вес единицы объема газа, наполняющего воздушный шар.

В Цепелине указанных размеров эти колебания вызывают изменение подъемной силы на 4500 кг.

Если газ заключен в объеме, в котором имеется какая-нибудь движущаяся часть, как, например, поршень в цилиндре, и если, кроме того, давление во внешнем пространстве меньше внутреннего давления газа, то газ будет выдвигать поршень до тех пор, пока не выравняются давления внутри и снаружи. Это свойство называют способностью расширения газа. Если внешнее давление равно нулю, то в таком случае работа расширения 1 кг газа при перемещении поршня на бесконечно малую длину ds равна $d\mathfrak{A} = p F ds = p dv$, а при конечном перемещении, когда объем газа увеличивается от v_1 до v_2 , работа равна

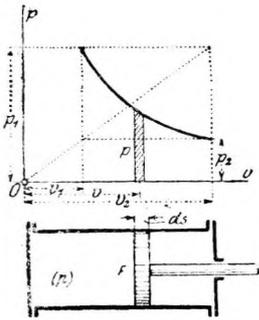
$$\mathfrak{A} = \int_{v_1}^{v_2} p dv \dots \dots \dots (301)$$

Этот же интеграл, взятый с отрицательным знаком, дает величину работы, которую надо затратить для сжатия того же газа от объема v_2 до объема v_1 .

Чтобы вычислить этот интеграл, надо знать вид функциональной зависимости $p = p(v)$ между давлением и объемом газа в работающем цилиндре. Для вывода этой зависимости придется рассмотреть вопрос об изменениях состояния газа.

Изменение состояния газа наглядно представляют кривой, наносимой на чертеж, — газовой диаграммой; площадь, заключенная между этой кривой, осью v и пограничными ординатами, согласно формулы (301), дает величину работы, производимой при рассматриваемом изменении состояния (черт.145).

68. Изменения состояния. Если газ (или пар) принимает участие в работе какой-нибудь машины, например пневматической, паровой или двигателя внутреннего сгорания, то во время процесса работы величины p , v , T , определяющие состояние газа, претерпевают изменения, для которых и надо установить законы. Это изменение состояния газа (или пара) обуславливается многими причинами и в общем случае представляет из себя очень сложное явление. И здесь, как вообще при изучении многих физических и технических процессов, приходится прибегать к „идеализированию“, упрощению разбираемого явления принятием какого-нибудь определенного предположения, в данном случае — о наличии простого соотношения между величинами p , v и T (или других, им соответствующих), которое позволило бы произвести математическую разработку явления. Эти предположения предпочитают брать в форме зависимости между двумя только из трех величин p , v и T и, главным образом, — между p и v .



Черт. 145.

в форме зависимости между двумя только из трех величин p , v и T и, главным образом, — между p и v .

Наиболее простые из мыслимых изменений состояний газа, правда, часто очень сильно отличающихся от изменений состояния, происходящих в действительности, это те — при которых одна из трех величин, определяющих состояние газа в связанных уравнение (296), остается постоянной, а две другие изменяются согласно тому же уравнению (296). Остановимся на следующих из таких изменений:

а) Изменение состояния при постоянном давлении. Если $p = \text{const}$, то тогда при расширении газа от объема v_1 до объема v_2 работа расширения равна

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p(v_2 - v_1) \dots \dots \dots (302)$$

Такое изменение состояния возможно лишь в том случае, если цилиндр соединен с большим сосудом — резервуаром, в котором давление поддерживается на одинаковой высоте. Зависимость между p и v изобразится прямой линией, параллельной оси v .

б) Изотермическое изменение состояния характеризуется постоянной температурой, $T = \text{const}$. Уравнение (296) в этом случае дает:

$$pv = p_1v_1 = p_2v_2 = \text{const}.$$

Кривой зависимости между p и v будет равносторонняя гипербола (если p и v откладываются в одинаковом масштабе). 1 кг газа при расширении совершает работу

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p_1v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1v_1 \log \frac{v_2}{v_1} = p_1v_1 \log \frac{p_1}{p_2} \dots \dots \dots (303)$$

И это предположение, $T = \text{const}$, конечно, не соответствует действительности, впрочем оно может быть осуществлено применением очень большого регенератора с неизменяющейся температурой T , хорошо сообразующегося с работающей массой газа.

Пример 84. Мощность пара, расширяющегося в цилиндре паровой машины. Наблюдения показывают, что расширение газа в цилиндре паровой машины приближенно может быть принято совершающимся по изотермическому закону.

Приняв это предположение, вычислим мощность расширяющегося в цилиндре пара, если в каждую минуту его поступает $0,60 \text{ м}^3$, при чем вдоль пути от 0 до v_1 , (черт. 146) давление его остается постоянным, равным 6 кг/см^2 , начиная же от v_1 дальнейший доступ пара прекращается, и пар, уже поступивший в цилиндр, продолжает расширяться до нормального атмосферного давления.

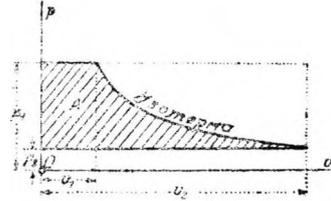
Если и по другую сторону поршня давление равно нормальному атмосферному, то работа \mathfrak{A} , произведенная при этом движении поршня, по своей величине равна заштрихованной площади на черт. 146; формула (303) дает:

$$\mathfrak{A} = p_1 v_1 + p_1 v_1 \log \frac{p_1}{p_2} - p_2 v_2 = \frac{p_1}{\gamma_1} \log \frac{p_1}{p_2} [\text{кгм/кг пара}].$$

Вес поступающего в 1 секунду пара $G = 0,01 \gamma_1 \text{ кг/сек.}$, следовательно мощность

$$L = G\mathfrak{A} = 0,01 \cdot p_1 \log \frac{p_1}{p_2} = 500 \cdot 1,58 = 790 \text{ кгм/сек.}$$

или в лошадиных силах: $N = \frac{L}{75} = 10,5 \text{ л. с.}$



Черт. 146.

с) Адиабатическое изменение состояния. Как уже было сказано, общим свойством для всех газов является повышение температуры их при сжатии и понижение — при расширении. Температура будет оставаться постоянной только в том случае, если при сжатии некоторой массы газа у нее отнять тепло, а при расширении сообщать ей тепло извне. При работе же тепловых двигателей этого не бывает — количество тепла в массе газа, изолированной от внешних влияний, при изменении состояния остается почти постоянным. Такое изменение состояния называют адиабатическим, и соответствующую кривую зависимости между p и v — адиабатой.

В термодинамике закон адиабатического изменения состояния выводится в следующей форме:

$$p v^x = p_1 v_1^x = \text{const}, \dots \dots \dots (304)$$

где $x = \frac{c_p}{c_v}$ есть отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме, при чем x всегда > 1 ; для воздуха, например, $x = 1,405$; p_1 и v_1 обозначают сопряженную пару значений давления и объема, соответствующую, например, начальному моменту изменения состояния.

Чтобы вычислить работу 1 кг газа, совершаемую им при переходе от состояния p_1, v_1 к состоянию p_2, v_2 , дифференцируем сначала уравнение (304); разделяя результат на v^{x-1} , получаем; $v dp = -x p dv$; прибавляя к обеим частям этого уравнения по $p dv$, преобразуем его в следующее: $d(pv) = -(x-1) p dv$ Формула (303) теперь даст:

$$\mathfrak{A} = \int_{v_2}^{v_1} p dv = \frac{1}{x-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2); \dots \dots \dots (305)$$

обе пары значений p_1, v_1 , и p_2, v_2 , определяющих состояние газа, связаны друг с другом уравнением (304).

Пример 85. Определить мощность пневматической машины в лошадиных силах, если в нее в каждую минуту поступает $1,2 \text{ м}^3$ воздуха под давлением в 5 кг/см^2 , который расширяется до достижения им нормального атмосферного давления $1,033 \text{ кг/см}^2$, изменение состояния предполагается адиабатическим.

Согласно формуле (305), при адиабатическом расширении от состояния p_1, v_1 к состоянию p_2, v_2 работа 1 кг газа равна

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{x-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 - \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{x}}\right].$$

Вес воздуха, поступающего в машину в 1 сек., равен $G = \frac{1,2}{60} \cdot \gamma_1 = 0,02 \gamma_1 \text{ кг/сек.}$, следовательно, мощность машины в кгм/сек. равна

$$L = G\mathfrak{A} = 0,02 \cdot \frac{p_1}{x-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{x}}\right] = 902,6 \text{ кгм/сек.},$$

в лошадиных силах: $N = \frac{L}{75} = 12,03 \text{ л. с.}$

d) Политропическое изменение состояния. Действительные процессы расширения и сжатия газа (или пара), происходящие в тепловых машинах, можно подвести под случай адиабатического изменения состояния лишь в том случае, если расширяющийся газ (или пар) не получает вновь тепла от стенок цилиндра. Если же это условие не выполняется, приходится обратиться к какому-нибудь новому предположению, которое позволило бы точнее учесть детали происходящего явления. Изменение состояния, при котором газ получает тепло извне, называют политропическим; закон этого изменения представляется такой же формулой, как и закон адиабатического изменения:

$$p v^n = \text{const} \dots \dots \dots (306)$$

только здесь для показателя n берется промежуточное значение между показателями в формулах изотермического и адиабатического изменений состояния, т. е. $1 < n < \frac{c_p}{c_v} = \kappa$. Это значение n определяется опытным путем для каждого отдельного случая. Работа 1 кг газа при политропическом расширении выражается формулой, аналогичной формуле (305), с заменой только $\kappa - 1$ через $n - 1$:

$$A = \frac{1}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \dots \dots \dots (307)$$

II. Истечение из отверстий и трение в трубах.

69. Уравнение движения элементарной газовой струйки. Уравнение движения элементарной газовой струйки выводится на основании тех же соображений, что и для жидкой струйки, и форма уравнения движения полностью совпадает с ранее выведенным уравнением (46). Единственное отличие состоит в том, что при дальнейшем оперировании с уравнением движения газовой струйки следует принимать во внимание свойства „среды“ — газа, а именно: плотность ρ уже нельзя считать постоянной; она зависит от изменения состояния газа, которое следует полагать либо адиабатическим, либо политропическим; следовательно, в газах плотность ρ есть функция давления, $\rho = \rho(p)$.

Интегрирование уравнения (46), в котором скорость будем обозначать теперь буквой w , чтобы избежать смешения с объемом v , дает для газовой струйки уравнение давления:

$$\frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const.} \dots \dots \dots (308)$$

член gz , зависящий от силы тяжести, в большинстве приложений отбрасывается в виду своей малости.

Уравнение неразрывности газовой струйки должно выразить, что масса газа (или его вес G), протекающая в 1 секунду через все поперечные сечения струйки, остается постоянной, т. е.

$$G = \gamma F w = \text{const}, \text{ или } G = \frac{F w}{v} = \text{const.} \dots \dots \dots (309)$$

Интеграл $\int \frac{dp}{\rho}$, входящий в уравнение (308), есть функция давления; обозначив его через $P(p)$, придадим уравнению (308) форму:

$$\frac{w^2}{2} + P(p) = \text{const}, \dots \dots \dots (310)$$

При адиабатическом изменении состояния $\rho v^\kappa = p_1 v_{1\kappa}$; отсюда, так как $\gamma = \rho \cdot g$, следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\gamma}{g} = g \cdot v = g \cdot v_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

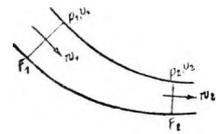
$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = g \cdot v_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\alpha}} \int \frac{dp}{p^{\frac{1}{\alpha}}} = g \cdot v_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{p^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= g \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{v_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\alpha}}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot p = g \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot p v.$$

Взяв в газовой струйке два места (черт. 147), в которых скорости равны w_1, w_2 , состояние определяется величинами $(p_1, v_1), (p_2, v_2)$, представим уравнение движения этой струйки, предполагая изменение состояния адиабатическим, в следующей формуле:

$$\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} = \frac{g \cdot \alpha}{\alpha-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \dots \dots \dots (311)$$

70. Истечение газов под внутренним давлением. Газ, находящийся в сосуде в определенном состоянии (p_i, v_i) вытекает из него наружу через отверстие с хорошо закругленным устьем. Если при этом истечении величины, определяющие состояние газа внутри сосуда, остаются неизменными и само истечение тоже не меняется со временем, оно называется установившимся.

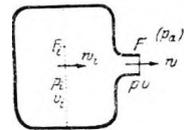


Черт. 147.

Так же, как и в случае жидкостей, движение газа здесь рассматривается как движение струйки, уравнение которого было выведено в предыдущем параграфе. Изменение состояния газа при его переходе от внутреннего сечения F_i до сечения в конце устья F предполагается адиабатическим. За устьем площадь сечения F_i становится бесконечно большой по сравнению с F , следовательно, скорость w_i — бесконечно малой по сравнению с w (черт. 148). Поэтому уравнение (311) переписется так:

$$\frac{w^2}{2} = \frac{g \cdot \alpha}{\alpha-1} (p_i v_i - p v) \dots \dots \dots (312)$$

Теперь, чтобы при заданном состоянии p_i, v_i газа внутри сосуда вычислить w , необходимо указать, какие значения следует вставить в это уравнение для p и v . Если предположить, что сосуд, из которого происходит истечение, находится в совершенной тепловой изоляции и движение газа происходит без трения, то в таком случае явление истечения представляло бы из себя адиабатический процесс; следовало бы применить уравнение (304) и из него можно было бы определить хотя бы v , как функцию p . Если же учитывать несовершенство тепловой изоляции и наличие внутреннего трения газа, на которое затрачивается тепло, частично вновь подводимое, процесс истечения следует принять политропическим (по Zeoner'у) и пользоваться уравнением



Черт. 148.

$p v^n = p_i \cdot v_i^n$; в таком случае: $\frac{p v}{p_i v_i} = \left(\frac{v_i}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ и уравнение (312) принимает вид:

$$\frac{w^2}{2} = \frac{g \cdot \alpha}{\alpha-1} p_i v_i \left[1 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \dots \dots \dots (313)$$

При помощи этого уравнения определяется вес газа, вытекающего в 1 секунду:

$$G = \gamma F w = \frac{F w}{v} = F w \frac{1}{v_i} \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{1}{n}} = F \sqrt{2g \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{p_i}{v_i} \left[\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]} \dots (314)$$

Остается решить еще вопрос, какое значение приписать в этом уравнении p . Нетрудно убедиться, что давление p у устья отверстия полагать всегда равным внешнему давлению p_a нельзя; на самом деле, тогда из формулы (314) следовало бы, что при истечении в пустоту ($p_a = 0$) для $p = p_a = 0$ и $G = 0$. чего, конечно, быть не может. Следовательно, всякий раз, когда $p_a \sim 0$, нельзя полагать $p = p_a$.

Saint-Venant и Wantzel дали следующее решение этого вопроса. Для заданных p_p, v_i имеется определенное значение p , при котором G принимает наибольшее значение; его называют критическим давлением и обозначают через $p = \beta p_i$. Тогда из формулы (314) следует, что G , рассматриваемое как функция от p или β , будет иметь maximum тогда, когда будет иметь maximum выражение:

$$\left(\frac{p}{p_i}\right)^2 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \zeta^n - \beta^{\frac{n+1}{n}}.$$

Отсюда дифференцированием находим искомое значение β :

$$\beta = \frac{p'}{p_i} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \dots \dots \dots (316)$$

Следует различать два случая:

I. При большой величине отношения $\frac{p_a}{p_i} > \beta$ полагают $p = p_a$, так что:

$$\left. \begin{aligned} w &= \sqrt{2g \frac{x}{x-1} p_i v_i \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right]} \\ G &= F w \cdot \frac{1}{v_i} \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (317)$$

В частности, при не большой разности давлений $p_i - p_a$ во внутреннем и внешнем пространстве получаем:

$$\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(1 - \frac{p_i - p_a}{p_i}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{p_i - p_a}{p_i}$$

и поэтому:

$$\left. \begin{aligned} w &= \sqrt{2g \frac{x}{x-1} \frac{n-1}{n} v_i (p_i - p_a)} \\ G &= F \cdot w \cdot \frac{1}{v_i} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots$$

II. При небольшой величине отношения $\frac{p_a}{p_i} < \beta$ полагают $p = \beta p_i$, так что:

$$w = \sqrt{2g \frac{x}{x-1} p_i v_i \left[1 - \beta^{\frac{n-1}{n}} \right]} = \sqrt{2g \frac{x}{x-1} p_i v_i \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)}$$

или:

$$\left. \begin{aligned} w &= \sqrt{2g \frac{x}{x-1} \cdot \frac{n-1}{n+1} p_i v_i} \\ G &= F \cdot w \cdot \frac{1}{v_i} \cdot \beta^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (318)$$

Значения, получаемые по этим формулам, хорошо согласуются с опытными данными.

71. Движение газов в трубах. При течении газа в трубах наблюдаются те же явления, что и при течении жидкостей. При небольших скоростях течение бывает ламинарным, при достижении же скоростью определенного критического значения, оно становится вихревым или турбулентным. В технике приходится иметь дело только с течениями последнего рода. Только в случае газов вместо высоты сопротивления h_r , возникающей от трения в трубе, предпочитают вводить в вычисления потерю давления на концах трубопровода, возникающую от того же трения и которая с высотой сопротивления связана уравнением: $\Delta p = \gamma h_r$.

Для прямого трубопровода с длиной l и диаметром D , Δp можно представить в следующей форме:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma \dots\dots\dots (319)$$

Таким образом, все дело сводится к определению λ , что и производится опытным путем. Такие опыты были проделаны многочисленными исследователями; у всех λ оказалась зависящей опять-таки от D , w и γ . Из большого числа опубликованных результатов остановимся только на двух:

а) По G r a s h o f ' y

$$\lambda = 0,01355 + \frac{0,001235 + 0,01 D}{D \sqrt{w}} \dots\dots\dots (320)$$

[D в м, w в м/сек.]

Подставляя это значение в формуле (319), получим высоту потери в мм водяного столба или $кг/м^3$ (для обоих наименований числа совпадают).

б) По F r i t s c h e, если l и D измерены в м, w в м/сек., γ в $кг/м^2$,

$$\Delta p = \frac{184,3 \cdot 10^{-4}}{D^{0,269} (\gamma w)^{0,148}} \cdot \gamma \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{w^2}{2g} [кг/м^2] \dots\dots\dots (321)$$

И по этой формуле Δp получается в $кг/м^2$ или в мм водяного столба. Эта формула действительна для всех газов, а также и для паров в их различных состояниях (если взять соответствующее значение для γ).

Местные сопротивления, вызываемые в газопроводах определенными приспособлениями — закруглениями, разветвлениями, задвижками, вентилями, определяются тоже опытным путем; только здесь картина происходящих явлений на много сложнее, чем при течении жидкостей.

Пример 86. По прямому трубопроводу с диаметром $D = 0,2$ м и длиной $l = 60$ м в один час протекает 3000 м³ влажного воздуха при 20° С и 755 мм Hg с весом единицы объема = $1,19$ кг/м³. Как велика потеря давления?

Объем газа, протекающего в 1 час, равен $\frac{3000}{1,190} = 2520$ м³/час, поэтому скорость равна

$$w = \frac{2520}{3600 \cdot \pi \frac{D^2}{4}} = \frac{2520}{3600 \cdot 0,0314} = 22,3 \text{ м/сек.}$$

Подставив это значение,

а) в формулу G r a s h o f ' a, получим:

$$\lambda = 0,01697, \Delta p = \gamma \cdot h_r = 160,2 \text{ кг/м}^2 \text{ или мм водяного столба}$$

б) в формулу F r i t s c h e:

$$\Delta p = \frac{184,3 \cdot 10^{-4}}{0,2^{0,269} (1,19 \cdot 22,3)^{0,148}} \cdot 1,19 \cdot \frac{60}{0,2} \cdot \frac{22,3^2}{18,62} = 158,3 \text{ кг/м}^2 \text{ или мм водяного}$$

столба.

О Г Л А В Л Е Н И Е .

	СТР. 3
Введение	
Основные понятия. 1. Приложение законов механики твердого тела к жидкостям и газам. 2. Свойства жидкостей. 3. Гидромеханическое давление	3 - 6
Часть первая. Гидростатика.	
I. Равновесие. Поверхности равного давления. 4. Условия равновесия. 5. Сжатые жидкости. 6. Тяжелые жидкости. 7. Тяжелые жидкости под действием дополнительного ускорения	6 - 13
II. Давление на плоские и кривые стенки. 8. Плоские стенки. Центр давления. 9. Примеры. 10. Кривые стенки	13 - 21
III. Плавание тел. 11. Равновесие плавающих тел. Глубина погружения. 12. Статическая устойчивость свободно-плавающих тел	21- 28
Часть вторая. Гидравлика.	
I. Одномерное движение. 13. Проблемы гидравлики. 14. Элементарная жидкая струйка (трубка тока). 15. Уравнение неразрывности. 16. Уравнение движения идеальной жидкой струйки. 17. Уравнение Д. Бернулли (уравнение давления)	28- 34
II. Истечение жидкостей из сосудов. 18. Закон Торичелли. 19. Влияние вязкости. Сжатие вытекающей струи. 20. Коэффициенты расхода для донных и боковых отверстий. 21. Особые случаи истечения. 22. Водосливы. 23. Плотины. 24. Время истечения и опорожнения. А. Истечение из донных отверстий. В. Истечение из боковых отверстий	34 - 47
III. Силы, с которыми движущиеся жидкости действуют на проводящие их сосуды. 25. Сила, с которой струя жидкости действует на проводящий ее покоящийся сосуд. 26. Движущиеся сосуды. 27. Уравнение давления для равномерно вращающейся жидкой струйки	47- 54
IV. Давление струи. 28. Предварительные понятия. 29. Прямое давление струи. 30. Косое давление струи	54- 58
V. Потери при ударе и смешении. 31. Течения жидкости с потерями энергии и без потерь. 32. Внезапное расширение поперечного сечения. 33. Распространение уравнения Д. Бернулли на течения жидкости с потерями. 34. Коэффициенты расхода для цилиндрических насадок. 35. Потеря на смешение при внезапном изменении направления струи. 36. Потеря энергии при смешении нескольких струй	58- 65
VI. Потoki ламинарные и турбулентные. 37. Влияние вязкости жидкости. 38. Ламинарные потоки. Величина вязкости. 39. Закон Poisseille'я. 40. Числовые значения кинематического коэффициента вязкости. 41. Трение смазочных веществ. 42. Число Рейнольдса. 43. Закон сопротивления при турбулентном течении. 44. Закон Кармана-Прандтля о распределении скоростей в гладких трубах	65- 81
VII. Трубопроводы. 45. Сопротивление трения в цилиндрических трубах. 46. Расчет трубопроводов. 47. Местные сопротивления в трубопроводах	81- 92
VIII. Каналы и реки. 48. Основные сведения о движении воды в открытых руслах. 49. Установившееся движение в каналах и реках. 50. Примеры. 51. Употребление номограмм. 52. Определение расхода (количества протекающей жидкости). 53. Кривая подпора для прямоугольного профиля	92—105
IX. Сопротивление жидкостей движущимся в них телам. 53. Причина сопротивления жидкостей. 55. Закон сопротивления. 56. Числовые значения для некоторых тел	105-110
X. Несущие поверхности (крылья аэроплана) и воздушные гребные винты (пропеллеры). 57. Свойства несущих поверхностей. 58. Индуктивное сопротивление. 59. Действие воздушного гребного винта (пропеллера)	110-116
XI. Общие уравнения движения идеальной жидкости. 60. Эйлеровы уравнения движения. 61. Уравнение неразрывности. 62. Вихри и циркуляция. 63. Уравнение давления для безвихревых потоков	116-119
XII. Плоские и симметричные относительно продольной оси потоки. 64. Потенциал скоростей и функция тока плоских безвихревых потоков. 65. Конформные отображения. 66. Потoki, симметричные относительно продольной оси	119—127
Часть третья. Динамика газов.	
I. Основные законы для газов и изменения их состояния. 67. Законы для газов. 68. Изменения состояния	127-132
II. Истечение из отверстий и трение в трубах. 69. Уравнение движения элементарной газовой струйки. 70. Истечение газов под внутренним давлением. 71. Движение газов в трубах	132-135

- Ляхтин, Н. К.,** проф., и **Кашкаров, Н. А.,** проф. Железобетон. Пособие в 3-х частях, для студентов, инженеров и техников по проектированию и выполнению железобетонных сооружений. Ч. I. Общие сведения о железобетоне. Составные части железобетона. Механические свойства железобетона. Нормы и технические условия для железобетонных сооружений. Производство работ. М. 1927 г. Изд. 2-е. 160 стр. 135 рис. Ц. 2 р. 50 к.
- Их же.** Железобетон. Часть II. Расчет элементов железобетонных конструкций. Осевое сжатие и растяжение. Изгиб. Внецентренное сжатие и растяжение. Скручивание. М. 1926 г. Изд. 2-е, дополнен. 120 стр. 84 рис. Ц. 2 р. 30 к. Госуд. Учен. Советом допущено в качестве пособия для ВТУЗ'ов.
- Их же.** Железобетон. Ч. III. Основания расчета железобетонных сооружений. Расчет железобетонных плит с перекрестною арматурою. Безбалочные покрытия. Неразрезные балки. Рамные конструкции. Своды цилиндрические и купольные. Общие указания для определения действия внешних сил на плиты и балки. Резервуары, водонапорные башни и силоса. Дымовые трубы. Железобетонное судостроение. Примеры расчета. М. 1926 г. Изд. 2-е, дополн. 132 стр. 99 рис. Ц. 2 р. Госуд. Учен. Советом допущено в качестве пособия для ВТУЗ'ов.
- Левенсон, Л. Б.,** проф. Общая теория машин. Статика и динамика машин. М. 1923 г. 192 стр. 140 рис. Ц. 2 р.
- Его же.** Кинематика механизмов. М. 1923 г. 200 стр. 262 рис. Ц. 2 р.
- Ломоносов, Ю. В.,** проф. Тяговые расчеты. Б. 1922 г. 298 стр. 121 рис. Ц. 3 р. 75 к.
- Луговской, Б. И.,** инж.-электр. Электрификация фабрично-заводских предприятий и железнодорожных мастерских. Силовые установки и освещение. Руководство для инженеров и техников. М. 1926 г. 144 стр. 101 рис. Ц. 2 р. 40 к.
- Маковецкий, А. Е.,** проф., и **Ройтман Г. Л.,** инж. Сушка воздухом, дымовыми газами и паром. Пособие для расчета и конструирования сушильных устройств для инженеров, студентов и техников, М. 1925 г. 148 стр. 89 рис. и 1 X диагр. Ц. 1 р. 75 к.
- Марек, Е.,** инж. Обмотки электрических машин постоянного и переменного тока. Перев. с франц. Т. Л. Гинзбурга. Под редакц. проф. В. А. Александрова. М. 1927 г. 100 стр. 244 рис. Ц. 1 р. 50 к.
- Морголюсов-Турковский, А. М.,** горн. инж. Справочник по топливу, осветительным продуктам и смазочным материалам. М. 1926 г. 260 стр. Ц. 2 р. 35 к.
- Михеев, П. В.,** инж.-строит., Расчетный прибор гидравлических сечений „Гидроканалметр“. Необходим гидро- и санитарно-технику. М. 1925 г. Ц. 2 р. 50 к.
- Мостовский, Ан.** инж. Пособие для практических занятий по динамике. Краткое изложение теории и применение ее к решению задач технического характера. М. 1926 г. 52 стр. 37 рис. Ц. 70 к.
- Павлов, Н. Н.,** инж. Производство технических вычислений. Практические способы, средства и приборы. Пособие для инженеров, техников, архитект., землемеров, строителей и студентов. М. 1927 г. Изд. 2-е, дополн. 132 стр. 68 рис. Ц. 1 р. 70 к.
- Пёшль, Т.,** проф. Курс гидравлики. Для инженеров и высших технических учебных заведений. Перевод с нем. под ред. проф. В. Э. Классен. М. 1927 г. 132 стр. 148 рис. Ц. 2 р. 65 к.
- Подольский, И. С.,** проф. Строительная механика. Часть I (в одной книге). Сопротивление материалов. М. 1924 г. 1035 стр. 672 рис. Ц. 9 р.
- Его же.** То же. Часть I. Вып. 1-й. Моменты инерции. Растяжение и сжатие. Сдвиг и кручение. М. 1924 г. 304 стр. 237 рис. Д. 2 р. 75 к.
- Его же.** То же. Часть I. Вып. 2-й. Поперечный изгиб. Расчет балок. М. 1924 г. 458 стр. 298 рис. Ц. 3 р. 75 к.
- Его же.** То же. Часть I. Вып. 3-й. Продольный изгиб. Кривые брусья. Работа упругих сил. М. 1924 г. 307 стр. 137 рис. Ц. 2 р. 75 к.
- Сидоров, А. И.,** проф. Описательный курс машин. (Элементы машиноведения). М. 1925 г. Изд. 5-е. 158 стр. 123 рис. Ц. 1 р. 75 к.
- Его же.** Очерки из истории техники. М. 1925 г. 64 стр. 67 рис. Ц. 50 к.
- Соколов, П. П.,** проф. Номография. Теория и практика построения график для быстрых технических расчетов. Пособие для инженеров, техников и студентов. М. 1925 г. 88 стр. 115 рис. и атлас. Ц. 1 р. 70 к.
- Станкевич, И. В.,** проф. Теоретическая механика. Ч. I. Статика и кинематика. М. 1924 г. 100 стр. 136 рис. Ц. 1 р. 20 к.
- Его же.** Теоретическая механика. Часть II. Динамика точки, статика и динамика системы. М. 1924 г. 96 стр. 76 рис. Ц. 1 р. 10 к.
- Стилл, А.,** проф. Линии передачи электрической энергии. Теория и расчет. Руководство для инженеров, техников и студентов ВТУЗ'ов. Перев. под ред. проф. А. А. Горева. М. 1925 г. 220 стр. 126 рис. Ц. 3 р.
- Стрелецкий, Н. С.,** проф. Разводные мосты. Основы проектировки и расчета. М. 1924 г. 312 стр. 201 рис. и атлас с черт. на 14 листах. Ц. 5 р. 50 к.
- Сушков, В. В.,** проф. Техническая термодинамика. Теория тепловых двигателей. Руководство для ВТУЗ'ов. М. 1926 г. 210 стр. 160 рис. Ц. 3 р. 10 к.
- Трюмен, Г. Ф.,** проф. Электрификация железных дорог. Пособие при расчете и проектировании для инженеров, техников и студентов. Пер. с англ. инж. В. Д. Петрова. Под ред. проф. А. Н. Бернацкого. М. 1927 г. 108 стр. 98 рис. Ц. 1 р. 60 к.
- Фалеев, Н. Г.,** проф. Краткое руководство для проектирования жилых и нежилых строений в метрических мерах. Пособие для начинающих проектировать гражданские строения. М. 1925 г. Изд. 2-е. 29 стр. Ц. 30 к.
- Флоров, С. Ф.,** инж. Тепловые расчеты топок и печей. Сборник упражнений (с подробн. решениями). Пособие для учащихся в высших и средних техническ. школах. С предисловием проф. А. И. Сидорова. М. 1926 г. 80 стр. 13 рис. Ц. 1 р.

- Фонтен, Ф.**, инж. Расчет распределительных сетей и линии передачи электрической энергии. Перевод с франц. инж. М. Я. Бриллианта. Под ред. проф. Б. И. Угримова. М. 1927 г. 60 стр. 47 рис. Ц. 90 к.
- Форд, Генри.** Сегодня и завтра. Продолжение книги того же автора „Моя жизнь и мои достижения“. Перев. с англ. под редакц. проф. П. К. Худякова. М. 1927 г. Изд. 2-е. 148 стр. Ц. 1 р. 10 к.
- Худяков, П. К.**, проф. Геометрический метод исследования упругой линии согнутой балки. Б. 1922 г. 130 стр. 70 рис. Ц. 1 р. 10 к.
- Его же.** Задачник по сопротивлению материалов. Из практики русского строительства. М. 1925 г. 212 стр. 145 рис. Ц. 3 р.
- Его же.** Как рассчитывают иа крепость части машин и сооружений (курс по сопротивлению материалов без высшей математики). М. 1922 г, 633 стр. 255 рис. Ц. 6 р.
- Его же.** Роль и значение инжен. техники в жизни культурных народов. М. 1925 г. 56 стр. Ц. 50 к.
- Хютте**—производственный. Справочник по технике производства, организации производственных предприятий и вопросам труда для инженеров и техников-производственников и красных директоров. Перераб. пер. с нем. под общей ред. Моск. Механич. Института им. М. В. Ломоносова. Том. I. Материалы и их испытание. Учение о механизмах. Унификация промышленности. Под ред. проф. В. А. Александрова, проф. В. И. Грибова, проф. П. П. Бобарыкова, проф. А. В. Панкина и проф. А. И. Яшнова. М. 1927 г. 350 стр. 262 рис. Ц. 4 р. в перепл. (Томы II и III печатаются).
- Чернецов, Н. Н.**, арх. Перспектива. Практическое руководство линейной перспективы. Для архитекторов, инженеров, техников, чертежников и студентов ВТУЗ'ов. М. 1927 г. 60 стр. 95 рис. Ц. 1 р.
- Четвериков, С. С.**, инж. Научная организация производства в практике оборудования завода в современных условиях. М. 1925 г. 52 стр. 44 рис. Ц. 50 к.
- Чез, Стюарт.** Трагедия расточительства. Перев. с англ. М. 1926 г. 144 стр. Ц. 1 р. 50 к.
- Шенфер, К. И.**, проф. Коллекторные двигатели переменного тока. М. 1922 г. 187 стр. 190 рис. Ц. 1 р. 50 к.
- Шулейкин, В. В.**, проф. Электричество и магнетизм. М. 1926 г. 204 стр. 150 рис. Ц. 3 р. 20 к. Научно-Технич. Секцией ГУС'а допущено в качестве пособия для ВТУЗ'ов.
- Щекин, П. А.**, инж. Практическое иллюстрированное урочное положение. Пособие - справочник при составлении и проверке смет и исполнении работ по постройке каменных, деревянных и смешанных зданий и ремонту их. М. 1925 г. 408 стр. 445 рис. Ц. 7 р. 50 к. в папке.

- М. М. К.** Урочное Пособие для строительных работ в метрических и русских мерах (официзация) (ф. переплет) М. 1927 г. 1927 г. 6-е изд. 134 стр. Д. 6 р. 4 стр. Ц. 6 р.
- М. ЖМ.** Таблицы для перевода русских метрических и обратных М. 1927 г. обратно. М. 1927 г. Изд. 7-е. 64 стр. Ш. 30 к.
- Таблицы для взаимного перевода русских метрических и обратных М. 1925 г. мер.** М. 1925 г. 64 стр. Д. 40 к.
- О'Рурк,** инж. Таблицы умножения (карманный справочник). Незаменимое пособие в отношении быстроты вычислений при технич., коммерческих и важных расчетах. М. 1926 г. Изд. 8-е. 54 стр. Ц. 2 р. 50 к. в папке.

ТЕХНИЧЕСКАЯ КНИГА

(около 10000 экземпляров)

доставляется **ПОНТОНОВОЙ ЭКСПИДИЦИЕЙ** Государственной технической инспекции издательского дела.

При заказе **связаться** с **Управлением** издательского дела.

Заказы **принимать** по **адресу** **Управления** **издательского дела**, — **в** **авиационных** **адресах**, **в** **3-й** **июня** **проезде**.

Обращаться по **адресу** **Управления** **издательского дела**, **в** **Волынской** **ул.** **д. 70-69-69**.

Каталоги **авиационных** **адресов** **опубликованы** **двух** **хорошо** **микро** **тиражом**.

„ГОСТЕИ ОЗДЖИЗДАТ“

ПРАВЛЕНИЕ: Москва, Центр.	Ильинка, Юшков пер., д. 6.	Тел. 2256334, 4-32-90.
Торговый Отдел: „ „ „ „	„ „ „ „	5-72-12.
Бухгалтерия: „ „ „ „	„ „ „ „	3-13-81.
Склад: „ „ „ „	Покровский, д. 28.	4-91-28.

КНИЖНИ ЕММ К Л А Н Н Ы :

Москва.	Ленинград.	Киев.
Тверская 25, тел. 5-58-47.	Пр. Водопроводный, 599 (угол	Ул. Вирховского, 35, тел. 37-08.
Тверская, за, тел. 5-5-4.	пр. Водопроводный, д. 598-83.	
Петровка, 10, тел. 1-95-34.	Проспект Обороны, 24, 24	Н.-Новгород.
Разгуляй, 38 2, тел. 1-95-51.	тел. 1-60-37.	Ул. Свердлова, 19, тел. 22-14.
Мясницкая, 1-6, тел. 4-39-09.	Харьков.	Свердловск.
Арбат, 6, тел. 544-4609.	Улица 1-го Мая, 8, тел. 1-01.	Ул. Шв. Малышова, 58-а.