

Проф. Г. И. СУХОМЕЛ

**НЕРАВНОМЕРНОЕ
ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ
В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ
И ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ
СООРУЖЕНИЯХ**



ГОСЭНЕРГОИЗДАТ 1940

Проф. Г. И. СУХОМЕЛ

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ
И ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ
СООРУЖЕНИЯХ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА 1940 ЛЕНИНГРАД

Индекс ЭГ-15-5-3

Пр. ТКС № 13 от 25/VI 1940 г.

Редактор инж. *В. К. Рерих*
Технич. редактор *И. В. Александровская*

Сдано в производство 26/V 1940 г.

Тираж 2000 экз.

Формат бумаги 60 X 92¹/₁₆.

Количество знаков в 1 печ. листе 47400

Л-7208

Подписано к печати 27/VIII 1940 г.

Изд. № 42. Печ. листов 9

Учет. авт. листов 10,34

Учетный № 7680.

Заказ № 1779. Цена 5 р. 25 к.

13-я типография ОГИЗ'а треста "Полиграфкнига", Москва, Денисовский пер., 30.

ПРЕДИСЛОВИЕ

По вопросам неравномерного движения жидкости в открытых руслах и гидротехнических сооружениях накопилось очень много результатов исследований, дающих на наш взгляд возможность построить более или менее стройную теорию этого движения, которая исходила бы из немногих основных положений и охватывала бы возможно больший круг явлений. Здесь мы и пытаемся несколько расширить содержание теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах и гидротехнических сооружениях за те пределы, в каких она обычно излагается даже в весьма подробных курсах гидравлики, где под этим названием обычно понимают исследование отдельных кривых подпора и спада, изложение способов их построения и теорию гидравлического прыжка с некоторыми ее приложениями.

При составлении настоящей книги мы использовали работы Б. А. Бахметева, Т. Ребока, акад. Н. Н. Павловского, П. Бёсса, А. Коха, М. Бусинека, Р. Мизеса и др. Кроме того, автор использовал и некоторые свои работы, опубликованные на украинском языке, значительно их дополнив.

Главное внимание в этой работе обращено на выяснение физической стороны исследуемых явлений неравномерного движения жидкости в открытых руслах.

В целях наглядности изложения везде, где это представляется возможным, используются графические методы, которые, впрочем, без всяких затруднений можно заменить аналитическими.

Автор

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

h — глубина водотока.

B — ширина живого сечения на свободной поверхности.

ω — живое сечение.

χ — смоченный периметр.

R — гидравлический радиус.

C — коэффициент Шези.

v — средняя скорость по сечению.

K — модуль расхода.

Λ — функция глубины, равная ω^3/B .

Указанные только что буквы обозначают переменные величины. Они же, снабженные индексом n , обозначают соответственно глубину, ширину сечения на свободной поверхности и пр. при равномерном движении жидкости, а снабженные индексом k — соответствующие величины при критической глубине.

Q — расход жидкости.

q — расход жидкости на единицу ширины потока прямоугольного сечения.

i — уклон дна.

i_k — критический уклон.

α — корректив на неравномерное распределение скоростей по сечению при вычислении кинетической энергии,

α_0 — корректив на неравномерное распределение скоростей по сечению при вычислении количества движения.

a_I, b_I, c_I — кривые подпора и спада в водотоках с уклоном дна, меньшим критического (черт. 17а).

a_{II}, b_{II}, c_{II} — кривые подпора и спада в водотоках с уклоном дна, большим критического (черт. 17б).

ГЛАВА I

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ И ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЯХ

§ 1. Причины установления неравномерного движения жидкости в открытых руслах

Неравномерное движение жидкости в открытых руслах, естественных и искусственных, а также в разнообразных гидротехнических сооружениях встречается гораздо чаще, чем равномерное движение.

Неравномерное движение будем иметь на участках с непризматическим руслом, а также, при определенных условиях, на участках с призматическим руслом, но расположенных по соседству с всевозможными отклонениями от призматической формы русла. Наиболее часто встречающиеся отклонения от призматичности русла—это стеснения его с боков, снизу, одновременно и с боков и снизу, разнообразные расширения русла, изменения уклона русла вдоль течения и др. Неравномерное движение образуется и при стеснении потока на части его ширины сверху, например, опорами наплавных мостов и т. п.

До некоторой степени аналогично стеснениям и расширениям русла действуют увеличения и уменьшения шероховатости вдоль водотока.

Неравномерное движение жидкости имеет место и при изменении расхода вдоль потока, а также в тех, редких на практике, случаях, когда жидкости подводится или, наоборот, у нее отбирается каким-либо способом некоторое количество энергии.

Само собой разумеется, что те или иные из указанных причин установления неравномерного движения жидкости в открытых потоках на отдельных участках могут иметь место и одновременно, тогда как на других участках эти причины могут действовать поодиночке.

Отклонения от призматичности русла, изменения шероховатости вдоль потока и другие обстоятельства, являющиеся причинами установления неравномерного движения, могут быть естественного происхождения, а могут вызываться и искусственными гидротехническими сооружениями. Отклонения от при-

зматичности русла могут быть плавными, но очень часто встречаются и резкие, неплавные, отклонения от призматичности. Сначала и более подробно рассмотрим плавные отклонения от призматической формы русла.

§ 2. Задачи теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах

Главнейшей задачей теории неравномерного движения жидкости в открытых потоках, а также и при протекании в гидротехнических сооружениях является построение кривых свободной поверхности жидкости. Ясно поэтому, что из сооружений здесь могут быть рассмотрены только такие, в которых жидкость протекает, имея свободную поверхность на всем пути или хотя бы на его части.

Задача построения кривых свободных поверхностей в открытых руслах распадается в свою очередь на следующие две задачи.

Во-первых, необходимо изучить свойства кривых свободной поверхности воды при неравномерном движении ее в открытых руслах и дать способы построения этих кривых; последнее выражение мы понимаем тут в узком смысле слова—в смысле техники построения этих кривых. Нужно отметить, что способы построения кривых свободной поверхности, по крайней мере для так называемого медленно изменяющегося движения, в настоящее время настолько разработаны, что построение кривых подпора и спада не представляет затруднений.

Однако сейчас накопилось такое большое количество разнообразных материалов, относящихся к технике построения кривых подпора и спада, что возникает потребность в некоторой систематизации и обобщении этих материалов. Попытка в этом направлении будет сделана в дальнейшем.

Наметим теперь вторую задачу теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах. Для того чтобы начать построение кривой свободной поверхности в том или ином конкретном случае, необходимо наперед определить глубину в некотором исходном сечении, от которого затем и можно строить нужную кривую свободной поверхности. В простейших случаях вопрос, о глубине в исходном сечении решается очень легко.

Например, при движении воды через водосливную плотину, перегораживающую русло, легко определить глубину перед самой плотиной; легко также определяется глубина на перепаде в канале и в других случаях.

Но в более сложных случаях возникновения неравномерного движения жидкости определение глубины в исходном сечении, даже определение самого исходного сечения, является часто трудной задачей. Кроме того, желательно наперед знать, в какой именно зоне расположится кривая подпора или спада, какого вида эта кривая должна получиться. Таким образом

вторая задача теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах—это исследование и выяснение вопроса о нахождении исходного сечения и глубины в нем, а также выяснение вопроса о том, в какой именно зоне расположится кривая поверхности жидкости и какого вида кривая получится.

В настоящей работе именно последней задаче будет посвящено больше внимания, так как решение ее на практике представляет часто немало затруднений. Эти затруднения вызываются тем обстоятельством, что до сих пор не имеется еще всесторонней теории неравномерного движения в открытых руслах, которая в числе других вопросов разрешала бы полностью и только что указанный вопрос об исходных сечениях и глубинах в них при построении кривых подпора и спада. Таким состоянием теории неравномерного движения в открытых руслах объясняется значительное количество ошибок, встречающихся и в практике проектирования и в литературе при решении вопросов этого движения. Некоторые из этих ошибок ниже будут указаны и по возможности выяснены.

Сравнительно очень мало исследованы случаи движения жидкости, неудовлетворяющие условиям медленно изменяющегося движения. Такие случаи имеем прежде всего при резких отклонениях от призматической формы русла (резкие расширения и стеснения русла, резкое изменение уклона или направления русла, а также и при некоторых других, указанных выше в § 1, изменениях условий движения жидкости). Следует здесь же отметить, что даже на призматических участках русла могут иметь место нарушения условий медленно изменяющегося движения, например, в гидравлическом прыжке. Существуют и такие случаи, когда кривизна струек настолько значительна, что ею нельзя пренебречь, хотя русло опять-таки на рассматриваемом участке может иметь призматическую форму.

Конечно, теория неравномерного движения в открытых водотоках, понимаемая в более широком смысле слова, должна исследовать и указанные вопросы. Однако, как будет видно из дальнейшего, сейчас можно построить только теорию медленно изменяющегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах; но эту теорию можно дать в достаточно полном и общем виде. Что же касается случаев неравномерного движения, не удовлетворяющих условиям медленной изменяемости, то тут пока нельзя говорить о полноте и общности теории.

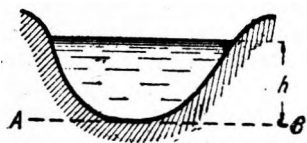
При выработке общей теории медленно изменяющегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах нужно, конечно, пользоваться соответствующим дифференциальным уравнением в том или ином его виде. Но, кроме того, тут должно получить весьма широкое применение также понятие удельной энергии сечения, введенное в гидравлику проф. Б. А. Бахметевым в 1912 г. (в работе „О неравномерном движении жидкости в открытом русле“). Однако Б. А. Бахметев ограничился главным образом исследо-

ванием удельной энергии сечения как функции глубины в одном и том же сечении; между тем. разрешение наиболее важных и трудных вопросов неравномерного движения жидкости в открытом русле получается при исследовании удельной энергии сечения вдоль потока.

При исследовании явлений неравномерных движений, не удовлетворяющих условиям медленной изменяемости, особенно широкое применение должен находить закон колебаний движения, а также достижения гидростатической механики; без применения этих последних рассматриваемые чрезвычайно сложные явления вряд ли могут исследоваться с надеждой на значительный успех.

§ 3. Удельная энергия сечения

Удельной энергией сечения называют, как известно, величину \mathcal{E} , равную сумме глубины потока h (черт. 1) в рассматриваемом сечении и высоты скорости в этом же сечении $\alpha v^2/2g$.



Черт. 1

Здесь α — корректив на неравномерное распределение скорости по сечению, а v — средняя скорость в рассматриваемом сечении.

Таким образом

$$\mathcal{E} = h + \alpha \frac{v^2}{2g}. \quad (1)$$

Выразив v через расход Q и площадь живого сечения ω , получим

$$\mathcal{E} = h + \alpha \frac{Q^2}{2g\omega^2}. \quad (2)$$

По существу \mathcal{E} есть удельная энергия потока относительно горизонтальной плоскости, проведенной через наинизшую точку дна рассматриваемого сечения (плоскость AB на черт. 1), а не относительно произвольной горизонтальной плоскости, как это делается, когда пишут уравнение Д. Бернулли в обычном его виде.

Легче всего исследовать соотношение (2) для прямоугольного живого сечения потока; в этом случае $\omega = Bh$, где B — ширина сечения; подставив Bh вместо ω в уравнение (2) и обозначив расход на единицу ширины Q/B буквой q , получим

$$\mathcal{E} = h + \alpha \frac{q^2}{2gh^2}. \quad (3)$$

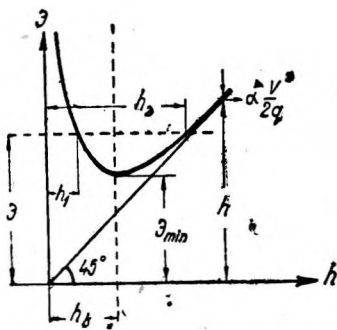
Б. А. Бахметев в указанной выше работе исследовал \mathcal{E} как функцию глубины h , принимая Q , или соответственно q , постоянным. Оказывается, что кривая, изображающая \mathcal{E} в функ-

ции глубины h , асимптотически приближается (черт. 2) к оси \mathcal{E} и к биссектрисе координатного угла; функция \mathcal{E} имеет минимум \mathcal{E}_{min} при некоторой глубине h_k , называемой критической.

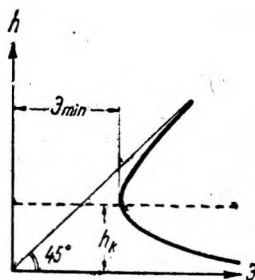
\mathcal{E}_{min} можно было бы назвать критической удельной энергией сечения. Для прямоугольного сечения имеем $\mathcal{E}_{min} = \frac{3}{2} h_k$. Высота скорости v_k при критической глубине для прямоугольного сечения равна половине этой глубины¹:

$$\alpha \frac{v_k^2}{2g} = \frac{h_k}{2}. \quad (4)$$

Особенно существенно отметить, что некоторой глубине соответствует вполне определенное, единственное значение \mathcal{E} .



Черт. 2



Черт. 3

Наоборот, некоторому значению \mathcal{E} соответствуют два положительных² корня, а следовательно, и две глубины:

$$h_1 < h_k \text{ и } h_2 > h_k.$$

Вопрос о том, которая из этих двух математически возможных (положительных) глубин установится в каждом конкретном случае в действительности, будет рассмотрен дальше. Удельной энергии сечения \mathcal{E}_{min} соответствует только одна глубина h_k , а движения жидкости в открытом водотоке с \mathcal{E} , меньшим, чем \mathcal{E}_{min} , вообще не бывает, так как при таком \mathcal{E} не может установиться какая бы то ни было глубина.

В своей позднейшей работе Б. А. Бахметев³ пользуется графиком функции \mathcal{E} в другом, более удобном, виде (черт. 3);

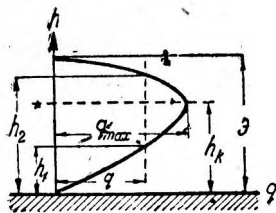
¹ Подробности см. в цитированной работе Б. А. Бахметева или каком-либо курсе гидравлики; особенно подробно этот вопрос рассмотрен в работе P. B ö s s , Berechnung der Wasserspiegellage, Forschungsarbeiten, N. 284, 1927.

² Кроме двух положительных корней, уравнения (2) или (3) имеют еще и один отрицательный корень (см. цитированную работу P. B ö s s 'a); однако этот корень можно не рассматривать, как не имеющий физического смысла.

³ B. A. B a c h m e t e f f , Hydraulics of Open Channels, New-York and London, 1932. Имеется русский перевод: Б. А. Бахметев, Гидравлика открытых русел, 1934. См. также статью Э. Брауна в журнале "Der Bauingenieur" 1927, N. 25.

на нем глубины A занимают естественное вертикальное положение.

График, представленный на черт. 3, будем для краткости называть графиком $\mathcal{E}q$. Этот график особенно удобен для исследования течения в прямоугольных руслах постоянной ширины и с постоянным q . В случае сечения произвольной формы график $\mathcal{E}h$ нужно строить по формуле (2), рассматривая ω как функцию глубины k . Вид графика для обычных сечений открытых водотоков, расширяющихся кверху, напоминает график $\mathcal{E}h$ для прямоугольного сечения. Но во избежание ошибок нужно подчеркнуть, что для русел непрямоугольных сечений связи между h_k и \mathcal{E}_{\min} будут иными, чем для прямоугольных.

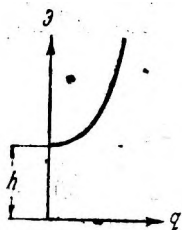


Черт. 4

Для тех случаев прямоугольных русел, когда ширина водотока изменяется вдоль по течению, весьма удобным может оказаться график уравнения (2), предложенный А. Кохом¹; этот график (черт. 4) дает зависимость q от h при постоянном \mathcal{E} ; его можно кратко называть графиком qh .

Из этого графика видно, что одному и тому же расходу q и, конечно, одной и той же удельной энергии сечения \mathcal{E} соответствуют две глубины: одна больше критической глубины h_k , а другая меньше.

Только максимальному возможному расходу q_{\max} соответствует (при определенном значении \mathcal{E}) одна глубина, именно критическая. График А. Коха дает возможность легко сделать следующий вывод, которым будем пользоваться в дальнейшем. Если стеснять бурный ($h < h_k$) водоток с боков, то глубина h возрастает быстрее, чем расход q , увеличивающийся обратно пропорционально ширине B ; поэтому скорость на таких суженных участках бурного водотока уменьшается по сравнению с несуженными. Обратный вывод можно сделать для спокойных течений ($h > h_k$). Оба эти вывода сделаны для случая, когда удельная энергия сечения на участках с разными ширинами одна и та же. График А. Коха вряд ли допускает обобщение на произвольные сечения, по крайней мере обобщение более или менее удобное; это обстоятельство представляет крупный его недостаток по сравнению с графиком $\mathcal{E}h$.



Черт. 5

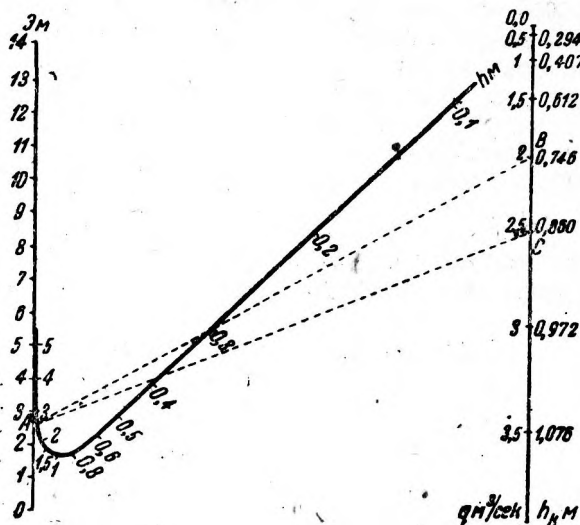
В некоторых случаях может быть удобным пользование графиком уравнения (2), дающим зависимость q от \mathcal{E} при постоянном A . Такой график $q\mathcal{E}$ представлен на черт. 5; это будет, очевидно, одна ветвь параболы.

¹ А. Кох-М. Карстаньен, Основы практической гидродинамики, 1933. Это перевод части книги А. Koch-M. Carstanjen, Über die Bewegung des Wassers, Berlin, 1926.

Однако наиболее удобной является, пожалуй, номограмма уравнения (2), которая дает взаимную зависимость \mathcal{E} , q и h , причем все они являются переменными. Такая номограмма дана на черт. 6. Она заменяет все три графика и притом для всевозможных сочетаний \mathcal{E} , q и h .

Было бы полезно построить аналогичные диаграммы и для других форм сечений водотоков, кроме прямоугольного, и прежде всего для русел трапециoidalного сечения.

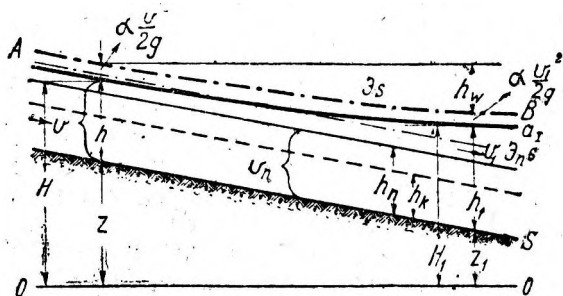
Наравне с зависимостями между \mathcal{E} , q и h (или в более общем случае между \mathcal{E} , Q и h) большое значение имеет еще, как уже указывалось, график, представляющий изменение удельной энергии сечения вдоль водотока (черт. 7). Для построения его нужно в некотором количестве сечений вдоль



Черт. 6

потока к глубине h каждого сечения добавлять величину

соответствующую средней скорости v в этом же сечении; а,



Черт. 7

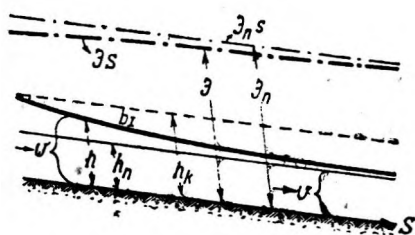
линией дна, откладываям от некоторого начала координат расстояния s , определяющие положения различных сечений. Название "градиент энергии" для линии AB объясняется тем, что она дает потерю энергии h_w на любом участке водотока. Это станет ясным, если определим для каких-либо двух сечений

(черт. 7) удельные энергии $E = H + \alpha \frac{v^2}{2g}$ и $E_1 = H_1 + \alpha \frac{v_1^2}{2g}$, от

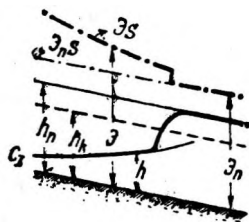
несенные к одной и той же произвольной горизонтальной плоскости OO . Тогда замечаем, что $h_w = E - E_1$.

Однако, в то время как удельная энергия E водотока, относимая к одной и той же горизонтальной плоскости, вдоль всего потока, все время уменьшается вниз по течению, удельная энергия сечения \mathcal{E} вдоль водотока может в зависимости от обстоятельств и уменьшаться и увеличиваться (\mathcal{E} на черт. 7 как раз увеличивается). В некоторых сечениях или даже на целых участках удельная энергия сечения \mathcal{E} может достигать значения \mathcal{E}_{\min} .

Большим преимуществом удельной энергии сечения $\mathcal{E} = h + \alpha \frac{v^2}{2g}$ по сравнению с обычной удельной энергией является при решении очень большого количества вопросов гидравлики открытых водотоков то обстоятельство, что в \mathcal{E} не входит



Черт. 8



Черт. 9

произвольная высота z , величина которой зависит от выбора нулевой плоскости. Заметим, что линия $\mathcal{E}s$ (градиент энергии) при равномерном движении жидкости в открытом русле идет параллельно дну. В том случае, когда неравномерное движение происходит с глубиной h большей, чем глубина равномерного движения h_n (черт. 7 и 8), скорость v при этом неравномерном движении будет меньше скорости v_n равномерного движения; но при меньшей скорости получим и меньшие потери энергии, уменьшится падение (h_w) линии $\mathcal{E}s$ по сравнению с падением аналогичной линии $\mathcal{E}_n s$ при равномерном движении; иными словами, линия $\mathcal{E}h$ при глубинах больших, чем нормальная, идет положе, чем $\mathcal{E}_n s$, т. е. удельная энергия сечения \mathcal{E} по течению увеличивается. Наоборот, в случае движения жидкости с глубиной h меньшей, чем нормальная глубина h_n (черт. 9), скорость неравномерного движения v будет больше скорости равномерного движения, поэтому и потери энергии на трение будут больше, чем при равномерном движении; следовательно, в этом случае линия энергии $\mathcal{E}s$ неравномерного движения пойдет круче, чем линия энергии $\mathcal{E}_n s$ равномерного движения.

Вообще вода при одном и том же расходе в определенном призматическом русле с постоянной шероховатостью движется с тем более пологим градиентом энергии, чем больше глубина потока, и наоборот.

§ 4. Дифференциальное уравнение неравномерного движения жидкости в открытом русле при плавных отклонениях последнего от призматичности

Рассмотрим неравномерное движение жидкости в открытом русле для несколько более общего случая, чем это делают обычно.

1. Форму русла будем характеризовать, задавая, во-первых, некоторую направляющую линию, идущую по дну русла по наиболее глубокому месту в направлении движения потока, и, во-вторых, поперечные сечения потока для каждой точки только что указанной линии.

2. Предполагается, что плоскости сечений нормальны к направляющей линии в соответствующих точках последней.

3. Искривления потока в плане предполагаются настолько незначительными, что ими вообще, и в частности влияниями их на свободную поверхность потока, можно пренебречь.

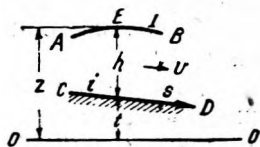
4. Продольный уклон дна предполагается малым и медленно изменяющимся вдоль потока.

Отступления от призматичности русла здесь предполагаются вообще весьма плавными; расширения русла во всяком случае должны быть настолько плавными, чтобы нигде на исследуемом участке водотока не могли иметь место срывы струй со стенок и образование местных завихрений.

Расход вдоль потока будем здесь принимать неизменным.

Предположим сначала в исследуемом нами случае неравномерного движения жидкости в открытом русле, что влиянием искривления как струек потока, так и линии дна пренебречь нельзя, кроме их искривления в плане. Чтобы учесть это влияние, припомним выражение для кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$



Черт. 10

Применим это выражение к кривой AB (черт. 10) поверхности воды, причем ординату z отсчитываем от произвольной горизонтальной линии OO' , которая является осью абсцисс; однако абсциссы будем отсчитывать по линии дна CD , что не может повести к ошибке, так как дно по условию имеет малый уклон к горизонту. Ограничиваемся случаем, когда кривизны как линии AB , так и линии CD малы; тогда для линии AB будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2z}{ds^2},$$

но $z = h + t$, поэтому

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2h}{ds^2} + \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Тут $\frac{dt}{ds}$, взятое с минусом, представляет уклон дна i (в данном случае переменный); следовательно,

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{di}{ds}.$$

Таким образом

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2h}{ds^2} - \frac{di}{ds}.$$

Если скорость поверхностной частицы обозначим буквой $c_{нов}$, то центростремительное ускорение для этой частицы будет

$$a = \frac{c_{нов}^2}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны линии AB для рассматриваемой точки E .

Примем, что скорость в поверхностной струйке $c_{нов}$ может быть получена из средней скорости v по сечению путем умножения на некоторый множитель λ , больший единицы.

Теперь выражение для искомого центростремительного ускорения можем написать в таком виде:

$$a = \lambda^2 \left(\frac{d^2h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) v^2.$$

Этому ускорению соответствует центробежная сила, величина которой может быть вычислена из того соображения, что силы, действующие на одинаковые массы, относятся как вызываемые этими силами ускорения; таким образом центробежная сила будет составлять по величине такую же часть силы веса, какую a составляет от ускорения силы тяжести g . Линия действия центробежной силы при сравнительно небольшой кривизне поверхности совпадает приблизительно с направлением глубины h .

Для того чтобы определить среднее для поперечного сечения значение высоты давления, получающегося благодаря наличию ускорения a , будем рассуждать следующим образом.

Благодаря наличию силы тяжести с ее ускорением g в какой-либо точке живого сечения на глубине x давление больше, чем на поверхности, на величину $x\gamma$. Высота этого давления равна, конечно, глубине x . Наличие ускорения a по всей глубине вызывало бы увеличение давления с высотой, составляющей a/g часть высоты давления, возникающего от действия

силы тяжести. Однако ускорение a по глубине не постоянно благодаря изменению по глубине и кривизны струек и скоростей. Поэтому высоту h' увеличения давления от ускорения a приходится оценить некоторой средней для данного сечения величиной, беря для этого не глубину A , а некоторую величину $\lambda'h$, где λ' — числовой множитель, о котором будет сказано дальше.

Таким образом

$$h' = \frac{\lambda^2 v^2}{g} \left(\frac{d^2h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) \lambda' h. \quad (5)$$

В случае такого искривления струек, как это указано на черт. 10, высота h' получится отрицательной.

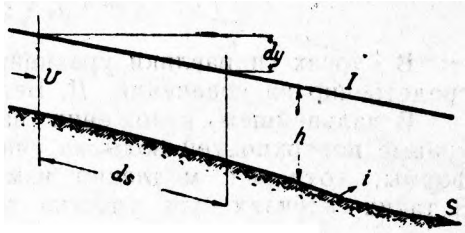
Теперь можно будет учесть влияние искривления струек при составлении дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытом русле для принятых условий. Пусть dy (черт. 11) обозначает понижение уровня жидкости на участке бесконечно малой длины ds . Высота dy (иными словами, удельная энергия воды) затрачивается частично на изменение dh_v кинетической энергии жидкости на том же участке ds ; на преодоление трения на том же участке должна быть затрачена высота dh_t и, наконец, на изменение высоты давления, возникающего благодаря кривизне струек, пойдет высота dh' . Следовательно, можем написать

$$dy = dh_v + dh_t + dh'. \quad (6)$$

Изменение удельной кинетической энергии запишется, как известно, так:

$$dh_v = \alpha d \left(\frac{v^2}{2g} \right). \quad (7)$$

Черт. 11



Потеря на трение dh_t на участке ds может быть принята равной

$$\frac{v^2}{C^2 R} ds. \quad (8)$$

Наконец, изменение высоты h' можно выписать в таком виде:

$$dh' = d \left[\frac{\lambda^2 v^2}{g} \left(\frac{d^2 h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) \lambda' h \right]. \quad (9)$$

Теперь уравнение (2) можем переписать в таком виде:

$$dy = \alpha d \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} ds + d \left[\frac{\lambda^2 v^2}{g} \left(\frac{d^2 h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) \lambda' h \right]. \quad (10)$$

Поделим здесь все члены на ds :

$$\frac{dy}{ds} = \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{d}{ds} \left[\frac{\lambda^2 v^2}{g} \left(\frac{d^2 h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) \lambda' h \right].$$

Вместо dy вставим сюда $ids - dh$:

$$i - \frac{dh}{ds} = \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{d}{ds} \left[\frac{\lambda^2 v^2}{g} \left(\frac{d^2 h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) \lambda' h \right]. \quad (11)$$

Интегрирование только что полученного дифференциального уравнения в общем случае не представляется пока возможным. В следующем параграфе остановимся вкратце на некоторых способах интегрирования этого дифференциального уравнения в тех практически весьма важных частных случаях, когда уклон дна можно считать постоянным, если даже не по всей длине водотока, то по крайней мере на каждом из его участков, и, кроме того, влиянием кривизны струек можно пренебречь.

§ 5. Об интегрировании дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых водотоках в некоторых частных случаях

а) Считая уклон i на рассматриваемом участке водотока постоянным и пренебрегая влиянием искривления струек, мы имеем возможность значительно упростить уравнения (10) и (11) и вместо них получаем

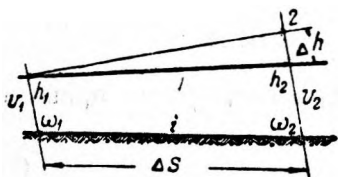
$$dy = \alpha d \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} ds; \quad (12)$$

$$i - \frac{dh}{ds} = \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R}. \quad (13)$$

В курсах гидравлики уравнение (12) обычно выводят непосредственно из уравнений Д. Бернулли.

В дальнейшем изложении нам часто будут встречаться кривые поверхностей воды на участках русел непризматической формы, хотя и с медленно изменяющимся движением воды. В таких случаях для участка малой, но конечной, длины Δs

(черт. 12) уравнение (12) можем заметить таким уравнением:



Черт. 12

$$\Delta y = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{v_m^2}{C_m^2 R_m} \Delta s. \quad (14)$$

Тут α для простоты принято равным единице. Используя уравнение (14) для построения кривых поверхностей воды на непризматических участках водотоков, в нем часто заменяют скорости через расход Q и живые сечения потока ω_1 , ω_2 и среднее для участка живое сечение ω_m .

Если произвести аналогичные замены и некоторые преобразования в уравнении (13), то получим

$$\Delta s = \frac{\Delta h + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}}{i - \frac{v_m^2}{C_m^2 R}}. \quad (15)$$

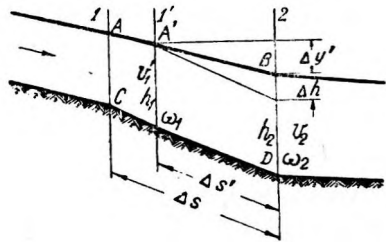
Этим уравнением тоже пользуются вместо уравнения (14) при построении кривых поверхностей воды в непризматических руслах. Но особенно уравнение (15) можно рекомендовать в том случае, когда непризматическое в общем русло можно подразделить на призматические участки с прямыми, нулевыми или обратными уклонами, в особенности, когда отдельные участки имеют сравнительно малую длину. Предположим, что нужно построить линию поверхности воды на сравнительно коротком участке Δs русла CD (черт. 13) призматической формы; имея h_2 и задаваясь величиной Δh или, что то же, глубиной h_1 , получаем по формуле (15) длину $\Delta s'$. В противоположность урав-

нению (14), которое для определенного участка Δs решается только путем постепенных приближений, длина $\Delta s'$ по уравнению (15) для выбранного h_1 (черт. 13) находится сразу, без попыток. Но, конечно, в последнем случае $\Delta s'$ только случайно может оказаться равным длине участка Δs , для которого нужно найти линию поверхности воды. Тем не менее, утомительных вычислений попытками можно избежать, если $\Delta s'$ сравнительно мало отличается от Δs . В этом случае, имея $\Delta s'$ и h_1 , следует нанести на чертеж точку A' , провести прямую линию $A'B$ и (при $\Delta s' < \Delta s$) продолжить ее до сечения AC . Линия AB и будет с достаточным приближением представлять поверхность воды на сравнительно коротком участке CD . Нет надобности пояснять, как следует поступить в том случае, когда из вычислений получилось бы $\Delta s' > \Delta s$.

Часто применяемое уравнение Хестеда

$$\Delta s = \frac{\Delta \mathcal{E}}{i - i_{fm}} \quad (16)$$

Черт. 13



представляет только несколько преобразованное уравнение (15); в самом деле, если в уравнение (15) вместо Δh вставить $h_2 - h_1$,

заменить выражение $\frac{v_m^2}{C_m^2 R_m}$ через i_{fm} и принять во внимание, что

разность $\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g}\right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right)$ представляет как раз $\Delta \mathcal{E}$, то и

получим из уравнения (15) уравнение Хестеда. Это уравнение имеет чрезвычайно простой физический смысл, который выясним на какой-либо кривой подпора в первой зоне. Относительный уклон дна i давал бы увеличение удельной энергии сечения \mathcal{E} на единицу длины водотока при отсутствии потерь энергии. Разность $i - i_{fm}$ дает увеличение \mathcal{E} на единицу длины уже с учетом потерь при движении. Если приращение удельной энергии сечения $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ на каком-то участке поделим на $i - i_{fm}$, то и получим длину Δs этого участка.

5) Теперь остановимся на наиболее простом и вместе с тем наиболее важном случае неравномерного движения жидкости в призматическом открытом русле с прямым уклоном и при том опять-таки условии, что кривизной струек можно пренебречь.

При указанных условиях в курсах гидравлики уравнению (13) при помощи ряда преобразований придают такие формы:

$$i - \frac{dh}{ds} = \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} ; \quad (17)$$

$$i - \frac{dh}{ds} = - \frac{Q^2 B}{g \omega^5} \frac{dh}{ds} + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} ; \quad (17a)$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \omega^3}}; \quad (18)$$

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \frac{Q^2}{i \omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \omega^3}}. \quad (19)$$

Величины ω , C , R и B для призматических русел являются функциями глубины h , а Q , i и g — постоянные величины. Поэтому переменные в уравнении (19) легко разделяются:

$$i ds = \frac{1 - \frac{Q^2 B}{g \omega^3}}{1 - \frac{Q^2}{i \omega^2 C^2 R}} dh. \quad (20)$$

Очевидно, можно получить интеграл уравнений (17) или (20) в каждом частном случае в конечном виде, выразив величины ω , χ , C , R и B , как явные функции глубины h .

К сожалению, даже для сравнительно простых форм живых сечений все эти функции, или по крайней мере часть их, имеют весьма сложный вид. Поэтому естественно возникает мысль выразить указанные функции через h приближенно и в возможно простом виде, например, в виде степенных одночленных выражений; в таком случае уравнение (20) можно представить в таком виде:

$$i ds = \frac{1 - ah^n}{1 - bh^m} dh,$$

где a и b — постоянные величины. Примерно так поступает Мононобе (Nagano Mononobe) в своей недавно напечатанной работе о построении кривых подпора и спада¹, в которой он, если вкратце выразить его мысль, каждую из величин ω , χ , C и R приближенно представляет в виде одночленной степенной функции от h . Затем он интегрирует в определенных пределах уравнение (17). Пользуясь именно уравнением (17), а не (20), Мононобе избегает необходимости выражать ширину в виде функции от h .

Мононобе результаты своих вычислений проверил путем интересных лабораторных опытов. При этом кривые свободной поверхности, полученные из опытов и вычисленные по способу Мононобе, оказались весьма близкими. Мононобе построил соответствующие кривые по старым способам Рюльмана, Бресса и некоторым другим, причем эти способы дали кривые, сильно отличающиеся от опытных кривых. К сожалению,

¹ Nagano Mononobe, Back-water and drop-down curves for uniform channels, Proceedings American Society of Civil Engineers, vol. 64, N 8, part 2, 1938, pp. 950 — 989, Discussion — pp. 990 — 1001.

вычисления не были сделаны по способам Б. А. Бахметева и Н. Н. Павловского¹.

Однако, несмотря на указанную только что близость кривых, вычисленных по способу Мононобе, к опытным кривым, этот способ вряд ли найдет широкое применение ввиду его сложности. Последнее обстоятельство между прочим было отмечено Б. А. Бахметевым в дискуссии² по поводу работы Мононобе, и с мнением Б. А. Бахметева следует согласиться.

Если внимательно присмотреться к другим современным наиболее точным и распространенным или недавно предложенным способам интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых призматических руслах, то можно заметить, что они, собственно говоря, представляют частные случаи следующего общего приема. Некоторая комбинация постоянных величин Q , i , g и величин ω , χ , R , C , B , являющихся, вообще говоря, сложными функциями глубины h , приближенно заменяют той или иной степенью z некоторой величины τ . При этом сама h рассматривается как функция от τ , а уже величина τ принимается непосредственно зависящей от s . Поэтому производную при указанной замене нужно представить уже в таком виде:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{dh}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \quad (21)$$

Тут, как видим, появляется производная $\frac{dh}{d\tau}$, в общем случае переменная. Кроме того, величины, не входящие в то выражение, которое заменяется через τ^z , объединяются в некоторое выражение Y , которое тоже является функцией от A . Для упрощения интегрирования, вернее даже для возможности интегрирования, приходится переменные величины, $\frac{dh}{d\tau}$, вернее $\frac{d\tau}{dh}$, и Y заменять приблизительно их средними значениями для того или иного интервала глубин.

В самом деле, в наиболее распространенном у нас аналитическом способе интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых руслах Б. А. Бахметева, которое он берет в форме

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 - j}, \quad (22)$$

в качестве заменяемого через τ^z выражения берется $\tau^2 = \left(\frac{K}{K_n}\right)^2$. В качестве τ Б. А. Бахметев, как известно, принимает относительную глубину $\eta = \frac{h}{h_n}$, а показатель степени z , который тут

¹ Такого рода вычисления и сопоставления приведены в труде проф.

И. И. Агроскина, Гидравлика каналов, Энергоиздат, 1940.

² См. Discussion к цитированной работе.

носит название гидравлического показателя русла x , вычисляют в каждом частном случае, даже для каждого интервала глубин в определенном русле. Нетрудно заметить, что способ Мононобе является весьма родственным более старому способу Б. А. Бахметева в отношении замены гидравлических элементов русла степенными выражениями с h в качестве оснований степеней.

Что касается производной $dh/d\tau$, то она в способе Б. А. Бахметева имеет вид $dh/d\eta$ и равна просто h_n т. е. постоянной величине. Выражение Y в способе Б. А. Бахметева равно $BiC^2/g\chi$ и обозначается буквой j ; замена его средним для рассматриваемого интервала глубин значением j_{cp} наряду с заменой выражения

$(K/K_n)^2$ выражением η^x и являются источниками некоторой определенной неточности вычислений по способу Б. А. Бахметева.

В обобщенном способе Батикля, разработанном проф. М. Д. Чертоусовым и доц. П. И. Кудрявцевым¹, выражение $\chi^2 = (K/K_n)^2$ заменяется через τ^z . При этом, выбрав z (по М. Д. Чертоусову z следует брать в пределах от 2 до 5), можно для всякого K^2 найти τ . Отношение $d\tau/dh$ тут для определенного интервала глубин является уже величиной переменной и его приходится для этого интервала заменять средней величиной

$$\left(\frac{d\tau}{dh}\right)_{cp} \approx \frac{\tau_2 - \tau_1}{h_2 - h_1} \quad (23)$$

Последнее выражение обычно обозначают буквой a .

Если показатель z принять равным 2, то τ получится равным χ и мы получим способ акад. Н. Н. Павловского. В этом способе

$$a = \frac{x_2 - x_1}{h_2 - h_1} \quad (24)$$

Как в обобщенном способе Батикля, так и в способе Н. Н. Павловского выражение j имеет то же значение и с ним приходится поступать совершенно так же, как и в способе Б. А. Бахметева. Таким образом в обоих последних способах уже имеются три источника неточности вычислений.

Мы до сих пор рассматривали те из более новых способов интегрирования неравномерного движения жидкости в открытых призматических руслах, в которых используется понятие модуля расхода K . Но в последнее время были сделаны предложения использовать для интегрирования уравнений (18) и (19) не K , а другие величины; так, проф. И. И. Леви предлагает считать в уравнении (18) глубину h функцией площади живого сечения ω ,

¹ П. И. Кудрявцев, О прыжке и о медленно изменяющемся движении жидкости в открытом русле, Минск, 1937.

доц. П. Н. Кудрявцев¹ использует вместо K величину $\Lambda = \frac{\omega^8}{B}$; при этом $\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\omega_k^3}{B_k} = \Lambda_k$.

Остановимся несколько подробнее на последнем способе. Введя в уравнение (19) величины Λ и Λ_k , получим

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{\frac{\Lambda}{\Lambda_k} - j'}{\frac{\Lambda}{\Lambda_k} - 1}. \quad (25)$$

Здесь

$$Y = j' = \frac{g\gamma}{\alpha i C^2 B} = \frac{1}{j}.$$

Для интегрирования уравнения (25) доц. П. Н. Кудрявцев предлагает применять приемы, аналогичные указанным выше приемам интегрирования уравнения (22), а именно, он полагает (в принятых здесь обозначениях)

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_k} = \tau^z,$$

где $\tau = \eta = \frac{h}{h_k}$, а $z = x$ для каждого частного случая вычисляется; другой прием, предлагаемый П. Н. Кудрявцевым, заключается в том, чтобы по аналогии со способом Батикля принимать z равным 5, а вычислять значения τ .

Последнее предложение доц. П. Н. Кудрявцева можно несколько расширить, принимая для показателя не только значение 5, но и другие значения в пределах, например, от 2 до 5. Конечно, и при рассмотренном интегрировании уравнения (25) возникают источники ошибок, аналогичные тем, которые имеют место и при интегрировании уравнения (22).

Из изложенного видно, что современные способы интегрирования (в конечном виде) дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых призматических руслах действительно являются разновидностями одного и того же приема, все они применяют подстановку в рассматриваемое уравнение выражения τ^2 вместо весьма сложных функций. В связи с этим необходимо решить вопрос о таком выборе величин τ и z , чтобы при возможно малой затрате времени на вычисления получать вместе с тем достаточно точные результаты; к этому вопросу мы предполагаем еще вернуться в другой работе.

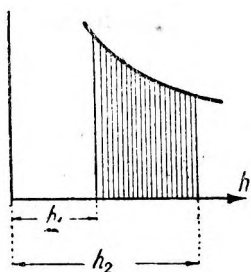
С другой стороны, учитывая то обстоятельство, что современные способы интегрирования в конечном виде дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в призматических руслах базируются на нескольких допущениях, благодаря которым все они по существу являются приближенными, и что вычисления по этим способам довольно сложны, есте-

¹ См. цитированную выше работу доц. П. Н. Кудрявцева.

ственно обратиться к приближенным числовым и особенно графическим способам интегрирования рассматриваемого уравнения.

Особую пригодность графических способов приближенного интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения в призматических руслах принципиально можно обосновать тем соображением, что зависимости величин ω , C , R , K , Λ от соответствующих глубин ввиду их сложности весьма удобно представлять графически, как это обычно и делают. А при графическом представлении основных зависимостей вполне естественно графическим же путем построить ту или иную требуемую кривую подпора или спада.

Б. А. Бахметев еще в 1912 г. в своей монографии о неравномерном движении жидкости в открытом русле предложил следующий графический способ интегрирования уравнения (22). Представим это уравнение в виде



Черт. 14

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i} \left[1 + (1-j) \frac{\left(\frac{K_n}{K}\right)^2}{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2} \right] = \frac{1}{i} \varphi(h).$$

Значение функции $\varphi(h)$ не требует пояснений.

Изобразив уравнение $\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i} \varphi(h)$ графически (черт., 14), сразу же замечаем, что заштрихованная площадь представляет в соответствующем масштабе расстояние $l_{1,2} = s_2 - s_1$ между сечениями с глубинами h_1 и h_2 . В своей позднейшей, цитированной уже, работе, вышедшей на английском языке в 1932 г., Б. А. Бахметев несколько видоизменил свой способ графического интегрирования уравнения (22), впрочем не затрагивая при этом сущности способа.

Изложенный только что графический способ интегрирования уравнения (22) не получил распространения на практике, так как по указанию самого же Б. А. Бахметева проектирующие инженеры считают его чересчур громоздким; это мнение нужно считать довольно обоснованным. В самом деле, чтобы применить этот графический способ, нужно не только вычислять для различных глубин ω , χ , R , C , но и величины K , K_n^2 , j , а также функцию $\varphi(h)$. Между тем объем работы по графическому интегрированию дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости можно значительно сократить, если взять это уравнение в форме (19):

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \frac{Q^2}{i\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}}$$

или в иных обозначениях:

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \frac{K_n^2}{K^2}}{1 - \frac{\Lambda_k}{\Lambda}}$$

где опять

$$\Lambda = \frac{\omega^3}{B} \quad \text{и} \quad \frac{Q^2}{g} = \Lambda_k.$$

Разделим в уравнении переменные

$$ds = \frac{dh}{i} \frac{K^2}{K^2 - K_n^2} \frac{\Lambda - \Lambda_k}{\Lambda}.$$

Перейдем к конечным, хотя и небольшим, величинам:

$$\Delta s = \frac{\Delta h}{i} \frac{K^2}{K^2 - K_n^2} \frac{\Lambda - \Lambda_k}{\Lambda}.$$

Построим прежде всего кривые AB и $A'B'$ (черт. 15), изображающие K^2 и Λ в функции h ; кроме того, проведем прямую CD на расстоянии K_n^2 от оси h и прямую $C'D'$ на расстоянии Λ_k от той же оси.

Строить эти линии приходится независимо от того, какой способ интегрирования будет применен, так как они нужны для определения критической и нормальной глубин h_k и h_n , хотя для последней цели эти кривые, конечно, приходится строить для меньших интервалов глубин h .

Перейдем теперь к определению длины участка Δs , на концах которого глубины соответственно равны h_1 и h_2 .

Прежде всего для интервала глубин $\Delta h = h_2 - h_1$ нужно определить среднее значение EM переменной величины K^2 и среднее значение EG величины Λ .

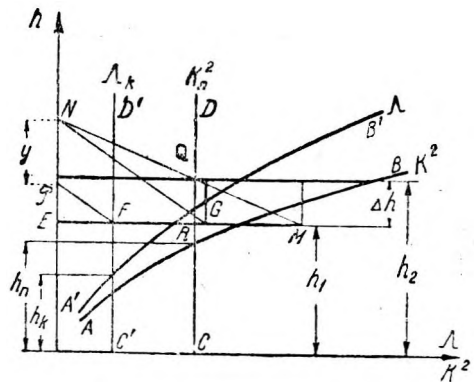
Определим теперь графически величину x выражения $x = \Delta h \frac{K^2}{K^2 - K_n^2}$. Для этого через точки M и Q проводим прямую

до пересечения ее с осью h в точке N . Из подобных треугольников имеем

$$\frac{RQ}{EN} = \frac{MR}{EM}.$$

Отсюда

$$EN = RQ \frac{EM}{MR} = \Delta h \frac{K^2}{K^2 - K_n^2} = x,$$



Черт. 15

Построим далее выражение

$$y = x \frac{\Lambda - \Lambda_k}{\Lambda}.$$

Для этого проводим прямую GN и через точку F прямую, параллельную GN . Отрезок PN и будет равняться y . В самом деле, легко видеть, что

$$\frac{EN}{PN} = \frac{EG}{FG}$$

и отсюда

$$PN = EN \frac{FG}{EG} = x \frac{\Lambda - \Lambda_k}{\Lambda} = y.$$

Если теперь отрезок y , измеренный в масштабе для Λ , разделим на i , то и получим Δs .

Вместо деления на i можно просто измерять y не в масштабе для h , а в соответственно измененном масштабе. Далее можно перейти к следующему интервалу глубин Δh и т. д.

При сравнении результатов расчетов, полученных при помощи формулы и таблиц Б. А. Бахметева и при помощи изложенного графического способа, оказалось, что те и другие результаты весьма близки.

В том случае, когда для определенного интервала глубин имеется значение (среднее) величины y , можно воспользоваться другим, несколько более простым построением (черт. 16). Кроме кривой K^2 и прямой K_n^2 начертим еще прямую

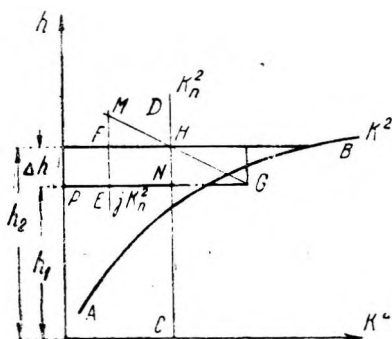
EF , изображающую для рассматриваемого Δh произведение jK_n^2 . Используем теперь уравнение (22), но вместо дифференциалов возьмем небольшие конечные величины и напишем это уравнение в таком виде:

$$\Delta s = \frac{\Delta h}{i} \frac{K^2 - jK_n^2}{K^2 - K_n^2}.$$

И сюда нужно ввести среднее для интервала глубин Δh значение K^2 , равное PG . Заметим, что $K^2 - jK_n^2$ изображается отрезком EG , а $K^2 - K_n^2$ — отрезком GN . Поэтому можно написать

$$\Delta h \frac{K^2 - jK_n^2}{K^2 - K_n^2} = \Delta h \frac{EG}{GN} = y$$

Если провести линию GH до пересечения в точке M с продолжением линии EF , то очевидно, отрезок EM как раз и будет равен y . Этот отрезок в соответствующем масштабе представляет Δs .



Черт. 16

В смысле графических построений последний прием проще, но зато он требует дополнительных вычислений.

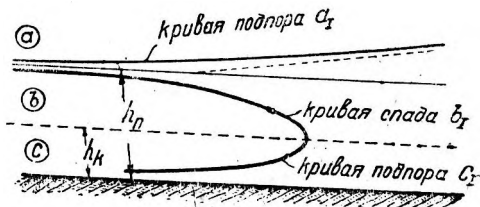
Изложенные графические способы можно, конечно, применять для различных видов кривых подпора и спада.

Отметим еще, что дифференциальное уравнение неравномерного движения жидкости в призматическом русле может быть приближенно проинтегрировано при помощи известных вычислительных методов — правила Симпсона¹ или правила трапеций². Однако рассматривать здесь эти способы не будем.

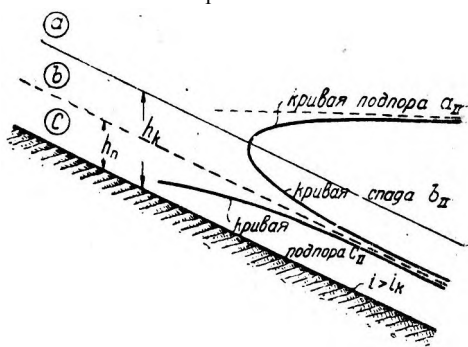
§ 6. Исследование кривых поверхностей воды при неравномерном движении жидкости в призматических открытых руслах с прямым уклоном

Хорошо известно, что общий характер кривых свободных поверхностей воды можно исследовать и без того, чтобы эти кривые были построены, пользуясь тем или иным способом интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых призматических руслах. Указанное исследование кривых свободных поверхностей обычно выполняют, анализируя непосредственно дифференциальное уравнение неравномерного движения в том или ином его виде.

Изучим вид свободных поверхностей воды для двух случаев движения в призматических руслах: случай движения, при котором необходимо учитывать силы инерции, возникающие от наличия кривизны струй в вертикальной плоскости и тот случай, когда на эти силы можно не обращать внимания. Остановимся сначала на втором более простом случае, когда кривизна струек ничтожна. Прежде чем заняться исследованием кривых поверхностей воды в каком-либо русле, нужно определить для рассматриваемого водотока нормальную и критическую глубины h_n и h_k и из их соотношения установить, будет ли водоток при равномерном движении спокойным ($h_n > h_k$) или бурным ($h_n < h_k$). В каждом из двух типов водотоков имеется три зоны *a*, *b* и *c* (черт. 17а и б).



Черт. 17а



Черт. 17б

Прежде чем заняться исследованием кривых поверхностей воды в каком-либо русле, нужно определить для рассматриваемого водотока нормальную и критическую глубины h_n и h_k и из их соотношения установить, будет ли водоток при равномерном движении спокойным ($h_n > h_k$) или бурным ($h_n < h_k$). В каждом из двух типов водотоков имеется три зоны *a*, *b* и *c* (черт. 17а и б).

¹ R. Mises, Elemente der technischen Hydrodynamik, 1914, § 12.

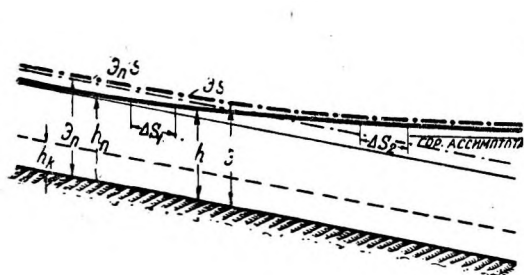
² Б. А. Бахметев, О неравномерном движении жидкости в открытом русле, 1928, стр. 71, 72.

Вид каждой из кривых подпора и спада $a_I, b_I, c_I, a_{II}, b_{II}, c_{II}$ можно исследовать, рассматривая изменение производной dh/ds в каждой зоне.

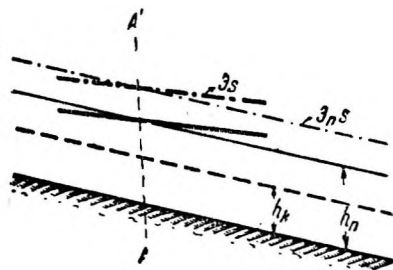
Иногда при этих исследованиях пользуются также второй производной d^2h/ds^2 , которая приблизительно равна кривизне кривых подпора и спада $1/\rho$ и которую можно найти, имея первую производную.

Так как такие математические исследования подробно излагаются в курсах гидравлики¹, то мы на них здесь не останавливаемся, а проведем исследование кривых свободных поверхностей при помощи понятия удельной энергии сечения и графиков $\mathcal{E}h$ и $\mathcal{E}s$.

Рассмотрим сперва кривую a_I подпора в первой зоне спокойного водотока (черт. 18). В этом случае переменная глубина h



Черт. 18



Черт. 19

больше нормальной глубины h_n . Градиент энергии для неравномерного движения поэтому должен идти положе, чем градиент $\mathcal{E}_n s$ для равномерного движения. Докажем прежде всего, что линия энергии $\mathcal{E}s$ и поверхность равномерного движения даже и под весьма малым углом. Для доказательства допустим, что $\mathcal{E}s$ пересекает $\mathcal{E}_n s$ в каком-либо сечении AA' (черт. 19). Тогда перед этим сечением с левой стороны удельной энергии сечения меньшей, чем \mathcal{E}_n , будет, очевидно, для спокойного течения соответствовать глубина меньшая, чем h_n . Но при глубине меньшей, чем h_n , линия энергии перед сечением AA' должна была бы идти круче, чем $\mathcal{E}_n s$, т. е. сделанное допущение приводит к противоречию. Поэтому, приходим к заключению, что градиент энергии $\mathcal{E}s$ (черт. 18) неравномерного движения может приближаться к градиенту энергии равномерного движения вверх против течения только ассимптотически. Точно так же и кривая подпора (как и другие кривые) ассимптотически приближается к поверхности равномерного движения. Вниз по течению $\mathcal{E}s$, очевидно,

¹ См., например, М. Д. Чертоусов, Специальный курс гидравлики, 1937, или А. Н. Ахутин, Специальный курс гидравлики, 1935.

удаляется от $\mathcal{E}_n s$, а кривая подпора удаляется от поверхности равномерного движения. При увеличении глубины h уменьшаются потери; при $h = \infty$ потери равны нулю и, следовательно, $\mathcal{E}s$ на бесконечности располагается горизонтально, сливаясь с кривой подпора, т. е. мы видим, что кривая подпора имеет вниз по течению горизонтальную асимптоту. Далее, принимая во внимание, что падение линии $\mathcal{E}s$, а значит, и падение кривой подпора, на элементе Δs_2 меньше, чем на расположенном выше элементе Δs_1 (длины Δs_1 , и Δs_2 , взяты одинаковыми), убеждаемся, что кривая подпора в зоне a спокойного водотока может быть только вогнутой¹.

Еще иначе можно выразиться так: падение поверхности вниз по течению на каждом последующем элементе меньше, чем

на предыдущем; это значит, что $\frac{d^2h}{ds^2} < 0$; но последнее нера-

венство и означает, что кривая вогнутая. Это станет ясным, если напомнить, что для пологих кривых кривизна — $1/\rho$ приблизительно равна $\frac{d^2h}{ds^2}$; знак минус при $1/\rho$ означает вогнутость.

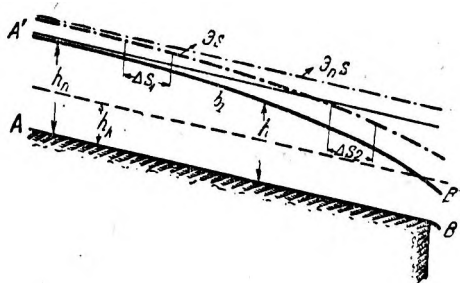
Исследуем кривую b_1 в зоне b спокойного водотока (черт. 20). В этом случае получаем кривую спада $A'B'$, причем соотношение между нормальной глубиной h_n , критической глубиной h_k и переменной глубиной h , очевидно, такое:

$$h_n > h > h_k.$$

Линия энергии неравномерного движения $\mathcal{E}s$ должна идти ниже и круче, чем $\mathcal{E}_n s$. Далее легко можно было бы доказать опять, что кривая спада не может пересечь поверхность равномерного движения, а только асимптотически к этой поверхности приближается вверх против течения. Доказательство совершенно аналогично приведенному выше доказательству для кривой подпора. Сравнивая далее падения на участках кривой Δs_1 и Δs_2 , убеждаемся, что кривая спада выпуклая.

Докажем еще, что кривая спада (как и другие кривые) должна приближаться к линии критических глубин под большими углами, круто. В самом деле, при глубинах, близких к критической, даже небольшому изменению удельной энергии сечения (см. черт. 2) соответствует значительное изменение глубин, а это и означает, что кривые поверхностей воды, приближаясь к линии критических глубин, должны идти весьма круто.

¹ Заметим, что глубины в спокойных течениях увеличиваются несколько быстрее, чем удельная энергия сечения; в этом можно легко убедиться по графику $\mathcal{E}h$.



Черт. 20

Рассмотрим далее кривую подпора c_1 (черт. 9) в зоне c спокойного водотока ($h < h_k < h_n$). Так как глубина h меньше нормальной, то линия энергии \mathcal{E}_s над кривой c_1 идет круче, чем линия дна, и поэтому удельная энергия сечения уменьшается вниз по течению, а глубина должна возрастать, как это ясно из графика $\mathcal{E}h$ (ветвь глубин, меньших критической). Особенно круто кривая c_1 должна подниматься при приближении к линии критических глубин. Из этих соображений ясно, что кривая c_1 вогнутая.

Исследуем еще кривую подпора a_{II} в бурном водотоке (черт. 32), для которой $h > h_k > h_n$. Так как глубина h больше нормальной глубины h_n , то линия \mathcal{E}_s пойдет выше линии дна, удельная энергия сечения по течению возрастает, а значит, возрастает и глубина. Рассматриваемая кривая a_{II} , начинаясь над линией критических глубин, должна вначале круто подниматься, а затем ассимптотически приближаться к горизонтали; при этих условиях кривая может быть только выпуклой.

Совершенно аналогично можно было бы проанализировать и другие формы кривых подпора и спада в бурных водотоках, а также в руслах с нулевым и обратным уклонами.

Этот анализ, отличаясь большей конкретностью, может во всяком случае, если не заменить, то дополнить обычный чисто математический анализ кривых поверхностей воды.

Теперь исследуем вид поверхностей воды в том случае, когда силами инерции, имеющими место благодаря искривлению струек в вертикальной плоскости, пренебречь нельзя. Для этой цели мы должны исследовать уравнение (11):

$$i - \frac{dh}{ds} = \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{d}{ds} \left[\frac{\lambda^2 v^2}{g} \left(\frac{d^2 h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) \lambda' h \right].$$

Исследование вида поверхностей воды при помощи этого уравнения выполним здесь только для случая постоянного и прямого уклона дна i и призматического русла. Кроме того, ограничим нашу задачу условием, что переменная глубина h мало отличается от нормальной глубины водотока h_n . При этом условии и все остальные гидравлические элементы, соответствующие глубине h , также будут мало различаться от нормальных значений. Это значит, что высшими степенями этих разниц можно пренебречь.

При указанных только что условиях дальнейшие исследования будут, очевидно, относиться только к таким участкам водотоков, на которых происходит переход от равномерного к неравномерному движению, или наоборот.

Для постоянного уклона дна i уравнение (11) получает вид

$$i - \frac{dh}{ds} = \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{d}{ds} \left(\lambda^2 \lambda' \frac{v^2 h}{g} \frac{d^2 h}{ds^2} \right). \quad (26)$$

В дальнейшем исследовании удобнее пользоваться относительными величинами, которые и введем. Переменную глубину h (черт. 21) можно выразить так:

$$h = h_n + y h_n = h_n (1 + y).$$

Площадь живого сечения, соответствующая переменной глубине h , может быть выражена так:

$$\omega = \omega_n + y h_n B_n.$$

Если тут принять $h_n B_n = \varepsilon \omega_n$, где ε есть определенная величина для всякого живого сечения потока, то можно написать:

$$\omega = \omega_n (1 + \varepsilon y).$$

Аналогично

$$\chi = \chi_n + y h_n \left(\frac{1}{\sin \varphi_1} + \frac{1}{\sin \varphi_2} \right).$$

Тут φ_1 и φ_2 — углы наклона стенок водотока.

Обозначив выражение

$$\frac{h_n}{\chi_n} \left(\frac{1}{\sin \varphi_1} + \frac{1}{\sin \varphi_2} \right)$$

одной буквой Φ , можем написать

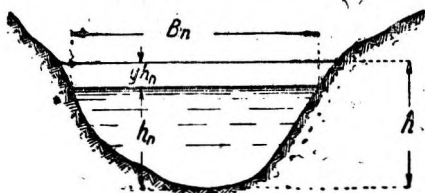
$$\chi = \chi_n (1 + \Phi y).$$

Напишем теперь такое

тождество:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_n} \frac{\omega_n}{\omega} \frac{\chi}{\chi_n}.$$

Черт. 21



Подставив сюда вместо ω и χ найденные выше выражения, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_n} \frac{1 + \Phi \cdot y}{1 + \varepsilon y} = \frac{1 + \Phi \cdot y - \varepsilon y}{R_n} = \frac{1 + (\Phi - \varepsilon) y}{R_n}.$$

Вместо переменной s введем переменную $\sigma = \frac{s}{h_n}$.

Теперь можно перейти к преобразованию отдельных членов уравнения (26).

Член $i - \frac{dh}{ds}$ после введения в него выражений $h = h_n (1 + y)$

и $\sigma = \frac{s}{h_n}$ получает вид $i - \frac{dy}{d\sigma}$ или $i - y'$.

Скорость $v = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{\omega_n (1 + \varepsilon y)} \approx \frac{Q}{\omega_n} (1 - \varepsilon y)$.

Вводя это значение v и переменную σ в выражение

$\alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$, будем иметь

$$\alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \alpha \frac{Q^2}{\omega_n^2} \frac{d}{ds} (1 - \varepsilon y) = -\alpha \frac{\varepsilon Q^2}{g \omega_n^2 h_n} \frac{dy}{d\sigma}.$$

В члене $\frac{v^2}{C^2 R}$ при сделанных допущениях можно положить

$C \approx C_n$. Подставляя далее в этот член выражения для v и $1/R$, получим

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} (1 - 2\varepsilon y) [1 + (\Phi - \varepsilon) y] &= \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} [1 - (3\varepsilon - \Phi) y] = \\ &= \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} - \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} (3\varepsilon - \Phi) y. \end{aligned}$$

Наконец, относительно последнего члена

$$\frac{d}{ds} \left(\lambda^2 \lambda' \frac{v^2 h}{g} \frac{d^2 h}{ds^2} \right)$$

заметим, что входящий в дифференцируемое выражение множитель $\frac{d^2 h}{ds^2}$, равный $\frac{d^2 (h_n + h_n v)}{h_n^2 d\sigma^2}$, или иначе $\frac{h_n d^2 y}{h_n^2 d\sigma^2} = \frac{y''}{h_n}$, мал, и по-

этому в других множителях v^2 и h нет надобности учитывать те малые величины, которыми они отличаются соответственно от v_n^2 и h_n . Точно так же вынесем из-под знака дифференциала произведение $\lambda^2 \lambda'$, которое дальше будем обозначать одной буквой x . Теперь можем написать:

$$\frac{d}{ds} \left(\lambda^2 \lambda' \frac{v^2 h}{g} \frac{d^2 h}{ds^2} \right) = x \frac{v_n^2}{g} h_n \frac{d}{h_n d\sigma} \left(\frac{y''}{h_n} \right) = x \frac{Q^2}{g h_n \omega_n^2} y'''.$$

Уравнение (26) можно переписать в таком виде:

$$i - y' = -\alpha \frac{\varepsilon Q^2}{g h_n \omega_n^2} y' + \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} - \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} (3\varepsilon - \Phi) y + x \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} y''.$$

Заметим, что

$$\frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} = \frac{v_{ii}^2}{C_n^2 R_n} = i.$$

Поэтому полученное только что уравнение можно упростить так:

$$x \frac{Q^2}{g h_n \omega_n^2} y''' + \left(1 - \alpha \frac{\varepsilon Q^2}{g h_n \omega_n^2} \right) y' - \frac{Q^2}{\omega_n^2 C_n^2 R_n} (3\varepsilon - \Phi) y = 0.$$

Еще несколько иначе:

$$y''' + \frac{1}{x} \left(\frac{g k_n \omega_n^2}{Q^2} - \alpha \varepsilon \right) y' - \frac{1}{x} \frac{g h_n}{C_n^2 R_n} (3\varepsilon - \Phi) y = 0. \quad (27)$$

Это линейное дифференциальное уравнение третьего порядка без последнего члена.

Ограничимся здесь исследованием уравнения (27) только для весьма широкого русла прямоугольного сечения постоянной ширины.

В этом случае $\Phi = 0$, так как очень велико сравнительно с h_n ; кроме того, $R_n \approx h_n$ и $\varepsilon = 1$. Введем в уравнение вместо $\frac{Q^2}{\omega_n^2}$ равное ему выражение $i \cdot C_n^2 R_n$; тогда получим

$$y''' + \frac{1}{x} \left(\frac{g}{i C_n^2} - \alpha \right) y' - \frac{3}{x} \frac{g}{C_n^2} y = 0. \quad (28)$$

Обозначив буквой p выражение $\frac{1}{x} \left(\frac{g}{iC_n^2} - \alpha \right)$ и буквой q выражение $-\frac{3}{x} \frac{g}{C_n^2}$, получаем

$$y''' + py' + qy = 0. \quad (29)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$x^3 + px + q = 0. \quad (30)$$

Если корни этого уравнения обозначим x_1 , x_2 и x_3 , то общий интеграл дифференциального уравнения (28) нужно написать в таком виде:

$$y = C_1 e^{x_1 \sigma} + C_2 e^{x_2 \sigma} + C_3 e^{x_3 \sigma}. \quad (31)$$

Здесь C_1 , C_2 и C_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Полезно представить графически зависимость хотя бы вещественных корней от уклона i . Для этого в уравнение (30) вставим значения p и q и разрешим полученное уравнение относительно $1/i$:

$$\frac{1}{i} = \frac{3}{x} + \alpha \frac{C_n^2}{g} - x \frac{C_n^2}{g} x^2.$$

Принимая $\alpha \approx 1,1$, $x \approx 1/3$ и $C_n \approx 50$, будем давать x всевозможные положительные и отрицательные значения; тогда зависимость x от i можем изобразить в виде графика, представленного на черт. 22, взаимоставившем из цитированной книги Р. Мизеса и несколько переделанном.

Так как характеристическое уравнение — третьей, нечетной, степени, а свободный член q для рассматриваемого вопроса по существу отрицательный, то один корень этого уравнения должен быть обязательно положительным.

Если далее дискриминант рассматриваемого уравнения

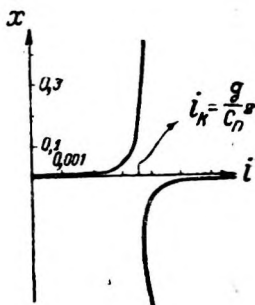
$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

получится положительным, то два других корня будут комплексными.

Если же дискриминант кубического уравнения получится отрицательным, то все три корня этого уравнения должны быть вещественными.

Когда дискриминант равен нулю, будем иметь два действительных равных корня сверх указанного уже положительного корня. Остановимся сначала несколько подробнее на том случае, когда

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$$



Черт. 22

Подставим сюда значения q и p :

$$\frac{1}{4x^2} \left(\frac{g}{C_n^2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{g}{iC_n^2} - \alpha \right)^3}{27x^3} = 0.$$

Полагая и здесь $x \approx 1/3$ и $\alpha \approx 1,1$, решим это уравнение относительно уклона i , причем с левой стороны будем C_n считать равным ~ 50 ; получим

$$i \approx \frac{g}{C_n^2}.$$

Это i , как видим, представляет приблизительно так называемый критический уклон i_k , при котором нормальная глубина h_n равна критической глубине h_k .

Рассмотрим вид поверхности воды для уклона дна i меньшего, чем критический уклон i_k . При этом условии p увеличится, а значит,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Но в таком случае, как уже говорилось, характеристическое уравнение, кроме положительного корня x_1 , имеет еще два комплексных сопряженных

корня: $x_2 = -a + b \sqrt{-1}$ и $x_3 = a - b \sqrt{-1}$. Сумму соответствующих этим корням интегралов $C_2 e^{x_2 \sigma} + C_3 e^{x_3 \sigma}$ можно заменить таким выражением $C' e^{-a\sigma} \sin(b\sigma + C'')$, где C' и C'' — новые произвольные постоянные.

Теперь общий интеграл уравнения (28) для спокойных водотоков ($i < i_k$) можно представить так:

$$y = C_1 e^{x_1 \sigma} + C' e^{-a\sigma} \sin(b\sigma + C''). \quad (32)$$

Величина y может иметь небольшое положительное значение для спокойных водотоков в двух случаях. Первый случай будем иметь при переходе от равномерного движения вниз по течению к неравномерному движению (черт. 23). В этом случае для $\sigma \rightarrow -\infty$ величина y должна стремиться к нулю. Этому условию удовлетворяет только первый член $C_1 e^{x_1 \sigma}$; второй член при конечных произвольных постоянных C' и C'' , очевидно, указанному условию удовлетворять не может, и поэтому нужно положить $C' = C'' = 0$. Следовательно, переход от равномерного движения к неравномерному происходит согласно уравнению $y = C_1 e^{x_1 \sigma}$ плавно с постепенным увеличением v , а значит, и ве-

личины yh_n , вниз по течению; поверхность воды не может быть волнообразной.

Второй случай положительного значения y и yh_n в спокойном водотоке получается при переходе от неравномерного движения к равномерному, например, в нижнем бьефе (черт. 24), если вода попадает туда с удельной энергией сечения немного большей, чем нормальная, но излишка энергии нехватает на то, чтобы образовался отогнанный или даже только затопленный прыжок. В этом случае в интеграле (32) нужно положить равным нулю C_1 , так как иначе y вниз по течению возрастало бы без границ вместо перехода к равномерному движению. Таким образом переход от неравномерного движения к равномерному в спокойных водотоках происходит по уравнению

$$y = C'e^{-a\sigma} \sin(b\sigma + C''),$$

которое представляет волнообразную кривую поверхности воды с убывающими высотами волн.

Слово "волны" здесь, конечно, обозначает не обычные волны, передвигающиеся по поверхности воды при неустановившемся движении, а только вид поверхности воды при рассматриваемом установившемся движении.

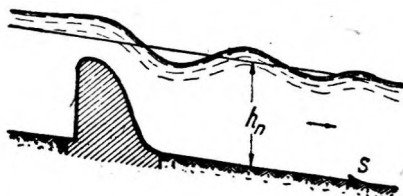
Можно высказать мнение, что эта поверхность близка к волнообразному прыжку.

Теперь рассмотрим вопросы о формах кривых свободных поверхностей при переходе от равномерного к неравномерному движению и, наоборот, от неравномерного к равномерному движению в бурных водотоках. Для этих водотоков характеристическое уравнение будет иметь все три корня вещественные,

так как при $i > i_k$ дискриминант $q^2/4 + p^3/27$ получается отрицательным. Из этих корней положительным может быть только один, а два других корня — отрицательные. Это следует из того обстоятельства, что коэффициент при x^3 положительный, а свободный член отрицательный; поэтому какой бы знак ни имел коэффициент p , число перемен знаков в характеристическом уравнении равно единице. Таким образом в общем интеграле $y = C_1 e^{x_1 \sigma} + C_2 e^{x_2 \sigma} + C_3 e^{x_3 \sigma}$

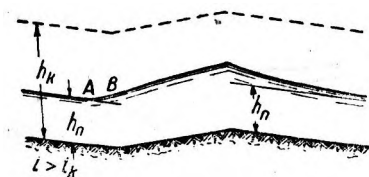
$$x_1 > 0, \text{ а } x_2 < 0 \text{ и } x_3 < 0.$$

Поэтому первый член общего интеграла $C_1 e^{x_1 \sigma}$ при переходе от одного сечения к другому вниз по течению возрастает и при этом возрастает очень быстро, т. е. поверхность воды поднимается (черт. 25) весьма резко, круто вверх, так как x_1 имеет сравнительно весьма большое значение, как видно из черт. 22. Каждый из двух других членов $C_2 e^{x_2 \sigma}$ и $C_3 e^{x_3 \sigma}$ при возрастании σ уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю.

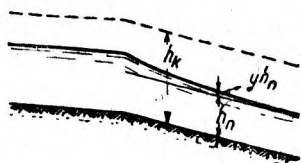


Черт. 24

Таким образом для перехода от равномерного течения к неравномерному в бурных потоках нужно пользоваться только первым членом общего интеграла: $y = C_1 e^{x^{1\sigma}}$, а C_2 и C_3 положить равными нулю. Не следует, однако, полагать, что уравнение $y = C_1 e^{x^{1\sigma}}$ дает форму поверхности водяного прыжка, как это можно подумать, читая, например, книгу R. Mises'a *Elemente der technischen Hydrodynamik*, 1914, стр. 119. Такое мнение будет ошибочным, так как уравнение $y = C_1 e^{x^{1\sigma}}$ выведено ведь только для малых значений $y \cdot h_n$, а значит, и для малых y (например, начало кривой AB на черт. 25); между тем при прыжках по-



Черт. 25



Черт. 26

верхность воды поднимается на значительную высоту и, кроме того, появляются вальцы, которые также не имелись в виду в наших выводах.

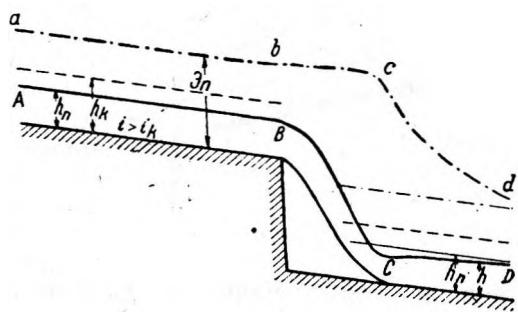
Наоборот, для перехода от неравномерного движения к равномерному годятся только члены с отрицательными показателями, при которых кривые поверхности имеют вид, показанный на черт. 26 с правого конца.

§ 7. Общее положение о возможно малой площади между линией энергии и линией дна в открытых водотоках и гидротехнических сооружениях

Выше уже было высказано мнение, что в более общей теории неравномерного движения очень большую роль должно, видимо, сыграть понятие удельной энергии сечения \mathcal{E} и линия энергии \mathcal{E}_s , наглядно показывающая изменение удельной энергии сечения вдоль потока. Свойства линии энергии поэтому должны быть исследованы возможно подробнее. Здесь мы и выясним весьма общее свойство линии энергии \mathcal{E}_s и таким образом получим важное общее положение, которое будет затем использовано в теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах.

1. Это общее положение относительно неравномерного движения жидкости в открытых водотоках сначала попытаемся получить как вывод из известных фактов гидравлики, как некоторое обобщение. Начнем с такого случая. Пусть на бурном водотоке ($i > i_k$) имеется перепад (черт. 27). Предполагается, что на некотором расстоянии вверх от перепада движение равномерное. Нетрудно убедиться, что глубина бурного

водотока, движущегося равномерно, не может при приближении к перепаду ни увеличиться ни уменьшиться по сравнению с нормальной глубиной. В самом деле, уменьшение глубины бурного водотока при приближении к перепаду могло бы иметь место только при одновременном увеличении удельной энергии сечения, как это ясно из графика $\mathcal{E}h$. Но даже при уменьшающейся глубине равномерного движения все падение струи в русле расходуется на преодоление сопротивления по длине. При глубине, меньшей нормальной, на преодоление сопротивления по длине энергии потребовалось бы еще больше, чем при нормальной глубине; поэтому равномерно движущийся бурный поток никак не может увеличить, приближаясь к перепаду, свою удельную энергию сечения по сравнению с нормальной. Отсюда уже следует, что глубина бурного водотока (без подведения энергии извне, которого мы здесь не предполагаем) перед перепадом уменьшаться не может¹ до самого "водопада" на перепаде.



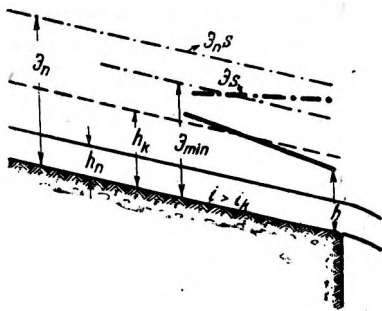
Черт. 27

Убедимся еще, что глубина равномерно движущегося бурного водотока не может и увеличиваться при приближении к перепаду. Для доказательства предположим, что на перепаде установится глубина (черт. 28) h_n к большая, чем h_n , но меньшая, чем h_k . Такой глубине по графику $\mathcal{E}h$ соответствует удельная энергия сечения \mathcal{E} , меньшая чем \mathcal{E}_n , но большая, чем \mathcal{E}_{\min} . Глубинам, большим нормальной, соответствуют потери энергии по длине меньшие, чем при равномерном движении; поэтому линия энергии $\mathcal{E}s$ для глубин больших, чем h_n , должна иметь уклон меньший, чем при равномерном движении. Но в таком случае линия $\mathcal{E}s$ должна была бы перейти к значениям удельной энергии сечения меньшим, чем \mathcal{E}_{\min} , как это видно из чертежа. Так как это невозможно, то и увеличение глубины равномерно движущегося бурного водотока и связанное с этим уменьшение удельной энергии сечения перед перепадом не могут иметь места. Таким образом мы убедились, что равномерное движение в бурном водотоке остается равномерным до самого перепада; кроме того, ясно, что линия энергии до перепада в рассматриваемом случае не может занять более низкого положения, чем она занимает при равномерном движении. Но величина удельной энергии сечения \mathcal{E}_n на перепаде предопределяет и положение линии энергии за перепадом. Таким образом приходим к заключению, что линия энергии $ab - cd$

¹ Ср. проф. М. Д. Чертоусов, Инженерная гидравлика, 1934, стр. 522 - 524.

(черт. 27) не может занять более низкого положения, чем это показано.

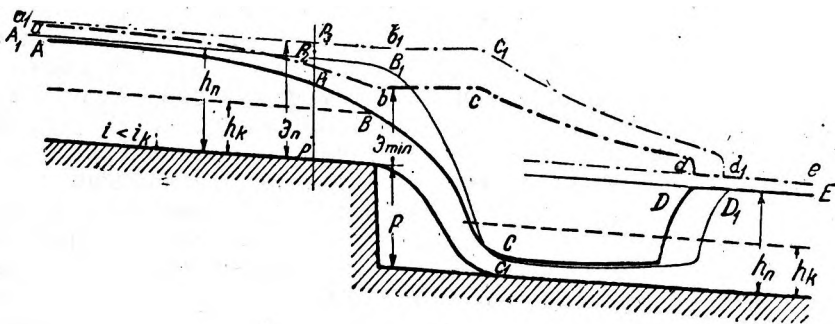
Теперь рассмотрим движение спокойного водотока в русле, на котором также имеется перепад (черт. 29). Достаточно хорошо известно, что на перепаде, собственно немного выше последнего, установится критическая глубина и соответствующая ей удельная энергия сечения \mathcal{E}_{\min} . Наличие критической глубины на перепаде здесь принимается пока как факт, более



Черт. 28

или менее точно установленный опытом. Поверхности воды вверх и вниз от перепада изобразятся кривыми AB и CDE . Отметим здесь, что для построения этих кривых мы пользуемся по существу уравнением Д. Бернулли, т. е. законом сохранения энергии. Однако нетрудно убедиться, что с точки зрения уравнения Д. Бернулли в спокойных водотоках, кроме только что указанного движения с кривыми поверхностями воды $AB-CDE$ вполне мыслимо также равномерное

движение жидкости до самого перепада — на манер того, как это в действительности имеет место в бурных водотоках. Дойдя до перепада с глубиной h_n и с удельной энергией сечения \mathcal{E}_n большей, чем \mathcal{E}_{\min} , вода после падения вниз должна



Черт. 29

была бы иметь в сжатом сечении глубину меньшую, чем в предыдущем случае при наличии h_k на перепаде. Уменьшение глубины в сжатом сечении объясняется тем, что в области бурных течений большей удельной энергии сечения соответствует, как известно, меньшая глубина; прыжок D_1 при этом был бы отогнан несколько дальше. Таким образом, если бы поверхность воды до перепада изображалась линией A_1B_1 , то за перепадом мы имели бы кривую поверхности воды $C_1D_1E_1$.

Поверхности $AB-CDE$ соответствует линия энергии $ab-cde$, а поверхности $A_1B_1-C_1D_1E_1$ линия энергии — $c_1d_1e_1$.

Кроме только что описанных двух форм движения и соответствующих им линий энергии с точки зрения уравнения Д. Бернулли вполне мыслимы и многие другие формы движения, например, промежуточные между описанными выше.

Но из всех возможных с точки зрения уравнения Д. Бернулли кривых поверхностей воды устанавливается в действительности поверхность воды, характеризуемая кривыми $AB—CDE$. Это означает, что в рассматриваемом случае из всех возможных форм движения в действительности устанавливается та, которой соответствует возможно малая площадь между линией энергии (в данном случае линией $ab — cde$) и линией дна.

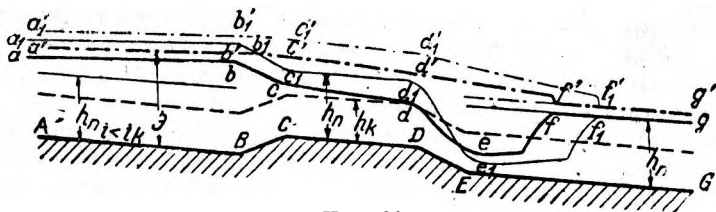
Отметим еще, что в каком-либо произвольном сечении PP_3 удельная энергия сечения при устанавливаемом в действительности движении имеет возможно малое для этого сечения значение PP_1 , хотя при других возможных с точки зрения уравнения Д. Бернулли формах движения удельная энергия сечения могла бы иметь и большие значения $PP_3, PP_2...$ Однако ясно, что указанное возможно малое для рассматриваемого сечения значение удельной энергии сечения PP_1 будет больше, чем \mathcal{E}_{\min} и только в виде исключения может быть ему равно.

Если уровень воды за перепадом поднимается настолько, что может уже подпереть струю на перепаде, то глубина на последнем h_B и соответствующая ей удельная энергия сечения \mathcal{E}_B увеличится по сравнению с h_K и \mathcal{E}_{\min} . Однако, удельная энергия сечения \mathcal{E}_B будет иметь значение как раз достаточное для дальнейшего движения воды за перепад и ни в коем случае не больше, как это известно из опыта и из теоретических соображений, излагаемых ниже¹. А между тем, и здесь с точки зрения уравнения Д. Бернулли вода могла бы подходить к перепаду с той или иной глубиной большей, чем h_K , и с удельной энергией сечения большей, чем \mathcal{E}_B , упасть на дно за перепадом и образовать там отогнанный или затопленный прыжок.

Рассмотрим теперь случай движения, приведенный в статье Э. Брауна (Der Baulingenieur, 1927, Н. 25, Abb. 20, стр. 645), а именно движение спокойного водотока (черт. 30) через стеснение русла $BCDE$ снизу. Проф. Э. Браун считает, что на участке CD будет равномерное движение и, следовательно, может установиться и установится движение с поверхностью $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g$. Такая картина движения с точки зрения уравнения Д. Бернулли возможна. Однако на самом деле установится поверхность $abcdefg$ с критической глубиной в конце участка CD , как это хорошо известно советским гидротехникам; последние применяют часто к таким местам теорию водослива с широким порогом, что по существу и обозначает, что в конце участка CD будем иметь критическую глубину h_K . Это же подтверждают и результаты опытов, в частности, результаты опытов П. Бёсса, описанные ниже в § 10.

¹ См. по этому поводу § 23, черт. 123.

Конечно, и здесь с точки зрения уравнения Д. Бернулли возможны еще и многие другие формы движения, например, с кривыми поверхностями воды, промежуточными между кривыми $abcdefg$ и $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1$, но в действительности установится, как только что указывалось, та форма движения, которой соответствует глубина h_k в конце участка CD и возможно малая площадь между линией энергии $a'b'c'd'e'f'g'$ и линией дна.

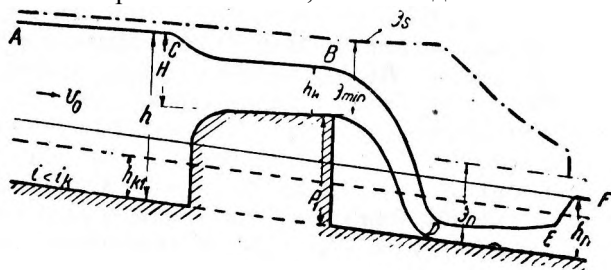


Черт. 30

Проф. Э. Браун, считая, что на участке CD движение будет происходить с нормальной глубиной h_n , делает, конечно, ошибку. Приведенные рассуждения имеют силу только до тех пор, пока струя в сечении Dd' не будет подтоплена. В случае подтопления струи пришлось бы рассуждать так же, как это было сделано при аналогичных условиях для перепада.

Рассмотрим теперь, уже вкратце, картины движения через водосливы с широким порогом, поставленные на спокойном (черт. 31) и на бурном (черт. 32) водотоках, причем предполагается, что входные ребра водосливов хорошо закруглены. Если высота порога p_1 достаточно велика по сравнению с \mathcal{E}_n потока, то перед водосливом образуются, конечно, кривые подпора. На самом водосливе в конце его, перед водопадом без всякого противоречия с уравнением Д. Бернулли могла бы установиться при данном расходе любая глубина и соответствующие каждой глубине кривая поверхности воды и линия энергии. Однако из опыта хорошо известно, что в действительности на водосливе перед водопадом устанавливается

перед водопадом устанавливается критическая глубина h_k , а кривые поверхностей получают для спокойного водотока в виде линии $ACBDEF$ (черт. 31) и для бурного — в виде линии $LMABNO$ (черт. 32).

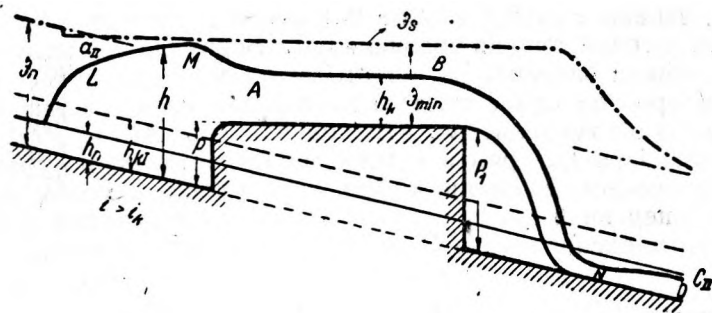


Черт. 31

Таким образом и в рассматриваемых случаях устанавливающееся в действительности движение воды отличается тем, что ему соответствует возможно малая площадь между линией энергии \mathcal{E}_s и линией дна.

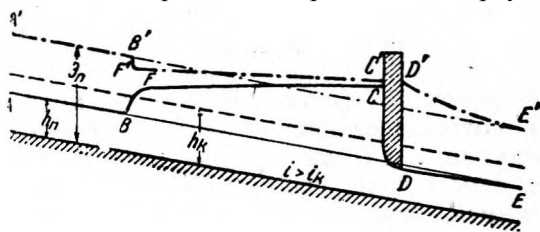
Рассмотрим, наконец, результаты следующих опытов.

Если опускать щит S (черт. 33), так, чтобы он только слегка погрузился в бурный поток, то уровень перед щитом сильно поднимется, образуется кривая FC подпора и прыжок BF . Такая картина движения объясняется тем, что даже очень



Черт. 32

небольшое уменьшение глубины бурного потока под щитом и за ним требует определенного увеличения удельной энергии сечения по сравнению с \mathcal{E}_n . Но последняя может увеличиться только при условии, что водоток прыжком перейдет в первую зону и благодаря большой глубине не только получит возможность покрыть потери энергии в прыжке, но и увеличить в необходимой степени свою удельную энергию сечения.



Черт. 33

Если проделать аналогичный опыт с небольшим погружением щита в спокойный водоток, то перед щитом мы получим только небольшое повышение уровня. Аналогичные опыты описаны в цитированной книге А. Koch-M. Carstanjen, Über die Bewegung des Wassers, S. S. 184—189¹.

Для наших целей представляет интерес следующее расширение по сравнению с опытами А. Коха области наблюдений над влиянием на водотоки щитов, немного погруженных в них. Если щит, несколько погруженный в спокойный водоток, поднять чуть больше, чем на высоту h_n над дном, то вода отделяется от щита и быстро восстанавливается равномерное движение, если оно имело место до опускания щита. Иная картина получается, если щит, который был несколько погружен в бурный водоток, поднять (черт. 33а) на высоту a , несколько пре-

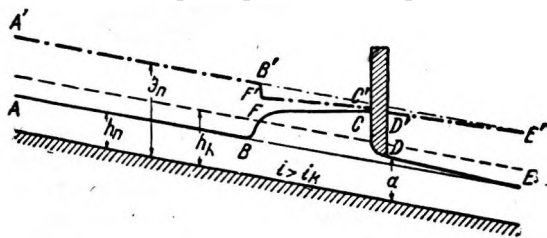
¹ В русском переводе, к сожалению, опущено то добавление к книге, в котором эти опыты описаны.

Для удобства проведения опытов мы пользовались щитом, имевшим внизу закругленный край в противоположность опытам А. Коха, при которых нижняя кромка щита была заострена.

восходящую глубину h_n первоначального, в данном случае равномерного, движения: вода не отрывается от щита до тех пор, пока разность $a - h_n$ не превзойдет некоторого определенного для каждого конкретного случая предела. Линия энергии $B'F'C'-D'E'$ при описанном только что движении, когда $a > h_n$, занимает более низкое положение, чем при вполне возможном с точки зрения уравнения Д. Бернулли движении с бытовой линией энергии. За щитом будем иметь кривую спада DE .

Интересной особенностью последнего случая движения является то обстоятельство, что поверхность $ABFC-DE$, которой благодаря потерям в прыжке соответствует по сравнению с равномерным движением меньшая площадь между бытовой линией энергии и дном, устанавливается фактически при условии, что предварительно перед щитом будет вызвано искусственно появление прыжка;

в данном случае появление прыжка было вызвано опусканием щита настолько, чтобы он задел поверхность воды в бурном водотоке. Это и понятно; если бы в водотоке с равномерным движением без постороннего воздействия начался



Черт. 33а

переход к форме движения, показанной на черт. 33а, то в некотором сечении B должно было бы начаться увеличение глубины. Но увеличение глубины тут не может иметь места; в самом деле, увеличение глубины (при медленно изменяющемся движении) должно было бы сопровождаться уменьшающейся удельной энергией сечения; между тем, увеличивающейся глубине соответствуют меньшие потери энергии, а следовательно, удельная энергия сечения могла бы только увеличиваться. Вообще ни в каком сечении при равномерном движении не может непосредственно образоваться прыжок с завихрениями и вальцем, так как нет условий для его образования; об этих условиях еще будет сказано дальше в § 25.

Из рассмотренных случаев неравномерного движения жидкости в открытых руслах видно, что линия энергии \mathcal{E}_s обладает следующим важным свойством: для заданных условий неравномерного движения жидкости в открытом русле с неразмываемым дном из возможных (в соответствии с уравнением Д. Бернулли) форм движения с различными свободными поверхностями жидкости устанавливается та, при которой площадь между линией энергии и линией дна будет возможно малой.

Трудно допустить, что указанное свойство линий энергии является случайным, присущим только рассмотренным примерам движения в открытых руслах, особенно, учитывая разнообразие этих случаев. Действительно, нам не удалось найти, несмотря

на длительные поиски, ни одного случая движения в открытых руслах, к которому положение о возможно малой площади между линиями энергии и дна оказалось бы неприложимым.

Однако, если бы мы описали здесь еще даже очень большое количество примеров неравномерного движения жидкости в открытых руслах и сооружениях на них, для которых подтверждается положение о возможно малой площади между линиями энергии и дна, это не дало бы все равно достаточно строгого доказательства общности выдвинутого положения, так как рассмотреть все многочисленные и разнообразные случаи рассматриваемого движения нет возможности. Поэтому, используя ряд хорошо известных в гидравлике фактов для получения при помощи обобщения положения о возможно малой площади между линией энергии и линией дна, естественно было бы поставить требование о том, чтобы обосновать выдвинутое положение при помощи общих дифференциальных уравнений гидродинамики или при помощи дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых руслах. Однако против такого требования приходится сделать следующие возражения. Для построения кривых поверхностей воды и соответствующих линий энергии необходимо иметь глубину в исходном для построения сечении или, выражаясь математически, нужно иметь пограничные условия; между тем, дифференциальные уравнения своих пограничных условий в себе, конечно, не включают. Кроме того, можно еще указать на то, что дифференциальные уравнения Эйлера и Навье-Стокса, строго говоря, вообще не годятся для изучения неравномерного турбулентного движения жидкости. Это совершенно ясно в отношении дифференциальных уравнений гидродинамики Эйлера, так как они пригодны только для изучения движения идеальной жидкости; между тем, при исследуемом неравномерном движении жидкости в открытых руслах потери энергии играют решающую роль. Дифференциальные уравнения гидродинамики Навье-Стокса для вязких жидкостей при обычном их толковании, когда коэффициент вязкости считают постоянным, также не могут быть использованы для нашей цели, так как они предназначаются только для исследования ламинарного движения, а мы здесь имеем дело с турбулентным движением. Уравнением Д. Бернулли тоже нельзя, как это уже было показано выше, воспользоваться для поставленной цели, так как с математической точки зрения оно является интегралом соответствующих дифференциальных уравнений; поэтому и для его использования нужно иметь пограничные условия, которых оно само дать не может.

Таким образом, оставаясь в области обычных идей гидравлики и гидромеханики, мы можем обосновать положение о возможно малой площади между линией энергии и линией дна только при помощи определенных, опытным путем установленных фактов, как это отчасти уже и сделано выше. При этом пришлось бы мириться с тем обстоятельством, что более полная достоверность выдвинутого положения, как и всяких опытных законов или принципов, может быть установлена только с течением

времени, когда выясняется, что не встречаются факты, противоречащие выдвинутому положению, а наоборот, выводы из этого положения подтверждаются опытом.

2. Однако положение о возможно малой площади между линией энергии и линией дна можно, на наш взгляд, обосновать и иначе, исходя из весьма общего закона природы, а именно из закона рассеяния энергии (второго закона термодинамики). Правда, при этом придется выйти из круга привычных идей гидравлики и гидромеханики, но последнее обстоятельство не может, конечно, служить препятствием к тому, чтобы использовать при изучении движения жидкости в открытых руслах закон рассеяния энергии. Дело заключается в следующем.

В рассматриваемом нами движении потери (по длине и местные) механической энергии, т. е. переход последней в теплоту, играет решающую роль. Поэтому процесс неравномерного движения в открытых руслах и гидротехнических сооружениях можно рассматривать как процесс не только механический, но и тепловой. Применяя к рассматриваемому движению уравнение Д. Бернулли с членом, учитывающим потери, т. е. механическую энергию, превращающуюся в теплоту, мы применяем в сущности первый закон термодинамики, т. е. закон сохранения энергии. Однако, как это выясняется в курсах общей физики или термодинамики¹, закон сохранения энергии совершенно недостаточен для однозначного определения процессов природы (§ 103, 111 цитированной книги проф. В. К. Фредерикса и проф. А. П. Афанасьева); он недостаточен для того, чтобы предвидеть, в каком из направлений, возможных с точки зрения этого закона, будет развиваться то или иное явление. Последние замечания относятся, конечно, и к уравнению Д. Бернулли; в справедливости этого мы уже убедились при рассмотрении примеров неравномерного движения жидкости в открытых руслах.

Для того чтобы получить указания, в каком из возможных с точки зрения закона сохранения энергии направлений будет развиваться какое-либо явление, во многих областях науки и техники применяют вместе с первым и второй закон термодинамики. Этот закон имеет весьма общий характер; он применим не только к процессам превращения теплоты в работу, но и к другим разнообразнейшим явлениям, в том числе к явлениям, сопровождающимся превращением механической энергии в тепловую. Соображения о несомненной применимости второго закона термодинамики к механическим явлениям, сопровождающимся превращением механической энергии в тепловую, излагаются, например, в цитированной книге проф. В. К. Фредерикса и А. П. Афанасьева, гл. XI—XIII, в частности в § 111, 112. Так как неравномерное движение жидкости в открытых руслах, будучи явлением механическим, сопровождается превращением механической энергии в теплоту благодаря трению и завихре-

¹ См., например, книги: проф. В. К. Фредерикс и А. П. Афанасьев, Курс общей физики, 1935, гл. XI—XIII, или А. Б. Млодзеевский, Курс теоретической физики, т. I, Термодинамика, гл. II.

ниям, то имеются все основания к тому, чтобы к этому движению приложить второй закон термодинамики. Прямые указания на связь второго закона термодинамики с процессами течения жидкостей при наличии трения и завихрений имеются, например, в книге В. Шюле, "Техническая термодинамика", т. I, книга 1, 1935, § 58 и в других книгах по термодинамике и физике.

Изложив соображения относительно полной применимости второго закона термодинамики к исследованию движения реальной жидкости в открытых руслах, мы должны выбрать подходящие для последней цели формулировки указанного закона. Весьма удобно будет воспользоваться вторым законом термодинамики в формулировке Л. Больцмана: "Во всякой изолированной системе происходят такие изменения, которые приводят систему в ее наиболее вероятное состояние"¹. Иногда может оказаться полезной еще такая формулировка: "Всякая изолированная система переходит от менее вероятных к более вероятным состояниям".

Ввиду того что закон рассеяния энергии до сих пор почти не находил применения в гидравлике вообще и в особенности в гидравлике открытых русел, будет не лишним дать здесь предварительно несколько кратких пояснений к этому закону.

Прежде всего остановимся на вопросе о том, можно ли к потоку, движущемуся в открытом русле под влиянием силы тяжести, приложить понятие изолированной системы. Если подходить к вопросу строго, то в рассматриваемом случае, как и в громадном большинстве других случаев, о полной изолированности системы, состоящей из водного потока и земли, говорить нельзя, так как имеются некоторые взаимодействия с телами, не входящими в эту систему. Тут прежде всего нужно отметить получение рассматриваемой системой тепла извне или, наоборот, отдачу системой тепла на сторону, а также некоторое взаимодействие потока с атмосферой. Однако указанные только что взаимодействия оказывают обычно настолько незначительное влияние на турбулентное движение потока², что их можно не принимать во внимание, т. е. считать рассматриваемую систему изолированной, как это в сущности делали и до сих пор; в случае же надобности получение или отдачу тепла системой можно учесть отдельно.

Теперь остановимся на изменениях, происходящих в рассматриваемой системе. Эти изменения при движении жидкости сводятся к превращениям различных видов механической энергии друг в друга, а также превращению механической энергии в тепловую (гидравлические "потери" энергии). Главное, что нужно теперь отметить относительно превращений энергии, имеющих место в процессе движения жидкости в открытом русле, это то, что эти превращения, а вместе с ними и процесс

¹ См., например, цитированную книгу А. Б. Млодзеевского, раздел второй, п. "Статистический характер второго закона термодинамики".

² Мы здесь исключаем из рассмотрения движение водотоков под ледяным покровом, а также аэрацию потоков.

движения жидкости являются необратимыми. Это означает, как известно, что рассматриваемый процесс не может быть проведен в обратном направлении так, чтобы система прошла через те же промежуточные состояния, что и при обычном движении, но в обратном порядке. Причиной необратимости рассматриваемого процесса течения жидкости является то обстоятельство, что он сопровождается переходом определенной части механической (гидравлической) энергии в тепловую. Процесс течения мог бы быть обратимым только при условии, что при прохождении системой различных состояний в обратном порядке происходило бы и полное обратное превращение в механическую энергию той тепловой энергии, которая образовалась при обычном движении жидкости; однако такого обратного перехода при рассматриваемом процессе движения жидкости в открытом русле не бывает.

Указанное только что свойство тепловой энергии в физике и термодинамике объясняют со времени Л. Больцмана тем обстоятельством, что тепловое движение (при равномерном в конечном счете распределении в системе тепловой энергии), сводящееся к хаотическим, неупорядоченным, случайным движениям молекул, является самым вероятным из различных видов движений, так как оно может осуществляться наибольшим числом способов. Для того, чтобы термин "вероятность" не привел к недоразумениям, необходимо пояснить, что случайность движений молекул нельзя рассматривать, как непознанную частичную причину рассматриваемых явлений; наоборот, как эти случайные движения, так и характеризующие их вероятности имеют определенное объективное значение, не зависящее от степени нашего знания тепловых движений отдельных молекул.

Благодаря указанному выше свойству тепловой энергии превращение кинетической энергии сравнительно упорядоченного движения воды в открытом русле в тепловое движение происходит "само собою"; обратный же переход теплового движения в упорядоченное движение, хотя принципиально возможен, но вероятность такого перехода в рассматриваемых условиях ничтожно мала, настолько мала, что практически его нужно считать совершенно исключенным.

Теперь остановимся на том, как можно использовать закон рассеяния энергии к объяснению явлений движения жидкости в открытых руслах. Всего проще можно выяснить этот вопрос на конкретном хорошо известном примере, хотя бы на примере движения жидкости в спокойном водотоке, русло которого имеет перепад (черт. 29). Как уже говорилось, с точки зрения закона сохранения энергии (уравнения Д. Бернулли) здесь возможны многочисленные формы движения с различными поверхностями воды. На черт. 29 нанесены только линия поверхности воды при равномерном движении A_1B_1 и кривая спада АВ с критической глубиной h_k и удельной энергии сечения \mathcal{E}_{\min} . Сравним сначала формы движения с этими именно поверхностями. Первой из этих поверхностей A_1B_1 соответствует линия энер-

гии $a_1 b_1$, расположенная выше, чем линия энергии ab , соответствующая кривой спада AB ; следовательно, поверхности $A_1 B_1$ соответствует переход в тепловую энергию меньшего количества гидравлической энергии, чем поверхности AB . Это означает, что движение с поверхностью $A_1 B_1$ является менее вероятным, чем движение с поверхностью AB ; то же, что было только что сказано о поверхности $A_1 B_1$, пришлось бы повторить и о всех других формах движения с линиями энергии, расположенными выше линии ab . Так как во всякой изолированной системе происходят такие необратимые изменения, которые приводят систему в ее наиболее вероятное состояние, то и в рассматриваемой нами системе должно установиться наиболее вероятное состояние движения, т. е. движение с поверхностью AB ; вероятность установления форм движения с линиями энергии, расположенными выше, чем линия ab , настолько опять-таки ничтожна, что в действительности такие формы никогда не наблюдались. В результате приведенного рассуждения не только показано, как можно применять закон рассеяния энергии к вопросам движения жидкости в открытых руслах, но и объяснено, почему на перепаде устанавливается критическая глубина. Однако наличие критической глубины на перепаде не имело, очевидно, какого-либо принципиального значения в рассуждениях. Соображения, изложенные при рассмотрении движения жидкости в русле с перепадом, вполне применимы с теми или иными небольшими изменениями ко всяким другим случаям движения жидкости в открытых руслах.

Подразделим теперь какой-либо водоток, например, тот же спокойный водоток в русле с перепадом, на несколько участков. На каждом из этих участков с точки зрения уравнения Д. Бернулли могли бы иметь место различные формы движения с различными линиями энергии. Однако и тут на каком-либо участке из всех мыслимых форм должна установиться та форма движения, при которой на этом участке возможно большее количество гидравлической энергии переходит в тепловую; иначе мы имели бы на этом участке не наиболее вероятное состояние движения, что противоречило бы закону рассеяния энергии.

Но если при движении жидкости на каждом выше расположенном ранее протекаемом жидкостью участке возможно большее количество гидравлической энергии переходит в тепловую, то это означает, что рассматриваемый переход гидравлической энергии в тепловую происходит возможно скорее.

Изложенные краткие соображения дают основание сделать из закона рассеяния энергии для движения потока в открытом русле следующий вывод: из всех возможных сточки зрения уравнения Д. Бернулли форм движения в действительности установится та форма, при которой возможно большее количество гидравлической энергии возможно скорее будет превра-

щаться в тепловую энергию¹. Отсюда уже следует, что в каждом сечении водотока удельная энергия сечения получает возможно малые значения, а следовательно, площадь между линией энергии и линией дна получится возможно малой — в полном соответствии с приведенными выше опытными данными относительно движения жидкости через перепады и в других случаях.

Приняв во внимание все изложенное, можно сказать, что имеется достаточно оснований для того, чтобы пользоваться вместе с уравнением Д. Бернулли положением о возможно малой площади между линией энергии и линией дна при дальнейших исследованиях неравномерного движения жидкости в открытых руслах, на пороге водослива с широким порогом и в гидротехнических сооружениях и таким образом рассматривать эти явления с одной общей точки зрения. Однако нужно иметь в виду, что мы не сможем пользоваться положением о возможно малой площади между линией энергии и линией дна (так же как и уравнением Д. Бернулли) для изучения движения на таких участках, на которых имеют место отступления от медленной изменяемости движения и прежде всего местные потери энергии. Движение на таких отдельных, сравнительно коротких, участках должно быть исследовано уже при помощи закона количеств движения; к этому вопросу мы еще вернемся в гл. V.

Отметим еще, что к положению о наименьшей площади между линией энергии и линией дна приближаются высказывания П. Бёсса (цит. работа, стр. 35). Однако близость эта является только внешней, так как П. Бёсс имеет в виду сечения водотока, в которых устанавливаются h_k и \mathcal{E}_{\min} так же, как это имел в виду и Б. А. Бахметев, обосновывая теорию водослива с широким порогом, а также и А. Кох в указанной выше его работе. Эти авторы не дают более или менее достаточных объяснений даже и для факта установления критических глубин h_k и \mathcal{E}_{\min} в определенных сечениях водотоков.

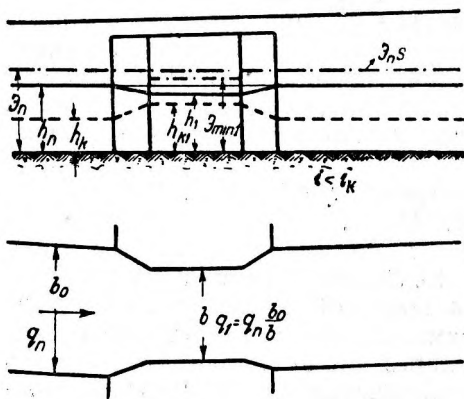
По поводу положения о наименьшей площади между линией энергии и линией дна сделаем здесь еще одно довольно существенное замечание. Дело в том, что для рассматриваемой площади не указывается каких-либо границ по длине водотока; поэтому от сформулированного положения может получиться впечатление некоторой неопределенности. Однако такая неопределенность соответствует самой природе движения жидкости в открытых водотоках, так как движение на каком-либо участке, вообще говоря, зависит от

¹ Здесь интересно будет отметить, что такой весьма авторитетный специалист по технической физике (включая термодинамику и гидромеханику), как Н. Lorenz, рассматривая, правда, совершенно другой вопрос механики движения жидкостей, говорит; «...из двух признанных возможными необратимых явлений движения жидкостей в действительности установится то, с которым связано большее развитие теплоты». («Technische Hydromechanik», München und Berlin, 1910, S. S. 69—70).

условий движения на ближайших к нему участках; движение на этих ближайших участках зависит от движения на более отдаленных и т. д. Вот эту-то взаимную зависимость движения на участках водотока и выражает выдвигаемое положение. Понятно, что поэтому нельзя дать общих указаний, в каких пределах по длине потока следует брать площадь. В отдельных же случаях можно найти такие сечения, которые при рассмотрении движения на определенном участке могут быть приняты за пределы для площади между градиентом энергии и линией дна — иногда с обоих, а иногда только с одного конца. Однако и отсутствие таких пределов не может служить препятствием для применения положения, как это будет видно из дальнейшего.

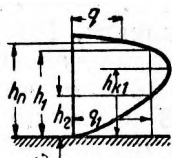
§ 8. Примеры непосредственного применения общего положения о возможно малой площади между линиями энергии и дна

В качестве примера непосредственного применения общего положения о возможно малой площади между линиями энергии и дна рассмотрим движение в спокойном водотоке при стеснении его в плане, например, мостовыми устоями. Чтобы несколько упростить дальнейшие рассуждения, предположим, что на участке, на котором сооружен мост, до постройки последнего имело место равномерное движение; живые сечения потока как на



Черт. 34

мостовыми устоями. Чтобы несколько упростить дальнейшие рассуждения, предположим, что на участке, на котором сооружен мост, до постройки последнего имело место равномерное движение; живые сечения потока как на



Черт. 35

нестесненных участках, так и в отверстии моста примем прямоугольными. Относительно устоев моста, стесняющих водоток, сделаем пока предположение, что они имеют настолько удобообтекаемую форму, что местных потерь нет; потери на трение в сооружении будем считать приблизительно такими же, как и на участке с равномерным движением. Нужно будет рассмотреть два случая: а) удельная энергия сечения \mathcal{E}_{\min} между устоями (черт. 34) меньше, чем \mathcal{E}_n , и в) $\mathcal{E}_{\min} > \mathcal{E}_n$ (черт. 36).

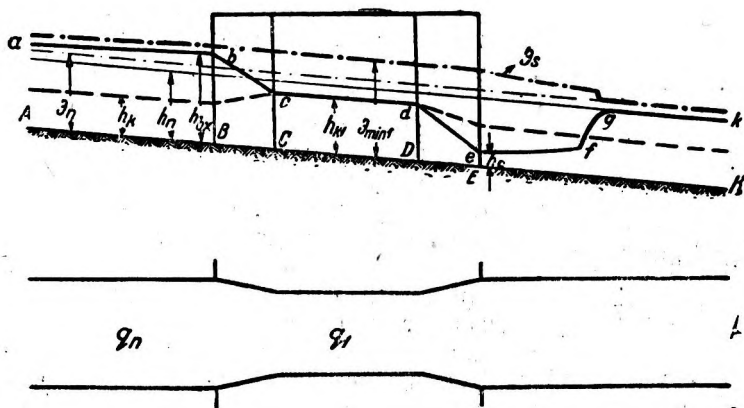
а) Если $\mathcal{E}_{\min 1} > \mathcal{E}_n$ и потери энергии в сооружении предполагаются примерно такими же, какими они были бы при отсутствии сооружения, то последнее не будет влиять на водоток ни перед сооружением, ни за ним, так как линия энергии \mathcal{E}_{nS} (черт. 34) от наличия сооружения не изменяется. Применяя график А. Коха qh (черт. 35), получим для расхода q_1 на единицу ширины между устоями две глубины h_1 и h_2 . Обе эти глубины меньше нормальной глубины водотока h_n ; при этом h_2 меньше критической глубины h_{k1} между устоями, а h_1 больше последней. Из этих двух глубин в действительности установится большая глубина h_1 , которой соответствует, как уже говорилось, линия энергии \mathcal{E}_{nS} (черт. 34). Если бы между устоями установилась глубина h_2 меньшая, чем h_{k1} , то за сооружением водоток мог бы вернуться к нормальной глубине h_n только прыжком при переходе через линию критических глубин. Так как в прыжке мы имели бы местную потерю энергии, а за прыжком удельная энергия сечения равна \mathcal{E}_n , то перед прыжком — в сооружении и перед сооружением — линия энергии должна была бы располагаться выше линии \mathcal{E}_{nS} . Более высокому расположению линии энергии в сооружении способствовала бы также увеличенная потеря энергии на трение, так как при меньшей глубине получилась бы большая скорость.

В соответствии с общим положением о возможно малой площади между линиями энергии и дна из двух возможных форм движения должна установиться та, при которой в сооружении получим глубину h_1 . Поверхность воды, соответствующая глубине h_1 , и показана на черт. 34. Здесь важно отметить, что при перечисленных выше условиях подпор перед сооружением не может иметь места, а получается только понижение уровня на стесненном участке.

Аналогичную задачу рассматривают проф. И. Г. Есьман в своем курсе гидравлики (проф. И. Г. Есьман „Гидравлика”, 1933, стр. 102—103) и проф. А. Н. Ахутин в „Сборнике задач по гидравлике”, 1934, задача № 45. Задача состоит в следующем: „Канал прямоугольного сечения шириной 20 м сужен в одном месте до 16 м мостовыми устоями. Зная глубину (2,5 м) и скорость (0,8 м/сек) до сужения, определить глубину и скорость воды под мостом; при этом предполагается, что дно горизонтально и сопротивления ничтожны”.

Проф. И. Г. Есьман, найдя для этой задачи при помощи уравнения Д. Бернулли, два значения для глубины на стесненном участке ($h_1 = 2,48$ м и $h_2 = 0,385$ м), говорит: „при равновозможных двух положениях горизонта жидкость установится на более низком, что исключает первое решение”. Из предыдущего ясно, что последнее соображение проф. И. Г. Есьмана является ошибочным. Проф. А. Н. Ахутин по поводу тех же двух решений говорит; „при равновозможных двух положениях жидкость установится на более высоком, так как иначе глубина под мостом окажется значительно ниже естественной глубины в реке ниже моста, что невозможно”. Что установится большая

глубина $h_1 = 2,48$ м, это верно; однако соображение проф. А. Н. Ахутина в пользу большей глубины нельзя признать правильным и более или менее определенным. В самом деле, в рассмотренном примере понижение уровня под мостом составляет только 2 см или 0,8% первоначальной глубины; но нетрудно убедиться, что если тот же водоток сузить, например, до 6,4 м, то большая из двух возможных глубин под мостом h_1 равнялась бы приблизительно 2,07 м, т. е. понижение уже составляло бы 43 см или 17,2% от глубины 2,5 м; если воспользоваться соображением, выдвинутым проф. А. Н. Ахутиным, то можно было бы, пожалуй, подумать, что такое движение невозможно. Однако наш лабораторный опыт, результаты которого представлены дальше на черт. 49б, показывает, что понижение уровня



Черт. 36

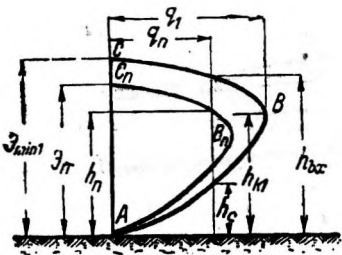
на стесненном с боков участке составляло свыше 16,5%, а в опытах А. Коха¹ понижение равнялось 19 с лишним процентам от первоначальной глубины. Можно было бы указать опыты над движением жидкости при стеснении русла с боков, при которых понижение уровня на стесненном участке составляло еще больший процент от первоначальной глубины при отсутствии стеснения и поверхность потока за стеснением возвращалась к нормальному уровню. Неправильность рассматриваемого соображения проф. А. Н. Ахутина еще более выяснится после того, как будет рассмотрен следующий случай движения спокойного водотока при более значительном стеснении его с боков.

б) При более сильном стеснении водотока устоями расход q_1 на единицу ширины потока под мостом увеличится; вместе с тем под мостом увеличится, очевидно, критическая глубина h_{k1} и удельная энергия сечения \mathcal{E}_{min1} . Здесь мы и рассмотрим тот случай, когда \mathcal{E}_{min1} возрастет настолько, что станет больше (черт. 36), чем нормальная удельная энергия сечения \mathcal{E}_n . При-

¹ Цитированная книга на немецком языке, черт. 267 и 268.

помнив сделанное выше допущение, что потери в сооружении останутся приблизительно такими же, как если бы сооружения не было, можем утверждать, что в сооружении по всей длине его удельная энергия сечения будет одинаковой, а именно, равной $\mathcal{E}_{\min 1}$. В самом деле, на наиболее стесненном участке CD вода не может двигаться с удельной энергией сечения меньшей, чем $\mathcal{E}_{\min 1}$, а больших значений удельной энергии сечения на этом участке водоток не может иметь в соответствии с общим положением о возможно малой площади между линиями энергии и дна. Отсюда уже получается вывод, что на участке CD будем иметь критическую глубину h_{k1} .

Чтобы определить глубины при входе в сооружение и при выходе из него, построим график А. Коха qh для удельной энергии сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$, которую будет иметь водоток в рассматриваемых сечениях B и E . Глубины на графике А. Коха ABC (черт. 37) нужно определять уже для расхода q_n на единицу ширины нестесненного потока, а не для расхода q_1 на единицу ширины на стесненном участке. Как и следовало ожидать, получаем из графика qh две глубины h_{bx} и h_c . Чтобы разрешить вопрос о том, какая из этих двух глубин установится за сечением E (черт. 36), заметим, что за сооружением вода может течь с удельной энергией сечения \mathcal{E}_n , хотя водоток подходит к сечению E с удельной энергией сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$ большей, чем \mathcal{E}_n .



Черт. 37

Для того чтобы линия энергии за сооружением могла занять возможно низкое положение, водоток должен поскорее истратить энергию $\mathcal{E}_{\min 1} - \mathcal{E}_n$; поэтому за сооружением должна установиться возможно малая глубина h_c ; при этой глубине потери будут возможно большими, во всяком случае большими, чем при равномерном движении. На определенном расстоянии за сооружением будем иметь кривую подпора c_1 и затем водоток прыжком fg перейдет к равномерному движению. Рассмотренная только что форма поверхности за сооружением особенно наглядно показывает неправильность мнения проф. А. Н. Ахутина, о том, что движение за сооружением с большим отклонением глубины от нормальной невозможно. Перед сооружением удельная энергия сечения должна по сравнению с равномерным движением увеличиться на ту величину $\mathcal{E}_{\min 1} - \mathcal{E}_n$; для этого тут потери энергии должны сделаться возможно малыми и во всяком случае меньшими, чем при равномерном движении. В связи с этим перед сооружением установится большая из двух возможных глубин, а именно h_{bx} . Таким образом перед сооружением получится подпор $h_{bx} - h_n$ и установится кривая подпора a_1 . Теперь можно полностью нанести на чертеж поверхность воды $abcdefgk$. Что такая форма движения действительно устанавливается при соответствующих условиях, легко убедиться

в лаборатории или взглянув, например, на фотографию в книге проф. А. А. Гельфера, Разрушение мостовых опор и меры их защиты. 1938, рис. 26.

Излагаемые в учебниках гидравлики и соответствующих инструкциях способы гидравлических расчетов мостов, безнапорных труб и других подобных сооружений¹ базируются на неправильных представлениях о движении жидкости в этих сооружениях. Поэтому, применяя указанные способы расчетов, можно получить неправильные результаты.

В самом деле, при движении с $\mathcal{E}_{\min 1} < \mathcal{E}_n$ (черт. 34) принимают, что в сооружении устанавливается нормальная глубина h_n , т. е. не обращают внимания на понижение уровня $h_n - h_1$ на стесненном участке. Это иногда ведет к совершенно неправильному определению подпора перед сооружением. Из изложенного выше ясно, что подпор перед сооружением не зависит от увеличения скорости в сооружении, так как это увеличение скорости получается не за счет увеличения глубины по сравнению с нормальной глубиной (подпора) перед сооружением, а за счет уменьшения глубины в сооружении по сравнению с h_n . Получающийся в рассматриваемом случае обычно небольшой подпор перед сооружением возникает только в результате дополнительных потерь энергии при наличии сооружения по сравнению с потерями, которые имели бы место при отсутствии последнего. Мы эти дополнительные потери пока не принимаем во внимание.

В том случае, когда в сооружении устанавливается критическая глубина h_{k1} (черт. 36), в учебниках обычно ошибочно полагают, что нормальная глубина h_n установится сразу же при выходе из сооружения, между тем как здесь в действительности получается участок с большими скоростями и прыжок.

Проф. А. А. Гельфер в цитированной уже его работе заявляет на стр. 42 по поводу картины движения, показанной на черт. 36 (или на упоминавшейся фотографии, помещенной в цитируемой его книге, рис. 26), следующее: «...ни по теореме Бернулли, ни по одному из уравнений теории водосливов нельзя даже приблизительно определить падения уровня при вступлении воды в пролеты между быками. Тем более нельзя вычислить из тех или других выражений гидравлики новое весьма бурное повышение уровня воды при выходе из пролетов»...

Проф. А. А. Гельфер, конечно, неправ, делая такое пессимистическое заявление. Как видно из сказанного выше, приблизительное теоретическое определение глубин между устоями, перед мостом и за ним в рассматриваемом случае вполне возможно.

¹ Проф. Б. А. Бахметев, Гидравлика, Общий курс, 1982, стр. 227 — 283.

Проф. И. Г. Есьман, Гидравлика, 1938, стр. 210 — 211, 272 — 273.

Проф. Б. Г. Ботук, Канализация промышленных предприятий и населенных мест, ч. II, 1938, стр. 324 — 326.

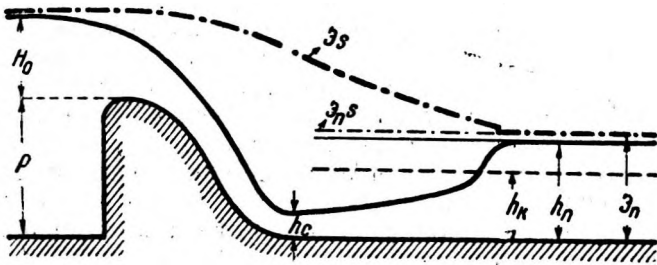
Проф. А. Н. Ахутин, гл. 37, § 334, п. За в книге "Гидротехнические сооружения" под ред. проф. д-ра Е. В. Близняка и проф. М. М. Гришина, 1939 и некоторые другие.

с) В качестве еще одного важного примера на непосредственное применение положения о возможно малой площади между линиями энергии и дна рассмотрим вопрос о глубине h_c (черт. 38) в нижнем бьефе за плотиной. Будем рассматривать спокойный поток прямоугольного сечения как случай наиболее простой и вместе с тем чаще всего встречающийся на практике.

Обычно для определения h_c пишут уравнение

$$p + H_0 = h_c + a \frac{q^2}{\varphi^2 2gh_c^2},$$

в котором a — корректив на неравномерное распределение скоростей по сечению, а φ — коэффициент скорости. Как видим, это — кубическое уравнение относительно h_c . Оно имеет три действительных корня. Один из них отбрасывается, так как он, будучи отрицательным, не имеет физического смысла. Из двух



Черт. 38

положительных корней один получается меньше критической глубины, а другой больше не только критической глубины h_k , но и нормальной глубины h_n . В курсах гидравлики о большем положительном корне обычно просто не говорят, как будто его нет вовсе; это, конечно, принципиально неправильно и, кроме того, может повести к недоразумениям. Указанный факт объясняется тем, что удовлетворительного теоретического доказательства необходимости отбрасывания большего положительного корня до сих пор и не было. Между тем, с точки зрения положения о наименьшей площади между градиентом энергии \mathcal{E}_s и дном ясно, что из двух математически возможных глубин установится именно меньшая, так как при меньших глубинах линия энергии \mathcal{E}_s понижается быстрее и возможно скорее приближается к линии энергии равномерного движения $\mathcal{E}_n s$. Наоборот, при глубине большей, чем h_n , градиент энергии \mathcal{E}_s за плотиной шел бы положе, чем $\mathcal{E}_n s$, и отдалялся бы от дна.

§ 9. Частные положения о движении жидкости в открытых водотоках

Из приведенных примеров можно было убедиться, что непосредственное применение общего положения о возможно малой площади между продольным профилем дна и линией энергии

водотока несколько сложно; поэтому представляется целесообразным вывести из общего положения о возможно малой площади между линиями энергии и дна частные положения, которыми удобнее пользоваться в особенно часто встречающихся на практике случаях. Эти положения сформулируем сначала для такого водотока и сооружений на нем, в которых местных потерь нет, т. е. для такого случая, когда движение можно считать медленно изменяющимся; в дальнейшем же будет указано, как эти положения нужно изменить в некоторых случаях при наличии местных потерь энергии.

Предварительно еще заметим, что с точки зрения гидравлики роль сооружений на водотоке в громадном большинстве случаев сводится к тому, что они стесняют водоток с боков, или снизу, или сразу и с боков и снизу; может, конечно, случиться, что, наоборот, в некоторых местах водоток имеет большую ширину или глубину. До некоторой степени аналогично сужениям и расширениям на водоток действуют изменения уклона, а также участки с увеличенной или уменьшенной шероховатостью; обычно шероховатость в сооружениях иная, чем перед ними и за ними.

Условимся и в дальнейшем называть "спокойными" те водотоки, в которых глубина равномерного движения h_n больше их критической глубины h_k , и "бурными" — те, у которых $h_n < h_k$. Кроме водотока в целом будем часто рассматривать неравномерное движение на отдельных участках водотока; при определенных условиях может случиться, что в спокойном вообще водотоке будем иметь участок с "бурным течением", т. е. глубина на этом участке h (переменная) будет меньше критической h_k (кривая подпора в зоне с спокойного водотока); наоборот, в бурных водотоках встречаются "спокойные течения", в которых переменная глубина h больше h_k . (Например, кривая подпора в зоне a "бурных" водотоков.)

После этих замечаний можем сформулировать следующие положения с тем, что вывод их из общего положения будет дан дальше.

1. Сооружения на участках со спокойными течениями не влияют на водотоки вниз по течению, а на бурных участках вверх против течения при условии, что удельной энергии сечения \mathcal{E}_n водотока, которую последний имел на месте сооружения до устройства его, достаточно для прохождения через сооружение.

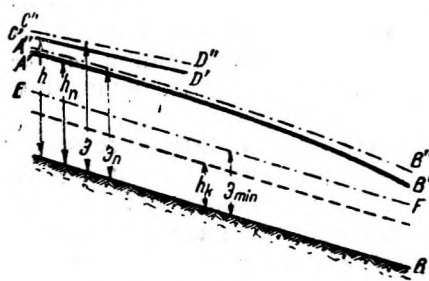
При этом же условии влияние сооружений ощущается в спокойных течениях только вверх от сооружений, а в бурных, наоборот, — только по течению вниз. Влияние сооружений на водотоки в обоих указанных случаях при обычных длинах сооружений и более или менее плавных изменениях сечений потока не может быть значительным.

2. Если удельной энергии сечения \mathcal{E}_n (см. предыдущее положение 1) не хватает для протекания через сооружение, то в наиболее стесненном сечении потока в сооружении устано-

вится движение с $\mathcal{E}_{\min 1}$ и с соответствующей критической глубиной h_{k1} ¹. Энергия, которой нехватает для прохождения наиболее стесненного сечения с удельной энергией сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$, запасается водотоком перед сооружением, перед которым возникает подпор. При этом перед сооружением должно установиться спокойное течение, даже и в том случае, если имеем дело с водотоком, который при отсутствии сооружения на рассматриваемом участке имел бы бурное течение. За сооружением водоток расходует ту часть энергии, которая ему была необходима дополнительно для прохождения через наиболее стесненное сечение сооружения и которая ему уже не нужна для движения на участке за сооружением. Возможно быстрое расходование энергии осуществляется здесь благодаря тому, что даже в спокойных водотоках устанавливается бурное течение и затем прыжок — отогнанный или затопленный. В бурных водотоках

за сооружением устанавливается кривая подпора в зоне c , конечно, без образования прыжка.

Переходим к доказательству первого положения. Если спокойный водоток имел достаточно энергии для протекания через сооружение, то за сооружением ему не придется переходить в бурное состояние, чтобы расходовать какую-либо излишнюю энергию, и поэтому течение за сооружением может быть спокойным.



Черт. 39

Предположим, что до устройства сооружения на участке, находящемся непосредственно за сооружением, имелись указанная на черт. 39 кривая поверхность воды $A'B'$ и прочие, указанные там же, условия движения. Покажем, что вода не может выйти из сооружения ни с большей, ни с меньшей, чем h_n ², глубиной. Доказательство лучше всего вести от противного. Допустим, что водоток вышел из сооружения с глубиной h большей, чем h_n , и, конечно, большей, чем h_k . Большей глубине h будет соответствовать большая удельная энергия сечения \mathcal{E} ,

¹ Если в сооружении имеется целый участок призматической формы с наиболее сжатым сечением, то при уклоне дна на этом участке, меньшем критического, критическая глубина устанавливается в конце стесненного участка; при уклоне же дна на этом участке, большем критического, критическая глубина устанавливается в начале стесненного участка. То, что h_{k1} и $\mathcal{E}_{\min 1}$ не могут установиться в каком-либо промежуточном сечении стесненного призматического участка, легко доказывается от противного. В конце стесненного участка со спокойным течением h_{k1} и $\mathcal{E}_{\min 1}$ могут установиться, так как в расширяющемся водотоке h_{k1} и $\mathcal{E}_{\min 1}$ уменьшаются.

Точно так же на бурном стесненном участке h_{k1} и $\mathcal{E}_{\min 1}$ могут установиться в его начале, так как за сечением с h_{k1} градиент энергии должен быть больше, чем дно (глубина за этим сечением будет хотя и меньше критической, но больше нормальной).

² Тут h_n не означает обязательно нормальной глубины, а ту глубину, которая была бы в рассматриваемом месте при отсутствии сооружения.

причем соответствующий градиент энергии $C"D"$ шел бы положе чем градиент энергии $A"B"$. Но это означало бы, что линия $C"D"$ вниз по течению удалялась бы от вполне возможного градиента $A"B"$, т. е. площадь между линией энергии и дном не была бы возможно малой; этого же не может быть.

Если допустим, что вода выйдет из сооружения с глубиной меньшей, чем h_n , то пришлось бы согласиться, что соответствующий градиент энергии пойдет круче, чем линия $A"B"$, и расположится под нею. А это означало бы в свою очередь, что указанный градиент энергии, приближаясь ко дну, пересекал бы линию EF и за точкой пересечения водоток должен был бы течь с энергией меньшей, чем \mathcal{E}_{\min} ; этого, конечно, тоже случиться не может.

Аналогично можно было бы далее вывести из основного принципа, что влияние сооружения на бурное течение не может простирается вверх от сооружения против течения, но приводить здесь этот вывод не будем.

Что касается второго положения, то в нем, пожалуй, нуждается в доказательстве только та часть, где утверждается, что за сооружением из двух возможных глубин устанавливается обязательно глубина меньшая, чем критическая; это легко доказывается таким рассуждением: водоток, запасши перед сооружением некоторое количество энергии, за сооружением должен эту запасенную энергию возможно скорее истратить, чтобы снизить градиент энергии до нормального, а для этого и должна установиться возможно малая глубина и одновременно возможно большая скорость, при которой излишняя энергия теряется как можно скорее.

Положение о том, что в водотоке с установившимся спокойным течением влияние сооружения не распространяется вниз по течению, строго говоря, верно (и это надо подчеркнуть) только при указанном уже выше условии, что движение—медленно изменяющееся¹.

Что касается первого положения, то заметим, что его обосновывают обычно² тем обстоятельством, что волны перемещения в открытых водотоках на участках с бурным течением могут распространяться только вниз по течению, а на участках со спокойным течением как вверх против течения, так и вниз по течению. Такое обоснование нельзя не признать чересчур искусственным, так как выводы относительно неустановившегося движения переносят на движение установившееся. Неправильность такого переноса немедленно же обнаруживается, так как довольно хорошо известно, что влияние сооружений и пр. в спокойных течениях вниз от них не распространяется, а волны перемещения в том же направлении, как уже указывалось, рас-

¹ Относительно резких изменений сечения струи и пр. см. гл V настоящей работы.

² См., например, цитированную уже работу: P. B ö s s , Berechnung der Wasserspiegellage, 1927, стр. 5.

пространяются. Поэтому, воспользовавшись указанным доказательством, приходится затем немедленно же доказывать, что оно в отношении влияния сооружений вниз по течению в спокойных течениях не годится.

При помощи полученных двух частных положений, а также и общего положения о возможно малой площади между линией энергии и дном водотока в гл. II, III и IV будут исследованы формы поверхности воды в различных случаях установления неравномерного медленно изменяющегося движения жидкости в открытых руслах и сооружениях. Чтобы можно было проверить правильность этих исследований, а также правильность доказательств полученных в настоящем параграфе частных положений и вместе с тем общего положения о возможно малой площади между линией энергии и дном при помощи закона рассеяния энергии, в соответствующих местах гл. II и отчасти следующих глав после теоретических исследований будут сделаны ссылки на некоторые известные эмпирические факты, а также будут приведены для сравнения результаты опытов по исследованию поверхностей воды в некоторых случаях установления неравномерного движения. При желании результаты этих опытов можно рассматривать просто, как опытное обоснование изложенных положений и прежде всего положения о возможно малой площади между линией энергии и дном водотока.

ГЛАВА 11

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ СТЕСНЕНИЯХ И РАСШИРЕНИЯХ РУСЛА С ПЛАВНЫМИ ПЕРЕХОДНЫМИ УЧАСТКАМИ

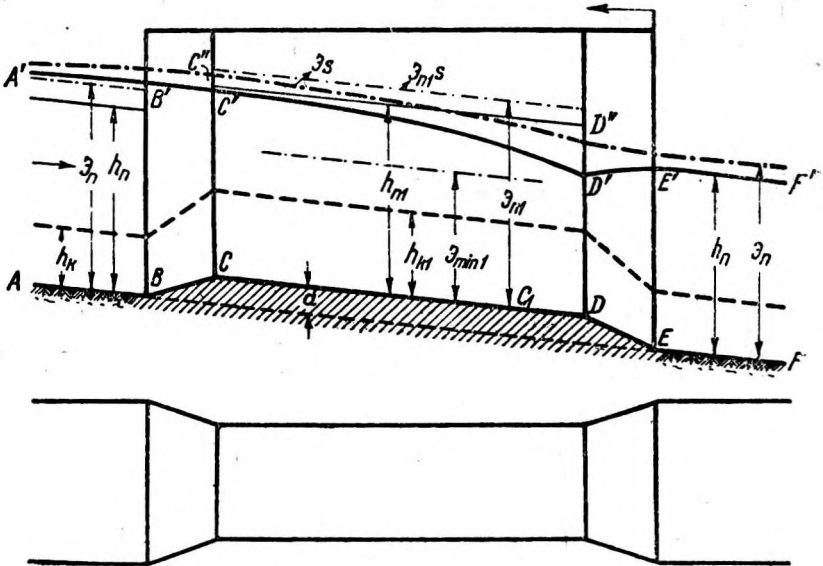
§ 10. Стеснения русла водотоков на некоторой длине с плавными переходными участками

Стеснения русел получаются при возведении тех или иных сооружений или же они могут быть естественного происхождения. Переходы от нестесненных участков к стесненным могут быть плавные или резкие; пока ограничимся изучением движения жидкости в руслах с плавными переходными участками между нестесненными и стесненными участками. Стесненные участки могут быть достаточно длинными (например, стеснения какими-либо продольными дамбами) или короткими (например, мостовыми устоями и быками); разница между теми и другими в отношении гидравлических расчетов будет затронута дальше. Несколько различаются гидравлические расчеты в случае стеснения русла с боков и в случае стеснения снизу. Более общим является случай стеснения русла одновременно и с боков и снизу. Кроме того, необходимо рассмотреть переход от русла определенного поперечного сечения к руслу меньшего поперечного сечения (например, при уменьшении ширины или подъеме дна).

Несомненный интерес представляют также стеснения течения водотока сверху; при этом имеется в виду стеснение не по всей ширине, так как в противном случае мы уже получили бы движение не в открытом водотоке. Примерами таких стеснений могут быть мосты плашкоутные, понтонные, стоящее на водотоке судно и т. п.

Переходные участки между стесненными и нестесненными, частями русла будем пока принимать сравнительно короткими.

Прежде всего рассмотрим движение в случае стеснения русла сразу и снизу и с боков на участке значительной длины.

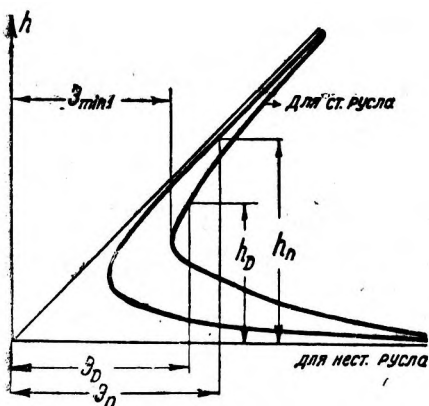


Черт. 40

Шероховатость стенок и дна вдоль всего водотока будем считать тут (и дальше в этом параграфе) одинаковой. Уклон дна на участках с призматическим руслом считаем постоянным и одинаковым (участки AB , CD и EF на черт. 40). Иные уклоны имеем при стеснении водотока снизу на переходных участках BC и DE .

Рассмотрим сначала стеснение спокойного водотока. При рассмотрении задач очень полезно прежде всего вычертить для участков, где это возможно, линию поверхности равномерного движения, находящуюся от дна на расстоянии нормальных глубин h_n или h_{n1} ; далее полезно вычертить линию критических глубин (штриховая линия), находящуюся от дна на расстоянии, равном критической глубине в каждом сечении (h_k и h_{k1}). Следует также определить удельные энергии сечения: \mathcal{E}_n для равномерного движения (вернее, в сечении E для движения жидкости, которое имело бы место при отсутствии стеснения) и \mathcal{E}_{min1} для стесненного участка CD . Если \mathcal{E}_n равно или прево-

сходит сумму $\mathcal{E}_{\min 1} + a$ на некоторую величину, как это представлено на черт. 40, то поток в стесненной части русла во всяком случае не может принять удельной энергии сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$, так как ему тогда нехватит бы энергии для движения на участке EF ; с другой стороны, поток перед сечением D не станет увеличивать перед сооружением свою удельную энергию сечения до величины большей, чем это нужно для прохождения через стеснение и для дальнейшего движения на участке EF без необходимости расходовать на этом участке излишнюю энергию; но в таком случае течение на участке EF может быть только спокойное. Отсюда делаем заключение, что влияние стеснения вниз от сечения E не может иметь места (см. предыдущий параграф) и, следовательно, построение кривой поверхности



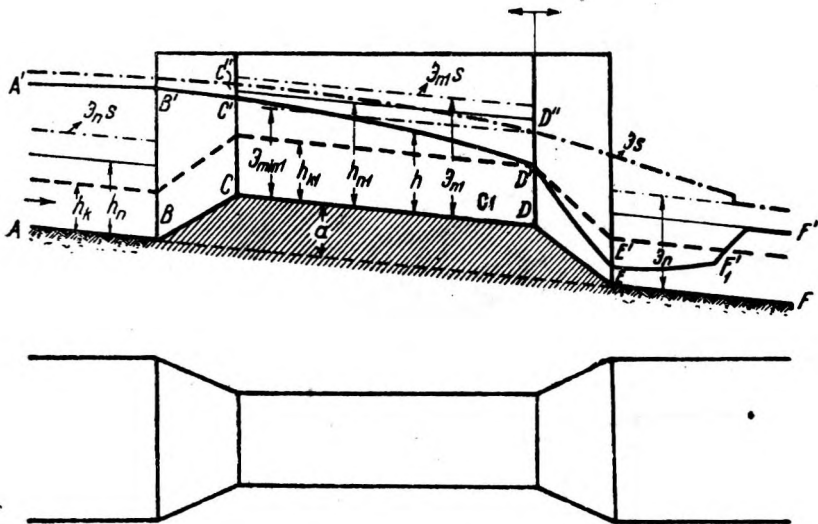
Черт. 41

можно начинать именно от этого сечения E^1 вверх против течения; начиная с глубины h_n на непризматическом, вообще говоря, участке, построение кривой $E'D'$ нужно вести путем приближенного интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых руслах. Найдя точку D' , можем строить кривую спада $C'D'$ по способу Б. А. Бахметева, Н. Н. Павловского или другому, применяя при аналитических способах таблицы; заметим, что кривая спада $C'D'$ должна располагаться ниже линии поверхности равномерного движения $C''D''$. На участке BC , на котором опять имеем непризматическое русло, придется опять воспользоваться каким-либо приближенным способом интегрирования. Наконец, от точки B' строим кривую подпора, снова пользуясь таблицами. Полезно будет выяснять еще, почему в конце участка CD и на участке DE может иметь место понижение уровня сравнительно с уровнем $E'F'$ за стесненным участком. Для этого построим (черт. 41) два графика $\mathcal{E}h$ на общих осях — для нестесненного русла и для стесненного русла в сечении D . На первом графике нанесена удельная энергия сечения \mathcal{E}_n и соответствующая ей глубина h_n ; для второго графика — удельная энергия сечения \mathcal{E}_D и соответствующая глубина h_D в сечении D . Заметим, что \mathcal{E}_n превышает \mathcal{E}_D больше, чем на высоту a , так как линия энергии на участке DE идет несколько круче, чем на участке EF с равномерным движением. На рассмотренном черт. 41 чрезвычайно

¹ Такие исходные при построении кривых поверхностей воды сечения будут в дальнейшем, так же, как и здесь, отмечаться стрелочкой, показывающей, кроме того, и направление построения.

ясно и просто изображается взаимозависимость изменений различных гидравлических элементов водотока. Еще проще для водотока прямоугольного сечения эта взаимозависимость может быть исследована на номограмме $\mathcal{E}qh$ (черт. 6).

Выше указывалось, что приведенное исследование и построение кривой поверхности водотока со стесненным участком может быть применено при условии, что \mathcal{E}_n (черт. 40) больше или равно сумме $\mathcal{E}_{\min 1} + a$; теперь это условие можно будет несколько уточнить. Но прежде заметим, что на стесненном участке CD с уклоном дна $i < i_k$ критическая глубина h_{k1} (и вместе с ней $\mathcal{E}_{\min 1}$)



Черт. 42

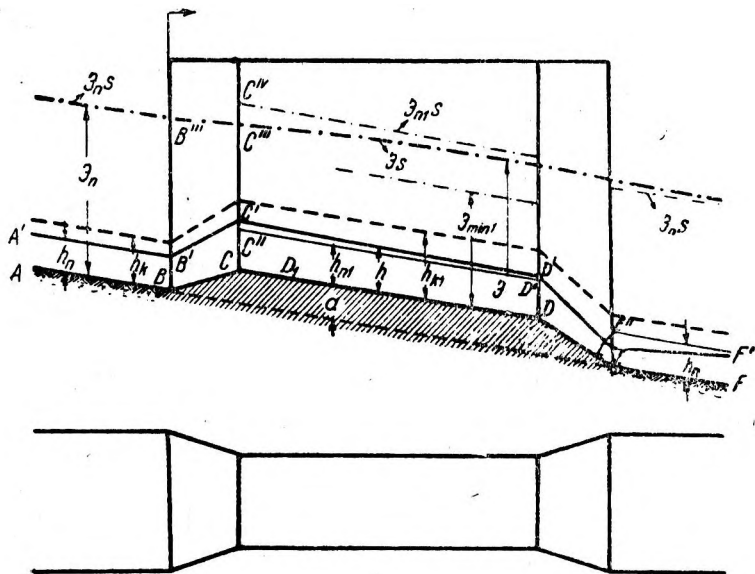
может установиться, как уже отмечалось выше, только в сечении D и ни в коем случае перед этим сечением, а также за этим сечением на участке DE . Предположим теперь, что \mathcal{E}_n не намного меньше, чем $\mathcal{E}_{\min 1} + a$; если при этом условии мы все-таки начнем построение кривой поверхности на участке DE (черт. 40) от точки E' , то может случиться, что поверхность $E'D'$ не пересечет линии критических глубин и в сечении D глубина получится большая или в крайнем случае равная h_{k1} ; это означает одновременно, что удельная энергия сечения нигде на участке DE не достигнет значения \mathcal{E}_{\min}^1 .

Объясняется это обстоятельство тем, что градиент \mathcal{E}_s на рассматриваемом участке идет круче, чем на участке EF , как об этом уже упоминалось.

Предположим, что стеснение водотока со спокойным течением настолько значительно, что сумма $\mathcal{E}_{\min 1} + a$ более или менее значительно превосходит \mathcal{E}_n (черт. 42). В этом случае на

¹ Отметим, что и \mathcal{E}_{\min} и критическая глубина на участке DE — величины переменные.

стесненном участке может установиться, а значит, обязательно установится $\mathcal{E}_{\min 1}$ и соответствующая ему глубина h_{k1} ; при этом, как уже указывалось, глубина (и вместе с тем $\mathcal{E}_{\min 1}$) установится только в конце стесненного участка около сечения D . Начиная от этого сечения, строим кривые поверхностей как вверх против течения на участке CD , так и вниз по течению на участке DE . Кривую $C'D'$ строим как кривую спада, пользуясь соответствующими таблицами; кривая $C'D'$ при значительной длине участка CD очень близко подходит к линии $C''D''$, представляющей поверхность воды для равномерного движения на рассматриваемом

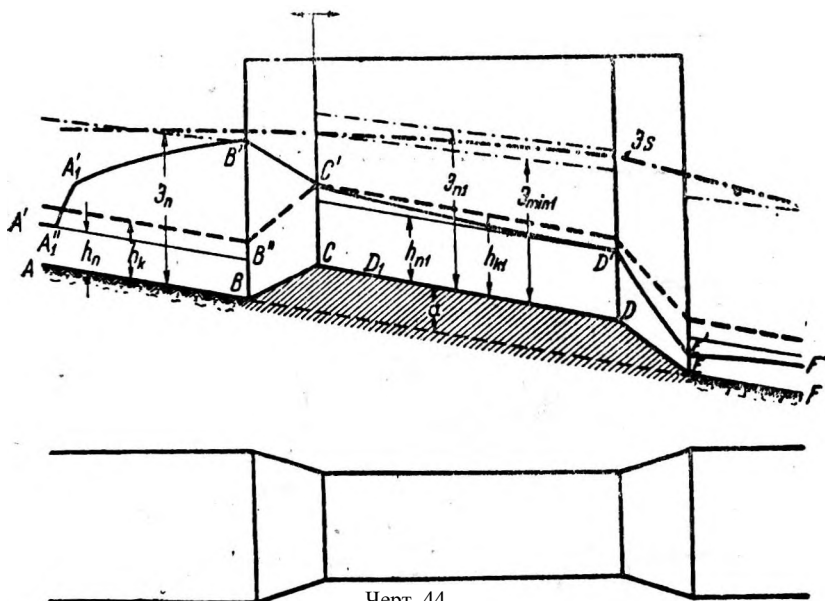


Черт. 43

участке. От точки C' до точки B' строим кривую способом приближенного интегрирования, а от точки B' вверх против течения строим с помощью таблиц обычную кривую подпора в зоне a спокойного водотока. От точки E' строим кривую подпора $E'F'$ и определяем место гидравлического прыжка.

Перейдем теперь к изучению движения воды на стесненных и снизу и с боков участках бурных водотоков. Сначала рассмотрим и здесь случай, когда $\mathcal{E}_n \geq \mathcal{E}_{\min 1} + a$ (черт. 43). Нетрудно убедиться, что, например, для широкого русла прямоугольного сечения при условиях, принятых в настоящем параграфе, будем иметь $\mathcal{E}_{n1} > \mathcal{E}_n$. Так как в рассматриваемом случае влияние стеснения не может распространяться против течения от сечения B , то построение кривой поверхности воды нужно производить от этого сечения вниз по течению. На участке BC дно поднимается, поэтому удельная энергия сечения уменьшается. При бурном течении этому соответствует настолько значительное увеличение глубины, что скорость уменьшается и линия

энергии $B'''C'''$ идет на рассматриваемом участке положе, чем на участке AB с равномерным течением. Однако точка C''' обязательно должна располагаться ниже точки C^V , а точка C' должна поэтому располагаться выше C'' . Следовательно, на участке CD получим кривую спада CD' . На участке DE строим приближенным способом кривую $D'E'$. Точка E' расположится ниже E'' , так как глубина здесь будет несколько меньше нормальной для нестесненного участка. Это будет иметь место потому, что на стесненном участке при бурном течении скорости и вследствие этого и потери меньше, чем на нестесненном

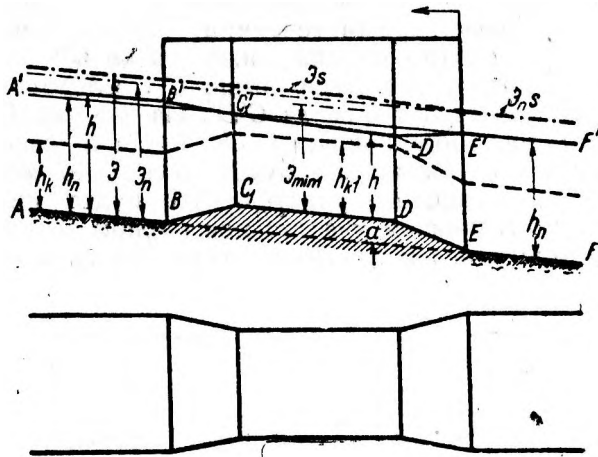


Черт. 44

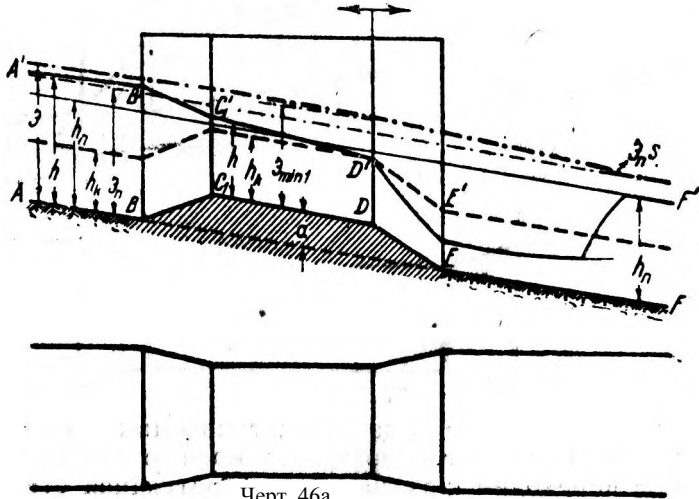
участке, а местных потерь на рассматриваемых участках нет. За сооружением уже легко построить кривую подпора $E'F'$.

Дальше переходим к рассмотрению протекания стесненного снизу и с боков участка на бурном водотоке при условии, что $\mathcal{E}_{\min 1} + a \geq \mathcal{E}_n$ (черт. 44). В этом случае на стесненном участке должна установиться удельная энергия сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$ и соответствующая ей критическая глубина h_{kl} . Однако h_{kl} и $\mathcal{E}_{\min 1}$ установятся только в сечении C , что уже было доказано раньше.

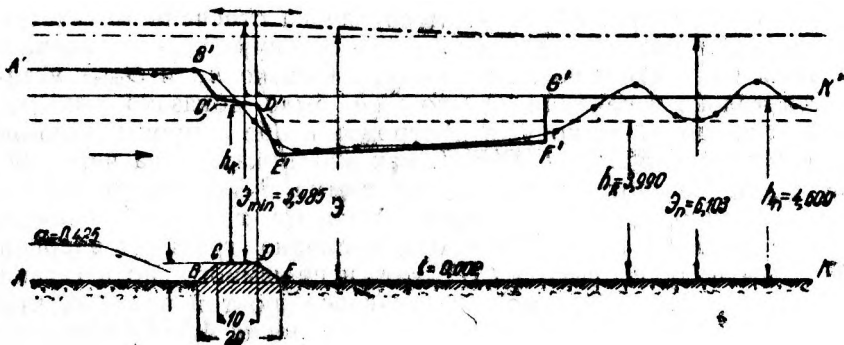
От сечения C легко уже построить в обе стороны кривые поверхностей $C'B'A'$ и $C'D'E'F'$, как это показано на черт. 44. Если \mathcal{E}_n не намного меньше, чем сумма $\mathcal{E}_{\min 1} + a$, то может случиться, что, начавши строить вниз от точки B' кривую поверхности $B'C'$ (черт. 43) и одновременно градиент энергии $B'''C'''$, мы получим высоту CC''' хоть и не намного, но все-таки больше, чем $\mathcal{E}_{\min 1}$. Это может случиться по той причине, что линия $B'''C'''$ идет несколько положе, чем линия $ABEF$ благодаря уменьшению скорости, а вместе с тем и потерь на трение на участке BC . В этом случае, понятно, картина движения будет



Черт. 45

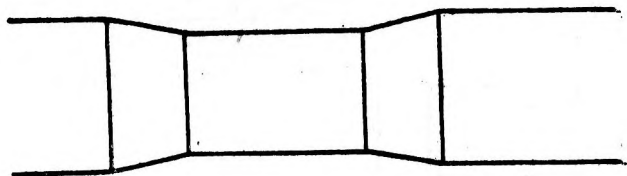
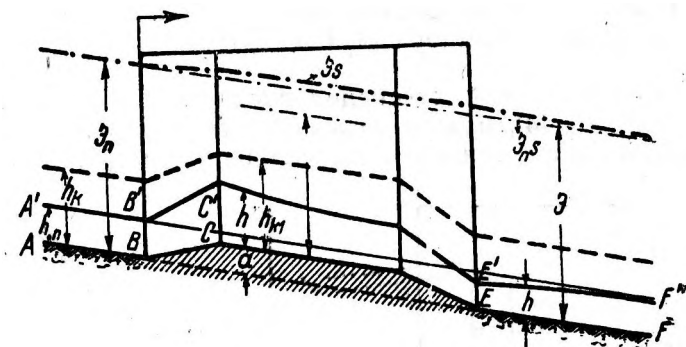


Черт. 46a

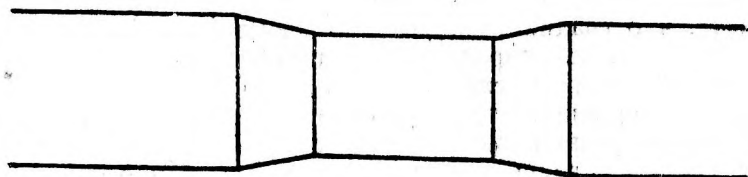
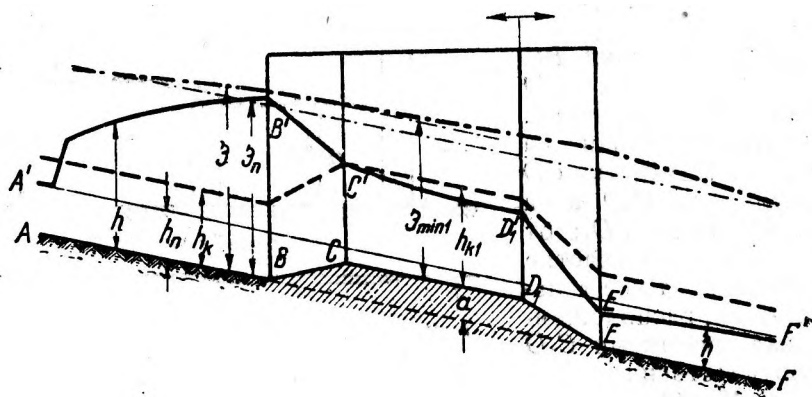


Черт. 466

Размеры в метрах



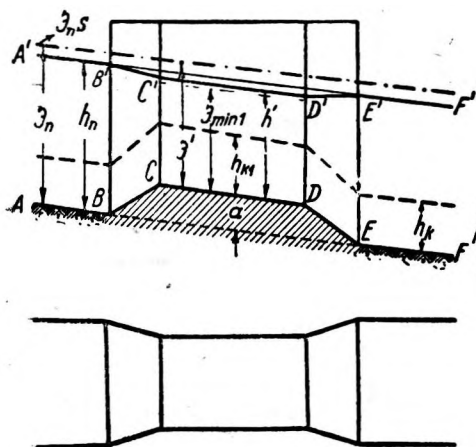
Черт. 47



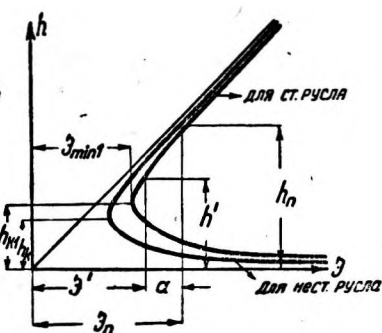
Черт. 48

соответствовать не черт. 44, а 43; однако точка C' расположится весьма близко к линии критических глубин, несколько ниже последней. Кривой подпора $A'B'$ (черт. 44), очевидно, не получится.

Рассмотрев случай стеснения русла на длинных участках (черт. 40, 42, 43, 44), можем ограничиться только небольшими замечаниями относительно сооружений, у которых не только



Черт. 49а



Черт. 49б

переходные участки BC и DE , но и участки CD сравнительно короткие.

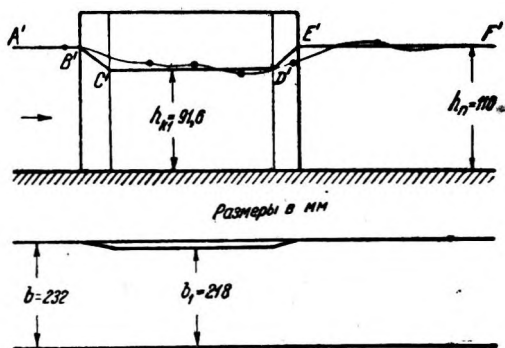
При этом условии на черт. 40 и 42 участки CD сожмутся до C_1D , а на черт. 43, 44 до CD_1 ; от кривых спада на участке CD останутся тоже только части их, расположенные над участками C_1D и соответственно CD_1 .

На черт. 45—48 показаны соответствующие кривые

поверхностей воды. В случае коротких сооружений часто можно принимать, что градиент энергии во всем сооружении представляет прямую, параллельную линии дна водотока в естественном состоянии последнего (до устройства сооружения).

При этом допущении построение кривой свободной поверхности в сооружении чрезвычайно упрощается.

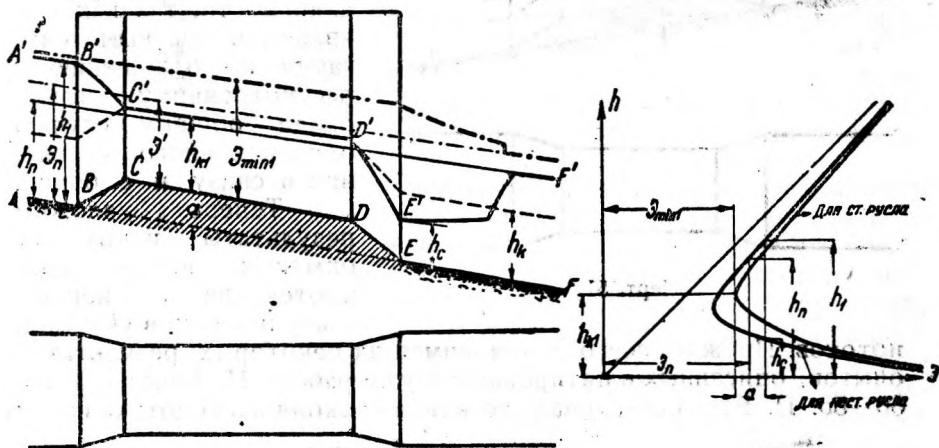
Рассмотрим и здесь сначала стеснение спокойного водотока и снизу и с боков. Предположим что $\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_{min1} + a$ или иначе $\mathcal{E}' > \mathcal{E}_{min1}$ (черт. 49). Построив графики $\mathcal{E}h$ для нестесненного



Черт. 49в

и стесненного участков, легко найдем глубину на сжатом участке h' . Для этого на черт. 49б откладываем по оси абсцисс величину $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_n - a$ и сразу же находим h' ; отложив эту глубину на черт. 49а, вычерчиваем и весь продольный профиль поверхности воды $B'C'D'E'$.

В том случае, когда $\mathcal{E}_{\min 1} + a > \mathcal{E}_n$ (черт. 50), на всем участке CD будем иметь движение с $\mathcal{E}_{\min 1}$ в соответствии с общим принципом течения жидкостей в открытых потоках. Но при удельной энергии сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$ будем иметь на всем стесненном участке CD глубину h_{k1} . В сечении B удельная энергия



Черт. 50а

Черт. 50б

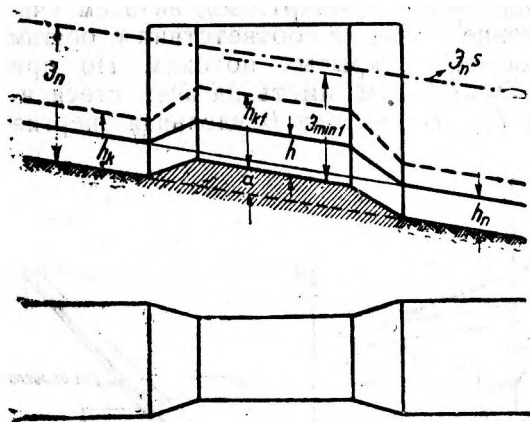
сечения будет равна $\mathcal{E}_{\min 1} + a$. Такой энергии соответствуют по графику $\mathcal{E}h$ для нестесненного водотока (черт. 50б) две глубины h_1 и h_c . Глубина h_1 , большая, чем нормальная глубина h_n , очевидно, должна установиться в сечении B , так как водоток перед сооружением должен увеличить на определенное количество свою удельную энергию сечения, а именно на $\mathcal{E}_{\min 1} + a - \mathcal{E}_n$. За сооружением водоток должен истратить возможно скорее это же количество энергии. Поэтому в сечении E должна установиться глубина h_c , удовлетворяющая условию $h_c < h_k < h_n$. Окончательный вид продольного профиля представлен на черт. 50а.

Аналогичные построения поверхностей бурного водотока при стеснении его и снизу и с боков (при том же условии, что градиент энергии в сооружении будет параллелен дну водотока до того, как на нем построено стесняющее сооружение) можно видеть на черт. 51, когда $\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_{\min 1} + a$, и на черт. 52 в случае, когда $\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_{\min 1} + a$.

Построения поверхностей воды, показанные на черт. 49—52, особенно упрощаются в случае прямоугольного сечения русла

как на нестесненных, так и на стесненном участках. При этом условии можно вместо построения графиков $\mathcal{E}h$ воспользоваться номограммой $\mathcal{E}qk$ (черт. 6).

В настоящем параграфе рассмотрены поверхности воды при стеснении водотоков одновременно и снизу и с боков. Однако

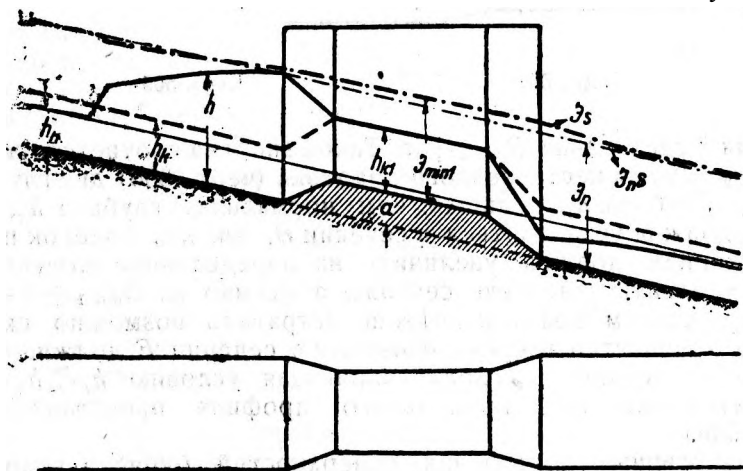


Черт. 51

на практике часто встречаются стеснения водотока или только снизу или только с боков¹. Подробно останавливаться на этих случаях нет надобности, так как они являются частными случаями по отношению к рассмотренному выше более общему случаю одновременного стеснения и снизу и с боков.

Теперь изложим результаты некоторых опытных исследований протекания стесненных

снизу и с боков участков потоков. Прежде всего остановимся на некоторых результатах опытов, описанных в цитированной уже работе П. Бёсса на стр. 50—55. П. Бёсс исследовал стеснения спокойного водотока снизу



Черт. 52

на участке BE (черт. 466). Кривая поверхности воды, полученная из опыта, изображена тонкой линией, проведенной через черные

¹ Стеснения снизу потоков прямоугольного сечения весьма подробно рассмотрены в цитированной работе Р. В ö s s'а.

кружочки; последние и представляют точки, полученные из опыта на модели в лаборатории. Ломаная же линия $AB'C'D'E'F'G'K'$ представляет поверхность воды, построенную в соответствии с изложенной выше теорией для водотока прямоугольного сечения шириной $b = 40$ м с расходом $Q = 550$ м³/сек; коэффициент шероховатости по Гангилье-Куттеру для построения кривой поверхности П. Бёсс определил при помощи предварительного опыта, из которого получилось $n = 0,0202$.

Как видим из чертежа, теоретически вычисленная и найденная из опыта кривые поверхностей в общем очень близки. Отклонения их друг от друга объясняются преимущественно волнообразной формой поверхности, полученной из эксперимента, в особенности же тем, что гидравлический прыжок (участок GK) получился волнообразным. Кроме того, критическая глубина на опытной кривой получилась не в конце участка CD , а раньше; аналогичный факт для водослива с широким порогом давно хорошо известен.

В работе П. Бёсса описаны результаты еще трех опытов над стеснениями водотоков снизу: один для русла прямоугольного сечения и два для русел трапециoidalного сечения. И для этих опытов поверхности воды, найденные из опытов и определенные при помощи вычислений, оказываются весьма близкими.

Рассмотрим теперь результаты одного из опытов над стеснением сбосу спокойного водотока с живым сечением прямоугольной формы. Этот опыт был произведен автором в гидравлической лаборатории Киевского гидромелиоративного института в лотке (черт. 49в) шириной $b = 232$ мм; расход воды в лотке во время опыта $Q = 18$ л/сек; ширина на стесненном участке лотка была $b_1 = 218$ мм; длина призматической стесненной части лотка 360 мм, а вместе с переходными участками 467 мм. Расход на единицу ширины на стесненном участке

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{0,018}{0,218} = 0,0825 \text{ м}^3/\text{м сек.}$$

Критическая глубина и удельная энергия сечения на том же участке

$$h_{k1} = \sqrt[3]{\alpha \frac{q_1^2}{g}} = \sqrt[3]{1,1 \frac{0,0825^2}{g}} = 0,0916 \text{ м};$$

$$\mathcal{E}_{\min 1} = \frac{3}{2} h_{k1} = \frac{3}{2} \cdot 0,0916 = 0,1374 \text{ м.}$$

Изменяя глубину потока в лотке h_n при выходе из стесненного участка, удавалось получить для этой глубины значение 110 мм. Скорость, соответствующая этой глубине,

$$v_n = \frac{0,018}{0,232 \cdot 0,11} = 0,703 \text{ м/сек.}$$

Удельная энергия сечения \mathcal{E}_n при выходе из сооружения

$$\mathcal{E}_n = h_n + \alpha \frac{v_n^2}{2g} = 0,11 + 1,1 \frac{0,703^2}{2g} = 0,1376 \text{ м.}$$

Таким образом получается

$$\mathcal{E}_{\min 1} \approx \mathcal{E}_n.$$

При таком соотношении удельных энергий сечения на стесненном участке должно получиться понижение уровня $B'C'D'E'$ (черт. 49в). Полученная из опыта поверхность воды на стесненном участке и за ним имела волнообразный вид, но в общем довольно близко подходила к теоретически построенной; опытная кривая поверхности проведена через черные кружочки, изображающие точки, полученные из опыта. Особенно важным в этом опыте в отношении опытного подтверждения правильности теоретических выводов является следующее обстоятельство. Если уменьшить хоть немного глубину h_n , а вместе с ней и \mathcal{E}_n , то при том же расходе, а значит, и неизменном $\mathcal{E}_{\min 1}$ мы получим уже

$$\mathcal{E}_{\min 1} > \mathcal{E}_n.$$

При этом нужно ожидать за стеснением уменьшения глубины, кривой подпора c_1 и образования прыжка; опыт полностью подтвердил только что сказанное.

Наоборот, при увеличении h_n и \mathcal{E}_n при том же расходе понижение уровня на стесненном участке уменьшается в полном соответствии с теоретическими соображениями.

В упоминавшейся гидравлической лаборатории Киевского гидромелиоративного института было произведено сотрудниками лаборатории и студентами большое количество опытов по стеснению спокойных и бурных водотоков снизу и с боков, и все они в общем подтверждали изложенные в этой работе теоретические положения. К такому же результату можно прийти, рассмотрев опыты, описанные в цитированной уже книге А. Koch-M, Carstanjen, *Über die Bewegung des Wassers*¹...

В заключение необходимо еще раз подчеркнуть, что в литературе, в том числе в учебной, по вопросу о влиянии стеснений снизу и с боков, на водотоки встречаются довольно часто неправильные мнения. Здесь приведем пример неправильных взглядов на стеснения бурных водотоков из книги проф. А. Н. Ахутина "Специальный курс гидравлики", 1935 г., стр. 108. Тут в начале § 85 сказано: «Преграда (препятствие, затвор и пр.) в каналах (лотках) крутого уклона вызывающая потерю энергии, сопровождается повышением глубины. Это ясно видно из рассмотрения кривой удельной энергии², так как потеря энергии в нижней ветви этой кривой ($h < h_k$) вызывает повышение глубины». Указание на потери энергии нельзя признать тут правильным. Как видно из черт. 43 и 44, повышение уровня на стесненном участке или соответственно прыжок перед таким участком будут иметь место и в том случае,

¹ К сожалению, в русском переводе этой книги выпущена часть ее, в которой были описаны указанные опыты.

² В настоящей книге см. график $\mathcal{E}h$, например, на черт. 3.

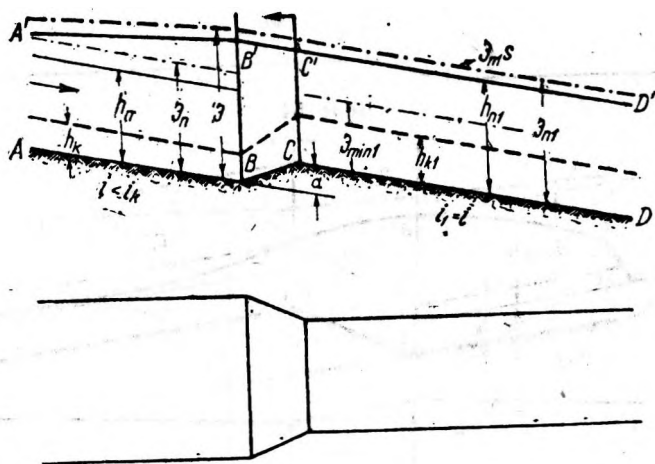
когда потери энергии в сооружениях будут даже меньше, чем при равномерном движении.

Приведем еще мнение проф. М. Д. Чертоусова¹: "Представим себе, например, что живое сечение потока стеснено устоями моста. Для того чтобы это уменьшенное сечение потока смогло пропустить заданный расход, средняя скорость в пределах сооружения должна возрасти, что в свою очередь должно потребовать образования некоторого перепада перед мостом".

Из изложенного в настоящем параграфе ясно, что мнение проф. М. Д. Чертоусова является правильным только в отношении спокойных водотоков.

§ 11. Плавные переходы к руслам с меньшей шириной и с более высоко расположенным дном

Будем рассматривать только случай, когда уклоны дна i и i_1 (черт. 53 — 55) на призматических участках AB и CD одинаковы, а шероховатость одна и та же по всей длине $ABCD$.

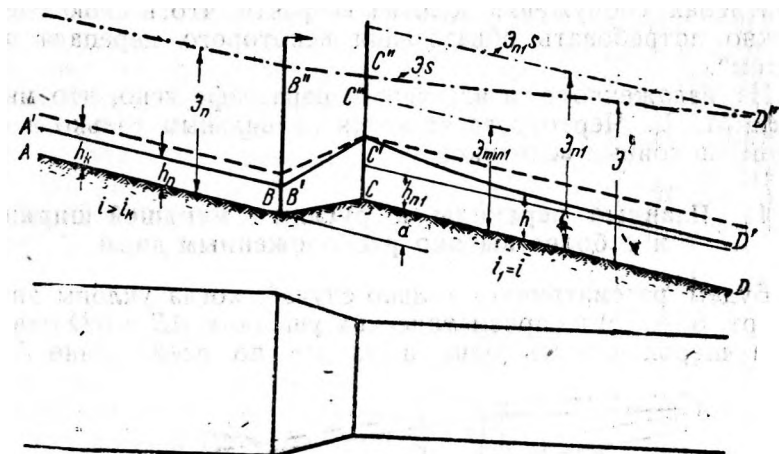


Черт. 53

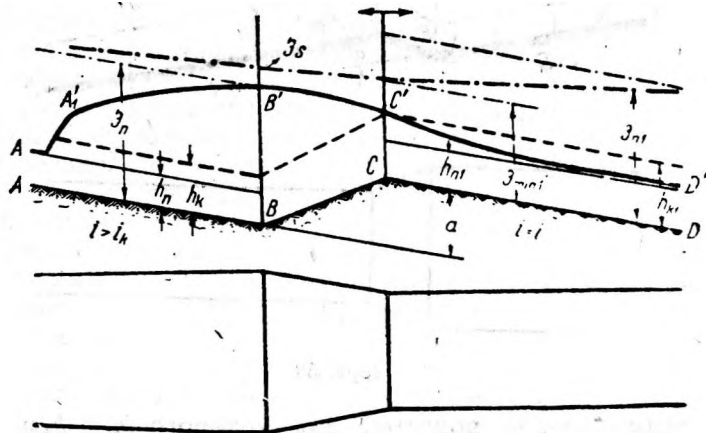
Рассмотрим сначала водоток, для которого $h_n > h_k$ и $h_{n1} > h_{k1}$ (черт. 53). Далее предполагается, что на участке BC нет условий для образования кривой спада. Ясно, что при таких условиях в водотоке за сечением C бурное течение и малая глубина установиться не может, так как излишней для дальнейшего течения энергии у водотока во всяком случае не может быть. Но если за сечением C будем иметь спокойное течение, то влияние непризматического участка BC вниз от C не может ощущаться. Поэтому построение профиля $A'B'C$ нужно произвести от точки C' .

¹ Проф. М. Д. Чертоусов, Специальный курс гидравлики, 1937, стр. 24.

Если при приближительных расчетах принять, что градиент энергии на участке BC представляет прямую линию, являющуюся продолжением (без излома) градиента энергии на участке CD , то можно сразу же найти величину удельной энергии сечения в сечении B , а именно $\mathcal{E}_B = \mathcal{E}_{n1} + a$. По величине \mathcal{E}_B при помощи графика $\mathcal{E}h$ для сечения водотока на участке AB или



Черт. 54



Черт. 55

при помощи номограммы $\mathcal{E}gh$ (черт. 6) можно легко найти глубину BB' и от точки B' строить кривую подпора.

Перейдем теперь к рассмотрению аналогичной задачи о плавном переходе к более узкому руслу с одновременно приподнятым дном для бурного водотока (черт. 54, 55). Тут нужно рассмотреть отдельно два случая.

а) удельная энергия сечения \mathcal{E}_n равна или больше суммы $\mathcal{E}_{\min 1} + a$ (черт. 54).

В этом случае водоток перед сужением русла не будет увеличивать своей удельной энергии сечения; поэтому построение кривой поверхности воды можно начать от точки B' вниз по течению до точки C' и дальше на участке CD . На участке BC потери на трение на единицу длины могут быть несколько меньше чем на участке AB ; поэтому даже если \mathcal{E}_n немного меньше, чем сумма $\mathcal{E}_{\min 1} + a$, градиент энергии $B''C''$ может все-таки притти в сечение C выше точки C''' , так что глубина CC' будет меньше критической. И в этом случае построение можно вести от точки B' . Если точка C'' при построении градиента энергии получилась бы ниже точки C''' , то будем иметь уже второй случай, к рассмотрению которого и переходим.

б) удельная энергия сечения \mathcal{E}_n ощутительно меньше суммы $\mathcal{E}_{\min 1} + a$ (черт. 55). При этом условии водоток должен запастись столько энергии, чтобы в сечении C могла установиться критическая глубина h_{k1} и соответствующая ей удельная энергия сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$. Что тут должна установиться $\mathcal{E}_{\min 1}$, это доказывается настолько просто, что приводить доказательство нет надобности. От точки C' в обе стороны строим кривые спада CD' и $B'C$ и дальше кривую подпора A_1B' до места образования прыжка.

Сравнивая черт. 53 и 54, интересно отметить, что в случае спокойного водотока перед участком BC образуется кривая подпора и водоток тут увеличивает свою удельную энергию сечения, хотя $\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_{\min 1} + a$, а для бурного водотока в аналогичном случае на участке AB влияние стеснения русла не чувствуется. Объясняется это обстоятельство тем, что если бы в сечении C установилась глубина и удельная энергия меньшие, чем h_{n1} и \mathcal{E}_{n1} (черт. 53), то градиент энергии должен был бы снижаться круче, чем \mathcal{E}_{n1} , и на некотором расстоянии от сечения C он должен был бы достигнуть значения меньшего, чем $\mathcal{E}_{\min 1}$; это конечно, не может иметь места при весьма длинном участке CD с постоянным уклоном. В случае бурного водотока удельной энергии сечения меньшей, чем нормальная, соответствует глубина, большая нормальной; например, удельной энергии сечения C C'' (черт. 54) соответствует глубина C C' большая, чем h_{n1} . Поэтому на участке CD градиент энергии не только не будет приближаться к $\mathcal{E}_{\min 1}$, а, наоборот, удаляясь от этого значения, он будет довольно быстро приближаться к \mathcal{E}_{n1} .

Такие случаи, когда русло становится уже, но без подъема дна или, наоборот, имеется только подъем дна, но без сужения боков, не нуждаются в особом рассмотрении, так как они являются только частными случаями рассмотренной в настоящем параграфе более общей задачи.

§ 12. Стеснения водотоков сверху на части ширины их

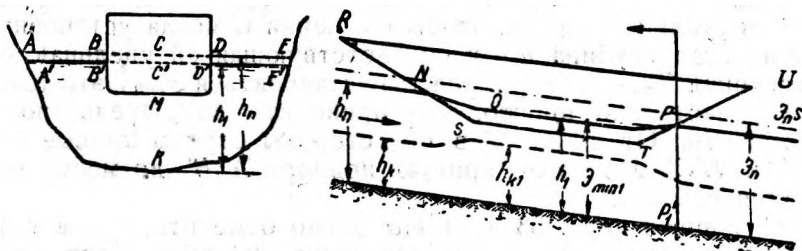
Рассмотрим теперь движение жидкости на участке водотока, стесненного сверху на части его ширины (черт. 56); будем предполагать, что длина стесненного участка невелика и переходы

от стесненного участка к нестесненным достаточно плавны. Обозначим площадь живого сечения водотока на нестесненном участке $ABCDEK$ буквой Ω , а площадь живого сечения на стесненном участке $A'B'M'D'E'K$ буквой ω . Тогда, как и в других

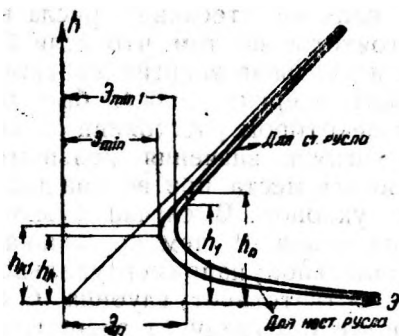
случаях, $\mathcal{E} = h + \frac{Q^2}{2g\omega^2}$, а критические глубины h_k и h_{k1} определяются из уравнений:

$$\frac{Q^2}{g\omega^3} = \frac{\Omega^3}{B_k^3} \quad \text{и} \quad \frac{Q^2}{g} = \frac{\omega^3}{B_{k1}}.$$

Площадь $B' C' D' M$ будем считать постоянной, не зависящей от h , т. е. предполагаем, что тело, стесняющее сечение, поднимается и опускается вместе с уровнем воды, как, например,



Черт. 56



Черт. 57

стоящее на якоре судно или плавкоут.

При этом предположении, определяя критическую глубину для стесненного участка h_{k1} следует ширину B_{k1} брать от одного берега до другого, не отнимая ширины стесняющего тела, так как при изменении глубины на этом участке на dh площадь живого сечения изменяется на $d\omega = Bdh$, где B — полная ширина потока на поверхности воды.

Предположим также пока, что линия энергии $\mathcal{E}s$ при на-

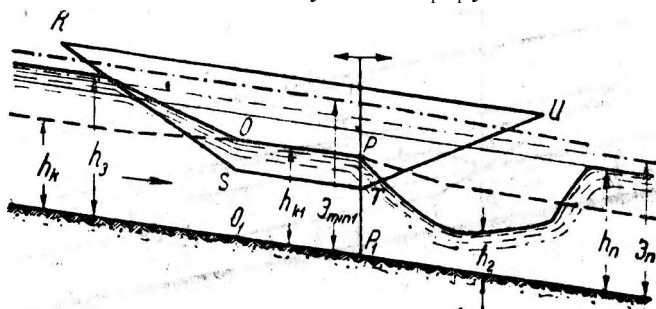
личии стеснения $B' C' D' M$ не изменит своего уклона по сравнению с линией энергии $\mathcal{E}_n s$, имевшей место до установки стеснения. Это означает, что дополнительными потерями (на трение и местными), возникающими в связи с установкой стеснения, пока пренебрегаем. При сделанных предположениях рассмотрим течение жидкости в спокойном водотоке в двух случаях: 1) $\mathcal{E}_{\min 1} < \mathcal{E}_n$ (черт. 56) и 2) $\mathcal{E}_{\min 1} > \mathcal{E}_n$ (черт. 58).

1. Если $\mathcal{E}_{\min 1} < \mathcal{E}_n$, то водоток запасать энергии не будет и пройдет стесненный телом $RSTU$ участок с энергией \mathcal{E}_n . Если построить графики $\mathcal{E}h$ для нестесненного и стесненного

участков (черт. 57), то из второго графика сразу получим глубину h_1 ; сравнивши ее с h_n , можем сразу получить понижение уровня на стесненном участке $h_n - h_1$. Если бы мы захотели учесть влияние трения жидкости о стенки стесняющего тела и увеличенной скорости, то вместо профиля NOP (черт. 56) пришлось бы построить другой профиль, начиная от сечения PP_1 , учитывая дополнительные потери на трение обычным путем. Перед точкою N получится тогда кривая подпора.

2. Если $\mathcal{E}_{\min 1} > \mathcal{E}_n$ то водоток должен запасти (черт. 58) перед сооружением (без учета дополнительных потерь) количество энергии $\mathcal{E}_{\min 1} - \mathcal{E}_n$.

На всем наиболее стесненном участке O_1P_1 установится



Черт. 58

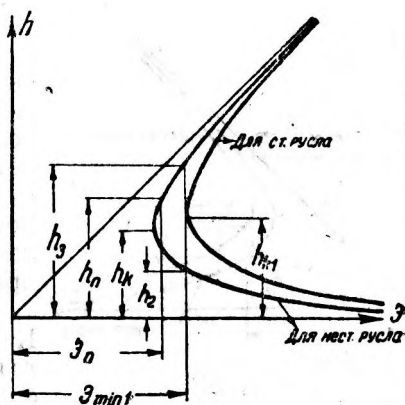
удельная энергия сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$ и соответствующая ей критическая глубина h_{k1} .

За стеснением в сжатом сечении установится глубина h_2 , а перед ним глубина h_3 ; обе эти глубины легко найдутся из графиков $\mathcal{E}h$ на черт. 59.

Если бы мы захотели учесть влияние трения на стенках стесняющего течение тела и увеличения скорости, то кривые поверхностей воды пришлось бы строить в обе стороны (черт. 58) от сечения PP_1 .

Теперь перейдем к рассмотрению стеснения сверху на части ширины бурного водотока. Предполагая опять, что уклон линии энергии не изменится после установки стеснения, рассмотрим случай, когда $\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_{\min 1}$ (черт. 60 и 61). Глубина на стесненном участке h_1 найдется из графиков $\mathcal{E}h$ (черт. 61) для стесненного и нестесненного русла. На стесненном участке получается увеличение $h_1 - h_n$ глубины по сравнению с нормальной.

Гораздо сложнее получается поверхность воды в том случае, когда в бурном водотоке имеем $\mathcal{E}_{\min 1} > \mathcal{E}_n$ (черт. 62 и 63).

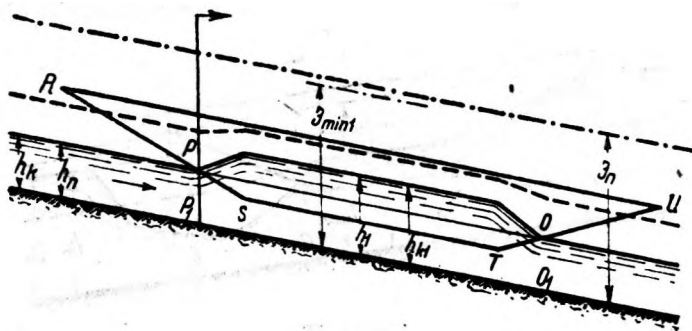


Черт. 59

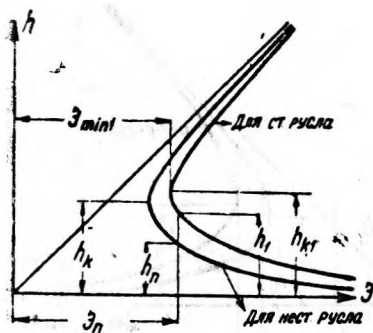
При этом условии критическая глубина h_{k1} (и \mathcal{E}_{\min}) установится на стесненном участке P_1O_1 . Глубины h_3 и h_2 найдутся из графиков $\mathcal{E}h$, и после этого легко построить профиль $MNPOEF$.

Если бы оказалось желательным учесть влияние стеснения на потери от трения, то кривые поверхности можно было бы строить и в бурных водотоках, начиная от сечений PP_1 (черт. 60 и 62).

Следует обратить внимание на то, что при движениях жидкости, показанных на черт. 58 и 62, имеет место большое давление воды по направлению течения на стесняющие тела $RSTU$,



Черт. 60

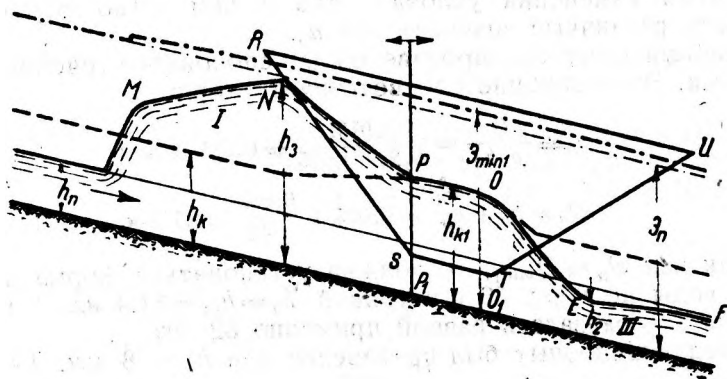


Черт. 61

а также на то обстоятельство, что сила Архимеда передвигается в этих же случаях ближе к переднему краю тела; задняя часть перемещающегося вертикально стеснения (например, судна) опускается сильнее, чем передняя, и получается явление, аналогичное диференту судна на корму при движении судна.

В гидравлической лаборатории Киевского гидромелиоративного института были произведены опыты с целью проверки полученных теоретических форм поверхностей воды при стеснении потока в лотке на части его ширины сверху моделью судна (черт. 56, 58, 60 и 62). Ширина лотка прямоугольного сечения $b = 232$ мм. Расход при всех опытах поддерживался постоянный, $Q = 15,1$ л/сек. Модель судна имела смоченное миделевое сечение $\omega_m = 0,0815 \times 0,0173 = 0,0014$ м². Нужно отметить, что описываемые опыты не могут претендовать на точность, так как отсчет глубин был весьма затруднен сложной волнообразной формой поверхности воды около модели судна, причем глубины изменялись в том или ином сечении и по ширине. В частности, особенно при формах, соответствующих черт. 58

и 62, непосредственно за поверхностью TU стесняющего тела вода поднимается вверх вдоль этой поверхности и только дальше снова опускается — в случае спокойного водотока в зону c ; при этом прыжок посредине отгоняется значительно дальше, чем по бокам. Ввиду изложенного, не будем давать здесь кривых поверхностей воды как построенных теоретически, так и экспериментальных, а ограничимся тем, что приведем для каждой формы важнейшие цифры, полученные из опыта. Опыты были произведены несмотря на указанные неблагоприятные обстоя-



Черт. 62

тельства ввиду полной неисследованности вопроса.

Прежде всего определим критическую глубину нестесненного потока

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \sqrt[3]{\frac{0,0151^2}{0,232^2 \cdot g}} = 0,0756 \text{ м.}$$

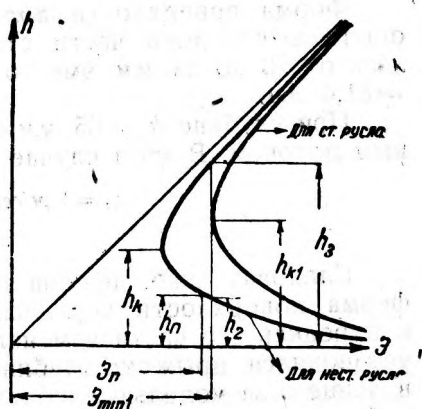
Принимая во внимание небольшую точность измерений, коэффициент α здесь и дальше будем принимать равным единице.

Критическую площадь на стесненном участке определяем из формулы

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{k1}^3}{B_{k1}}$$

После подстановки

$$\frac{0,0151^2}{g} = \frac{\omega_{k1}^3}{0,232};$$



Черт. 63

$$\omega_{k1} = 0,0175 \text{ м}^2;$$

$$h_{k1} = \frac{\omega_{k1} + \omega_n}{B_{k1}} = \frac{0,0175 + 0,0014}{0,232} = 0,0814 \text{ м};$$

скорость

$$v_{k1} = \frac{Q}{\omega_{k1}} = \frac{0,0151}{0,0175} = 0,862 \text{ м/сек};$$

$$\mathcal{E}_{\min 1} = h_{k1} + \frac{v_{k1}^2}{2g} = 0,0814 + \frac{0,862^2}{2g} \approx 0,119 \text{ м}.$$

Путем изменения уклона лотка в нем легко можно было получать различные значения для h_n .

Первый опыт был произведен для спокойного течения с $h_n = 95 \text{ мм}$. Этой глубине соответствует скорость

$$v_n = \frac{Q}{b \cdot h_n} = \frac{0,0151}{0,232 \cdot 0,095} = 0,685 \text{ м/сек};$$

$$\mathcal{E}_n = h_n + \frac{v_n^2}{2g} = 0,095 + \frac{0,682^2}{2g} \approx 0,119 \text{ м}.$$

Так как $\mathcal{E}_n \approx \mathcal{E}_{\min 1}$ то должна установиться форма поверхности воды по черт. 56 с глубиной $h_1 = h_{k1} = 81,4 \text{ мм}$. На опыте глубина эта оказалась равной примерно 82 мм.

Следующий опыт был произведен при $h_n = 78 \text{ мм}$. Тут $v_n = 0,834 \text{ м/сек}$, а $\mathcal{E}_n = 0,078 + 0,834^2/2g = 0,1135 \text{ м}$. Следовательно,

$$\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_{\min 1}.$$

Форма поверхности должна соответствовать черт. 58. На опыте в передней части стесненного участка глубина колебалась от 73 до 88 мм вместо определенной теоретически $h_{k1} = 81,4 \text{ мм}$.

При глубине $h_n = 65 \text{ мм}$ был произведен опыт уже над бурным потоком. В этом случае

$$v_n = 1 \text{ м/сек}; \quad \mathcal{E}_n = 0,1158 \text{ м};$$

$$\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_{\min 1}.$$

Следовательно, должна получиться и получилась на опыте форма поверхности черт. 62. Глубина на стесненном участке в передней его части изменялась от 74 до 85 мм; перед моделью установился прыжок; глубина перед моделью была $\sim 98 \text{ мм}$; в конце и за моделью глубина быстро приближается к нормальной.

Последний опыт был выполнен при $h_n = 43,5 \text{ мм}$. При этой глубине $v_n = 1,495 \text{ м/сек}$ и $\mathcal{E}_n = 0,1565 \text{ м}$.

Тут \mathcal{E}_n значительно превосходит $\mathcal{E}_{\min 1}$; поэтому должна получиться поверхность воды, как на черт. 60.

На опыте глубина h_1 в стесненном сечении получилась в среднем около 58 мм.

Такой глубине соответствует на стесненном участке живое сечение

$$\omega_1 = 0,058 \cdot 0,232 - 0,0014 = 0,012 \text{ м}^2.$$

Скорость на стесненном участке получается

$$v_1 = 1,26 \text{ м/сек},$$

а удельная энергия сечения там же

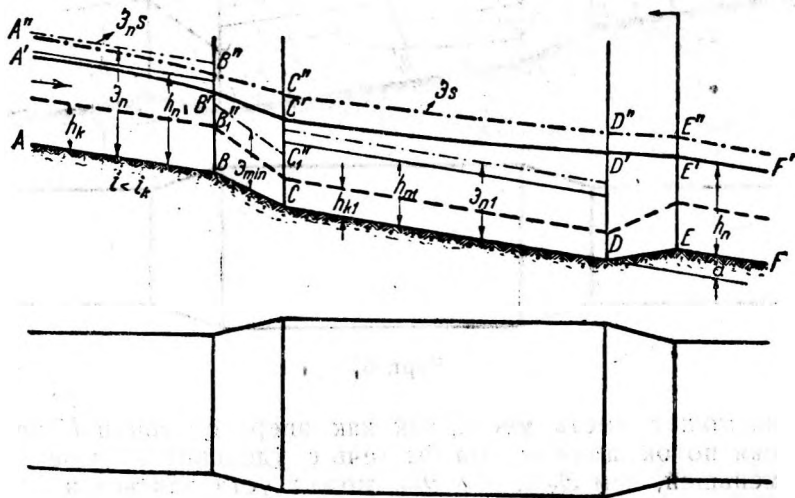
$$\mathcal{E}_1 = 0,1386 \text{ м}.$$

Удельная энергия сечения получилась значительно меньшей, чем \mathcal{E}_n из-за потерь энергии.

Как видим, эти опыты также в общем подтвердили теоретические исследования.

§ 13. Плавные расширения русла на некоторой длине при одновременном понижении дна

Рассмотрим такие случаи расширений русла, когда линия дна участка EF (черт. 64—67) является продолжением линии дна участка AB и, кроме того, оба эти участка и участок CD имеют



Черт. 64

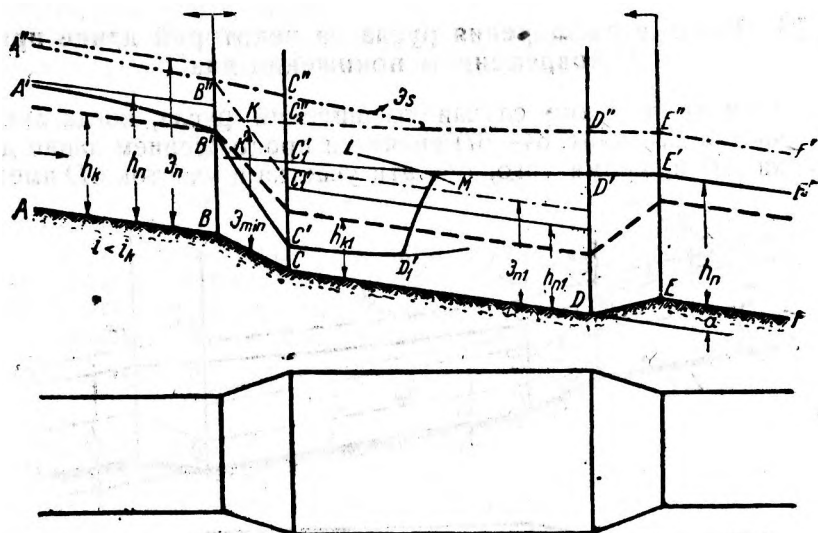
одинаковые уклоны, а переходные участки BC и DE сравнительно короткие. Шероховатость русла на всем протяжении будем принимать одинаковой. Предполагаем также, что участок CD имеет значительную длину.

Исследуем сначала движение жидкости в руслах с расширением для случая спокойных водотоков, когда уклоны на участках AB , CD и EF (черт. 64) меньше критических. Нет, конечно, оснований ожидать, что вода подойдет к сечению E с удельной энергией сечения большей, чем \mathcal{E}_n .

Поэтому водоток не будет иметь надобности расходовать излишнюю энергию за сечением E . Построение кривых поверхности воды нужно начать от точки E' вверх против течения.

Последовательно построим кривую $D'E'$, кривую подпора $C'D'$, кривую $B'C'$ и кривую спада $A'B'$. Если даже линия $B'C'$ не встретит линии критических глубин или, что то же, градиент энергии $B''C''$ не встретит линии минимальной удельной энергии сечения $B_1''C_1''$, то линия $A'B'C'D'E'$ и будет представлять действительно кривую поверхности воды для рассматриваемых условий.

При некоторых условиях, однако, может случиться, что кривая $B'C'$ (черт. 64) встретит линию критических глубин (точка K на черт. 65); это значит, что градиент энергии $D''C_2''K$ пересек бы линию минимальной удельной энергии $B''C_1''$ в точке K ,



Черт. 65

что не может иметь места, так как вверх от точки K против течения поток должен был бы течь с удельной энергией сечения меньшей, чем \mathcal{E}_{\min} . Но \mathcal{E}_{\min} может установиться и установится в сечении B , если только BC имеет уклон, больший критического. В таком случае в сечении B установится критическая глубина BB' . От точки B' строим кривую спада $A'B'$ против течения и по течению кривую $B'C'$, а затем кривую подпора $C'D_1'$ навстречу кривой подпора $D'C_1'$.

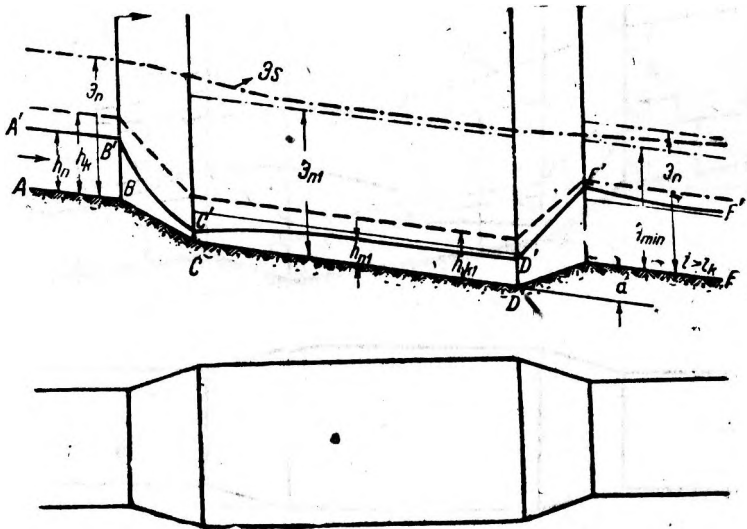
Для глубин, соответствующих кривой $C'D_1'$, в нескольких сечениях вычисляем взаимные глубины, откладываем их по вертикалям в этих же сечениях и строим "линию взаимных глубин" LM . Там, где эта линия пересекается с кривой подпора $C_1'D'$,

¹ Построение "линии взаимных глубин" для определения места образования прыжка было описано в статье "Про рух рідини в коротких лотоках з горизонтальним дном"... Збірник праць з енергетики, Київ, 1930. В 1932 г. этот способ был описан также в упоминавшейся уже книге В. А. Bachmeteff, *Hydraulics of Open Channels*, New-York and London, 1932. См. также цитированную выше статью Э. Брауна.

образуется прыжок. Можно убедиться, что между полученным таким образом градиентом энергии $A''B''C''D''E''$ и дном будем иметь возможно малую площадь.

Интересно еще отметить, что нельзя ожидать встречи кривой свободной поверхности с линией критических глубин на участке CD , а только на участке BC . Это потому, что на участке CD имеем кривую подпора $C_1'D'$ (черт. 65), которая только приближается сверху к линии нормальных глубин и поэтому никак не может прийти на этом участке до линии критических глубин.

Перейдем теперь к рассмотрению движения в бурных потоках с расширениями русла. В этом случае нет, конечно,

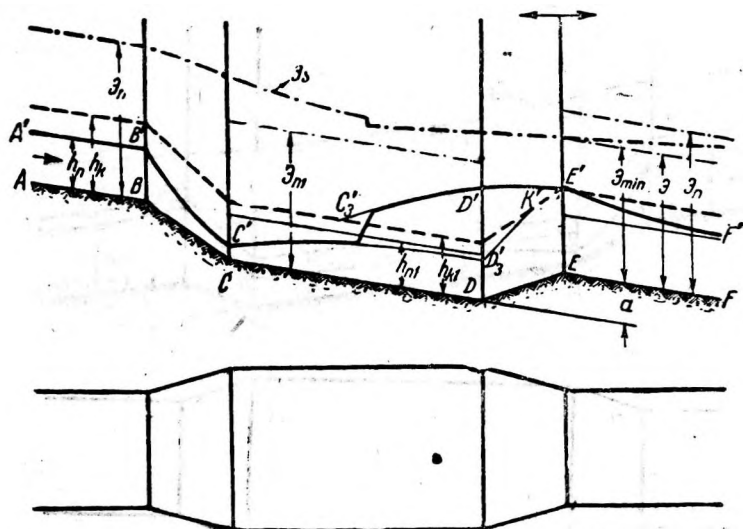


Черт. 66

никаких оснований ожидать, чтобы водоток увеличивал свою удельную энергию сечения перед расширением, а в, таком случае будем иметь бурное течение до самого расширения. Но в бурном потоке влияния всяких отклонений от призматичности против течения не распространяются. Поэтому в сечении B' (черт. 66) будем иметь нормальную глубину h_n и кривую поверхности воды строим от точки B' вниз по течению. Если, придя в сечение E , получим глубину EE' меньшую, чем критическая глубина в этом сечении, то от точки E' строим дальше вниз по течению кривую спада $E'F'$, Линия $A'B'C'D'E'F'$ и будет характеризовать поверхность воды.

Однако при некоторых условиях может случиться, что кривая $D'E'$ достигает линии критических глубин в какой-либо точке на участке DE , не доходя (черт. 67) сечения E . Дальнейшее движение после указанной точки должно было бы происходить с удельной энергией сечения меньшей, чем \mathcal{E}_{\min} , что, конечно,

невозможно. Удельная энергия сечения может достигнуть значения \mathcal{E}_{\min} только в сечении E и в этом сечении установится, следовательно, критическая глубина h_k . Таким образом получаем точку E' , от которой строим вниз по течению кривую спада $E'F'$, а против течения кривую $E'D'$, а затем кривую подпора $D'C_3'$, навстречу кривой подпора $C'D_3'$. Место прыжка, при помощи которого происходит переход от одной кривой к другой, находим опять лучше всего при помощи кривой взаимных глубин (на чертеже не показанной). И здесь в правильности построения можно убедиться при помощи положения о возможно малой площади между линией энергии и дном.



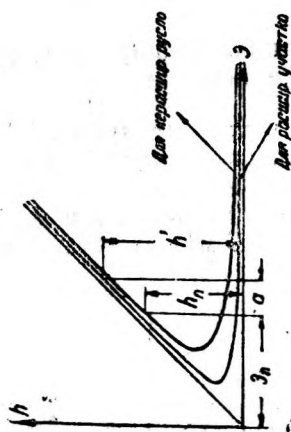
Черт. 67

В случае сравнительно коротких участков CD реже могут возникнуть условия для образования прыжка, особенно, если глубина h_n значительно отличается от критической глубины h_k .

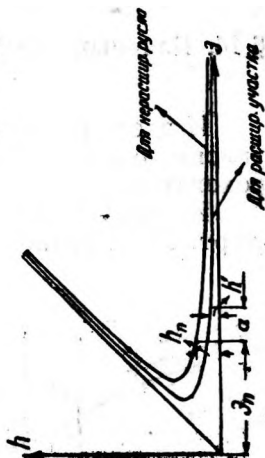
Если можно ограничиться при очень коротком расширенном участке приближенным построением кривой поверхности воды, то принимаем, что градиент энергии над расширенным участком будет такой же, как если бы расширения вовсе не было.

В случае спокойного водотока (черт. 68а) глубину h' на участке CD легко определить при указанном выше условии, построив график $\mathcal{E}h$ для расширенного русла. Отложив на этом графике удельную энергию сечения $\mathcal{E}_n + a$ (черт. 68б) для расширенного же участка, легко получим искомую глубину h' , а имея эту глубину, строим профиль $B'C'D'E'$. Для сравнения на том же чертеже вычерчен график $\mathcal{E}h$ и для нерасширенного русла с нанесением величин \mathcal{E}_n и h_n . На черт. 69 показано решение аналогичной задачи для расширения русла на бурном водотоке. Этот чертеж не нуждается в пояснениях.

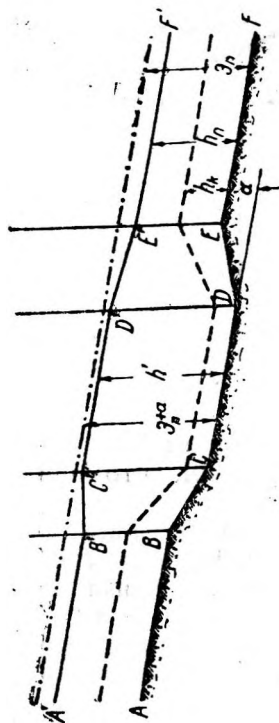
Из всего сказанного видно, что прыжки на расширенных участках могут иметь место только при довольно большой длине этих участков, настолько большой, чтобы успело сказаться изме-



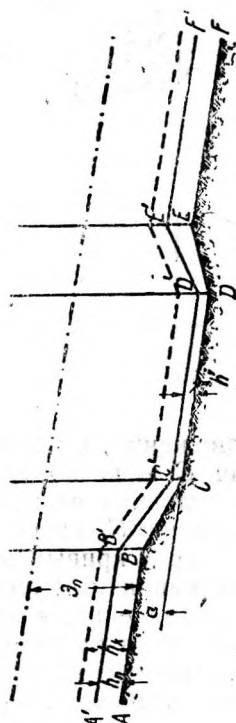
Черт. 685



Черт. 695



Черт. 68a



Черт. 69a

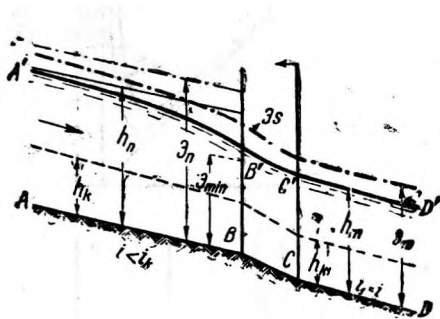
нение условий трения. Особенно легко прыжки появляются в тех случаях, когда нормальные глубины h_n (черт. 65 и 67) близки к критическим глубинам h_k , на что вполне правильно указывает П. Бёсс в его цитированной уже монографии. Если бы условия

трения не изменялись на расширенном участке, то, как ясно из черт. 68 и 69, на этом участке никогда не мог бы образоваться прыжок.

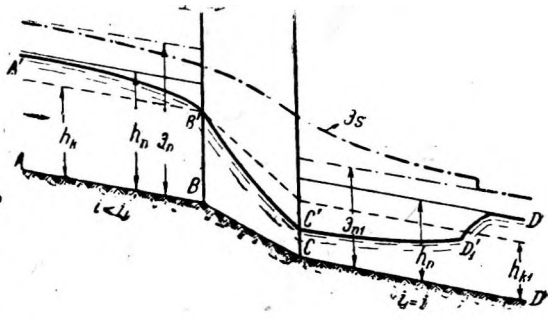
§14. Плавный переход от более узкого к более широкому руслу с одновременным понижением дна

И здесь рассмотрим только русла, у которых (черт. 70—71) уклоны дна i и i_1 на призматических участках одинаковы и шероховатость одна и та же по всей длине $ABCD$.

Исследуем прежде всего случай, когда $h_n > h_k$ и $h_{n1} > h_{k1}$ (черт. 70). Предполагаем, что на участке CD может установиться



Черт. 70



Черт. 71

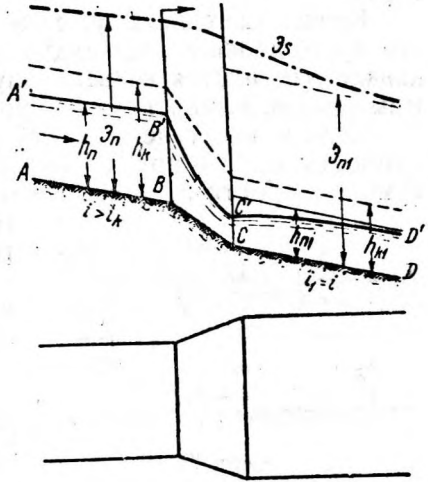
равномерное движение, по крайней мере на некотором расстоянии от сечения C вниз по течению. Сейчас увидим, что при определенных условиях равномерное течение может начинаться сразу же от сечения C , которое в таком случае является исходным для построения кривых поверхностей воды. Кривую $B'C'$ на переходном непризматическом участке строим, начиная от точки C' . Если полученная в результате построения глубина BB' в сечении B окажется больше критической глубины h_k в том же сечении, то построение кривой поверхности $A'B'$ на участке AB можно продолжать дальше. Кривая $A'B'$ представляет кривую спада b_1 .

В том случае, когда при построении кривая $B'C'$ пересекла бы линию критических глубин на участке BC , построение кривых свободных поверхностей нужно произвести иначе (черт. 71). За исходное сечение тут нужно принять сечение B , от которого

вверх против течения строим кривую спада $A'B'$, а вниз по течению кривую $B'C'$ и затем далее кривую подпора $C'D_1'$ до места образования прыжка. Понятно, что при определенных условиях прыжок может надвинуться на участок BC .

Доказать, что \mathcal{E}_{\min} и h_k могут установиться только в сечении B , а не где-либо на участке BC , можно при помощи тех же соображений, при помощи которых было доказано, что кривая $C_1'K'$ (черт. 65) не может пересечь линию критических глубин на участке BC ниже сечения B (тот же черт. 65).

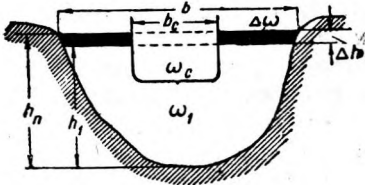
Остановимся теперь еще на том случае, когда (черт. 72) $i > i_k$ и $i_1 > i_k$, причем и тут, как уже упоминалось выше, будем рассматривать только водоток, для которого $i = i_1$. Здесь нет никаких оснований к тому, чтобы в потоке на участке AB могла установиться кривая подпора a_{II} , так как запастись энергией для прохождения участков BC и CD нет надобности. Но если на участке AB течение будет бурное, то влияние понижения дна и увеличения ширины на участке BC никак не может повлиять на участок AB . Следовательно, в сечении B будем иметь глубину h_n и от этого сечения, как от исходного, строим вниз по течению кривые поверхностей $B'C'$ и затем дальше $C'D'$.



Черт. 72

§ 15. О движении судов по каналам и рекам; формы поверхностей воды

Как известно, скорости и глубины воды на участке водотока (реки, канала), на который распространяется влияние движущегося по нему судна, не будут равны скоростям и глубинам на том же, участке при отсутствии судна (черт. 73).



Черт. 73

Этот участок только в том предположении, что судно сравнительно сильно стесняет сечение водотока и в первом приближении можно

Это изменение скорости на стесненном участке ощущается все сильнее по мере приближения к корпусу судна и уменьшается по мере удаления от стенок судна в стороны и вниз.

Здесь рассмотрим задачу о скоростях и глубинах на указанном

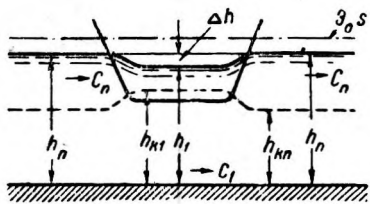
считать скорость воды во всех точках каждого живого сечения водотока на стесненном участке одинаковой.

Предположим здесь также, что судно имеет настолько удобообтекаемую форму, что струи от корпуса не отрываются и поэтому за судном никаких вихрей не образуется.

Кроме того, не будем тут рассматривать вопросов о кормовых и носовых волнах, а также не будем учитывать искривления струй.

Кроме сделанных уже допущений, предположим еще, как это часто делают¹, что судно стоит, а скорость воды в реке или канале изменяется на величину скорости судна, взятую с обратным знаком. Измененную скорость в водотоке обозначим через c_n .

Если в нестесненном канале или реке имеется некоторая скорость c_p , то под c_n будем подразумевать алгебраическую сумму скорости c_p и скорости судна с обратным знаком; таким



Черт. 74

образом c_n есть фиктивная скорость в водотоке, скорость относительно судна на тех участках водотока, где влияние судна на глубины и действительные скорости воды не ощущается.

Для упрощения дальнейших рассуждений скорость в канале c_p будем считать равной нулю.

Пока допустим также, что потери энергии на трение на участке, занятом судном, останутся такими же, как были на этом участке до прохода судна, а местных потерь тут вообще нет.

Приняв скорость в водотоке равной c_n , мы должны естественно считать, что в реке имеется как бы секундный расход $Q = \omega_n c_n$, где ω_n обозначает живое сечение водотока. К полученному обращенному движению со скоростью движения воды c_n и стесняющему водоток стоящему на месте судну есть основания применить тот же способ исследования, который мы использовали выше для изучения движения в открытых руслах при различных стеснениях их. В дальнейшем исследовании будем обозначать глубину, скорость, площадь сечения, удельную энергию сечения непосредственно перед судном $h_0, c_0, \omega_0, \mathcal{E}_0$; те же величины в наиболее стесненном сечении — $h_1, c_1, \omega_1, \mathcal{E}_1$, а для участка, куда влияние судна не распространяется, будем пользоваться обычными обозначениями: h_n, c_n, ω_n и \mathcal{E}_n .

Перечисленные величины при некоторых, подлежащих еще в дальнейшем исследованию, условиях бывают в сечении перед судном равными соответственным величинам h_n, c_n, ω_n и \mathcal{E}_n (черт. 74); иногда же такого равенства не наблюдается.

Вычислим прежде всего для фиктивного движения, которое получается при сделанных предположениях, удельную энергию

¹ См. Н. К г е у, *Fahrt der Schiffe auf beschränktem Wasser*, Schiffbau, 1912, стр. 459, или W. Т е u b e r t, *Die Binnenschifffahrt*, 1932, стр. 718 — 720.

сечения для участка с нормальной глубиной h_n , не измененной наличием судна в водотоке:

$$\mathcal{E}_n = h_n + \frac{c_n^2}{2g} = h_n + \frac{Q^2}{2g\omega_n^2}$$

Эта величина легко вычисляется и при заданных h_n и c_n есть величина постоянная. Для стесненного судном сечения (или участка) получаем

$$\mathcal{E}_1 = h_1 + \frac{c_1^2}{2g} = h_1 + \frac{Q^2}{2g\omega_1^2}$$

Для сечения перед судном будем иметь, вообще говоря,

$$\mathcal{E}_0 = h_0 + \frac{c_0^2}{2g} = h_0 + \frac{Q^2}{2g\omega_0^2}$$

В последних двух выражениях глубины и скорости подлежат определению; для их определения будет удобно рассматривать \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_0 как функции глубин — соответственно h_1 и h_0 . При этом само собой разумеется, что площади живых сечений ω_1 и ω_0 также рассматриваются как функции глубин h_1 и h_0 .

Легко согласиться, приняв во внимание сделанные выше упрощающие исследование предположения, что удельные энергии сечения \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}_1 должны равняться друг другу: $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1$.

После этих предварительных замечаний переходим к исследованию глубин и скоростей на том участке водотока, где ощущается влияние судна. Исследование будем вести для все увеличивающихся скоростей c_n .

Как будет видно из дальнейшего, при небольших скоростях c_n уровень воды перед судном не поднимается, т. е. глубина и удельная энергия сечения перед судном будут соответственно равны h_n и \mathcal{E}_n ; следовательно, для этого случая можем написать

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_n$$

или

$$h_1 + \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} = \mathcal{E}_n$$

Из этого уравнения можно определить глубину h_1 и понижение уровня Δh (черт. 73), так как живое сечение ω_1 на участке, стесненном судном, является функцией h_1 , а остальные величины в уравнении известны. Однако аналитическое решение его в общем случае чрезвычайно сложно; более наглядным и удобным является графическое решение, представленное на черт. 75.

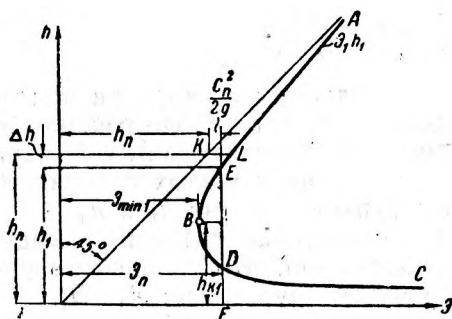
В осях \mathcal{E} и h изображаем уравнения $\mathcal{E}_1 = h_1 + \frac{Q^2}{2g\omega_1^2}$. Глубине h^1 придаем, конечно, только положительные значения.

Если теперь отложим по оси \mathcal{E} величину $\mathcal{E}_n = h_n + \frac{c_n^2}{2g}$ и проведем линию FE , то получим два положительных решения FD

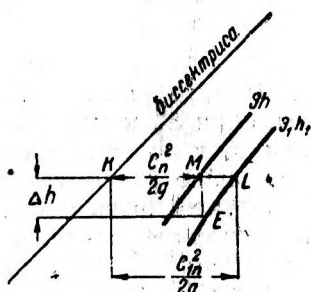
и EF . При помощи соображений, аналогичных уже излагавшимся выше, можно убедиться, что фактически тут всегда установится только глубина FE , которая и является искомой глубиной h_1 в стесненном сечении.

В тех случаях, когда скорость c_n и стеснение водотока сравнительно невелики, точка L пересечения графика \mathcal{E}_k с прямой линией, проведенной на расстоянии h_n от оси абсцисс, получается на правой верхней части AB графика \mathcal{E}_h в той части его, где он не очень отклоняется от параллелизма с биссектрисой прямого координатного угла.

Изобразим часть черт. 75 около точки K отдельно (черт. 76) в большем масштабе; линия LE представляет часть кривой AB . Из чертежа видно, что если LE не очень отклоняется от па-



Черт. 75



Черт. 76

раллелизма с биссектрисой, то понижение уровня Δh приблизительно равно ML . Но последний отрезок представляет разность высот скоростей судна c_n и скорости c_{1n} в стесненном сечении при условии, что в этом сечении мы имели бы глубину h_n ; при последнем условии площадь стесненного живого сечения равнялась бы $\omega_n - \omega_c$, где ω_c — смоченное миделевое сечение судна. Теперь можем написать

$$h_n - h_1 = \Delta h = \frac{\left(\frac{Q}{\omega_n - \omega_c}\right)^2 - c_n^2}{2g}.$$

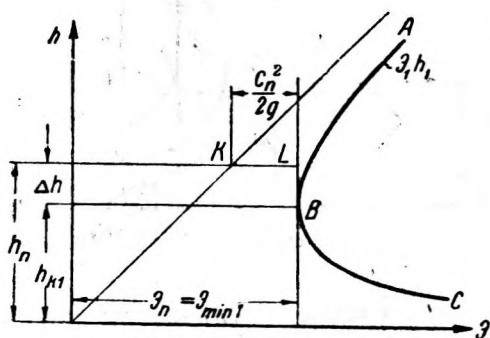
Этой формулой можно пользоваться для аналитического определения Δh , или h_1 при изложенных выше условиях.

После определения Δh или h_1 можно приблизительно начертить вид поверхности воды возле судна. Ясно, что умение определить Δh имеет большое практическое значение; например, можно установить ту скорость c_n при которой судно будет задевать дно, хотя нормальная глубина h_n канала или реки больше осадки судна; можно определить скорость c_1 на стесненном участке, уточнить сопротивление трения и пр.

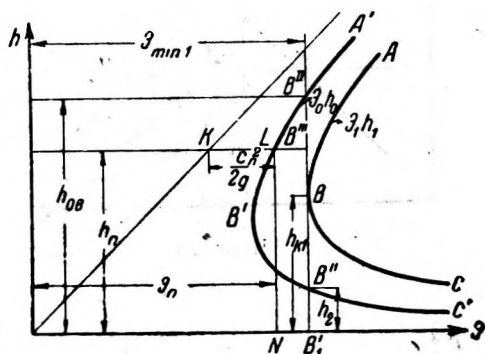
При увеличении скорости судна увеличиваются $c_n^2/2g$ и \mathcal{E}_n ; вместе с тем изменяется форма и расположение графика $\mathcal{E}_1 h_1$,

(черт. 75), а именно — точка B с минимальной возможной удельной энергией $\mathcal{E}_{\min 1}$ поднимается выше и отходит вправо. Отход вправо точки B происходит в рассматриваемых условиях быстрее, чем возрастание \mathcal{E}_n . Поэтому при некоторой определенной скорости судна наступает положение, представленное на черт. 77, при котором \mathcal{E}_n делается равным $\mathcal{E}_{\min 1}$ и таким образом в стесненном сечении устанавливается соответствующая $\mathcal{E}_{\min 1}$ критическая глубина h_{k1} . При этой глубине удельной энергии сечения \mathcal{E}_n как раз еще достаточно для того, чтобы вода могла пройти через стесненное сечение, и поэтому поднятия уровня перед судном не получается.

При дальнейшем увеличении скорости c_n точка L (черт. 78) получается уже левее точки B . В этом случае удельной энер-



Черт. 77



Черт. 78

гии сечения \mathcal{E}_n уже недостаточно для того, чтобы вода могла пройти стесненное сечение; минимальное количество удельной энергии сечения, с каким возможен проход воды, будет, очевидно, равно $\mathcal{E}_{\min 1}$. С этой, а не с какой-либо большей или меньшей, удельной энергией сечения вода и пройдет стесненное сечение; на доказательстве этого положения можно не останавливаться.

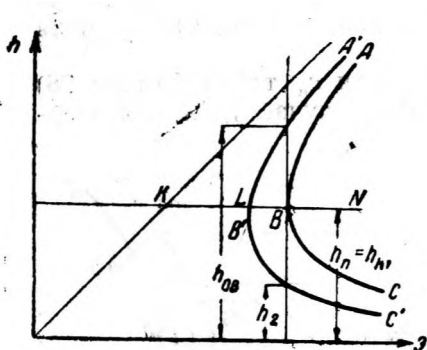
Количество энергии $\mathcal{E}_{\min 1} - \mathcal{E}_n$ вода должна получить в сечении перед судном (или вернее перед наиболее стесненным сечением); для этого вода перед судном должна увеличить свою глубину. Чтобы найти эту глубину h_{0B} , построим на том же чертеже график удельной энергии сечения $A'B'C$ для нестесненного русла, причем расход берем, конечно, тот же, что и для других сечений, т. е. $Q = \omega_n c_n$.

Проведем теперь линию $B_1'B_1^{IV}$ параллельно оси A через точку B , т. е. на расстоянии $\mathcal{E}_{\min 1}$ от оси. Перед судном установится глубина $B_1^{IV}B_1'(h_{0B})$, которой в нестесненном русле и соответствует удельная энергия сечения $\mathcal{E}_{\min 1}$. В стесненном сечении установится, конечно, h_{k1} .

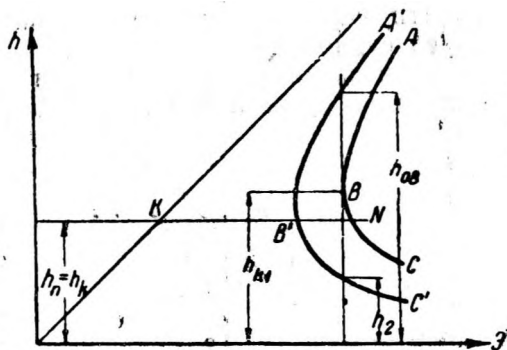
За судном должна получиться глубина $B_1'B''$, обозначенная буквой h_2 . Эта малая глубина должна получиться для того, чтобы вода могла истратить излишнюю за судном энергию.

В самом деле, при малой глубине получается некоторая довольно большая скорость c_2 , благодаря наличию которой излишняя энергия и расходуется. Однако надо иметь в виду, что за судном следует рассматривать уже не фиктивное движение воды (относительно судна), а действительное движение ее относительно русла.

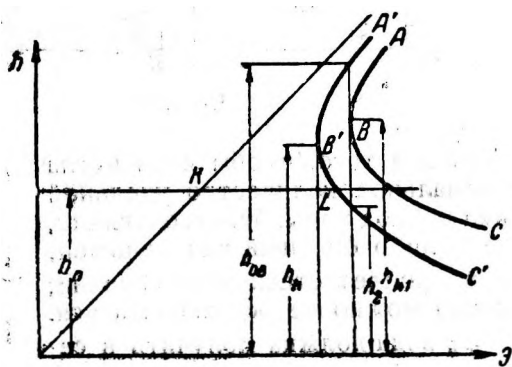
Как уже говорилось, точки B и B' графиков $\mathcal{E}_1 h_1$ (для стесненного сечения) и $\mathcal{E}_0 h_0$ (для нестесненных сечений) по-



Черт. 79



Черт. 80



Черт. 81

степенно с увеличением скорости также поднимаются и отодвигаются вправо. При некоторой определенной скорости точка B попадает (черт. 79) как раз на линию нормальных глубин KN ; это значит, что $h_{k1} = h_n$, т. е. в стесненном сечении получится нормальная глубина; перед судном получим глубину k_{0B} и за судном h_2 . При некотором дальнейшем увеличении скорости судна точка B' (черт. 80)

уже попадает на линию нормальных глубин, а точка B расположится выше последней. В этом случае для фиктивного потока перед судном критическая глубина h_k будет равна нормальной глубине h_n . Поэтому водоток во всех исследованных до сих пор случаях можно рассматривать, как "спокойный".

При дальнейшем увеличении скорости не только точка B , но и точка B' расположится над линией нормальных глубин (черт. 81), т. е. фиктивный поток перед судном уже является бурным. Из последних чертежей сразу видно, как определяются соответствующие глубины: перед судном — h_{0B} , в стесненном сечении — h_{k1} и за судном h_2 .

Сравнивая несколько последних чертежей, начиная с черт. 78, можно заметить, что глубина за судном h_2 сначала с увеличением скорости c_n уменьшалась, а затем постепенно начала приближаться к нормальной глубине h_n .

Отметим здесь еще раз, что понижение за судном вообще появляется только с того момента, когда перед судном уровень поднимается выше нормального. Уровень воды в стесненном сечении занимает наиболее низкое положение в случае, изображенном на черт. 77; при дальнейшем увеличении скорости c_n критическая глубина в стесненном сечении $h_{к1}$ возрастает и делается больше нормальной глубины (черт. 80 и 81).

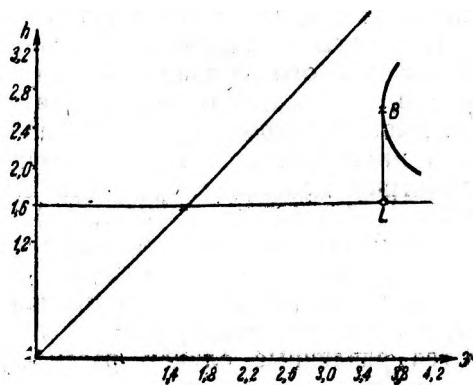
Можно убедиться, что при еще более значительных скоростях величина \mathcal{E}_n начинает опять приближаться к $\mathcal{E}_{\min 1}$ и даже делается большей, чем последняя. Рассмотрим оба эти случая.

Пусть $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{\min 1}$. В этом случае подъем воды перед судном уже является излишним, вода может пройти стесненное сечение без увеличения своей удельной энергии сечения \mathcal{E}_n . По этой же причине становится излишним и понижение уровня за судном. Только что сказанное поясняется черт. 82.

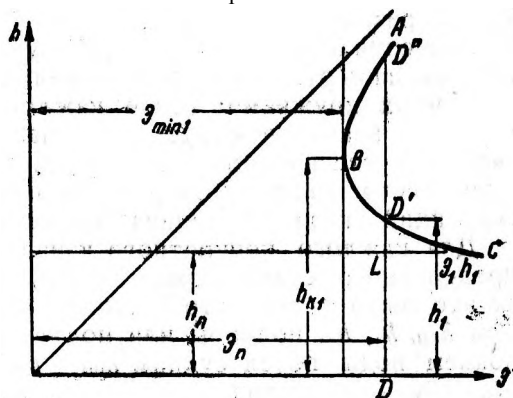
Теперь остается рассмотреть еще последний случай, когда при очень

большой скорости \mathcal{E}_n становится больше, чем $\mathcal{E}_{\min 1}$ (черт. 83). И здесь, конечно, подъема воды перед судном не будет, а значит, не будет и понижения уровня за судном. Подъем воды будем иметь только там, где находится судно, причем он равен $h_1 - h_n$; интересно то обстоятельство, что в рассматриваемом случае глубина h_1 в стесненном сечении при большей скорости может получаться меньшая, чем при меньшей скорости, когда h_1 бывает ближе или даже равно $h_{к1}$.

Нужно обратить еще внимание на то, что здесь из двух глубин DD' и DD'' , соответствующих удельной энергии сече-



Черт. 82



Черт. 83

ния \mathcal{E}_n на графике $\mathcal{E}_1 h_1$ нужно брать DD' для точки D' на ветви BC ; на доказательстве последнего правила нет необходимости останавливаться.

Изложенная теория нуждается, конечно, в экспериментальной проверке. Некоторое количество проверочных опытов было недавно проведено в Институте гидрологии Академии наук УССР. Кроме того, на основании изложенной теории были произведены подсчеты положения уровней воды для нескольких опытов над движением моделей судов в ограниченной воде, описанных в цитированной работе Крея.

Подсчеты дали довольно хорошее совпадение с результатами опытов; полного совпадения результатов подсчетов и опытов, конечно, не следует ожидать, учитывая сделанные в теоретических выводах упрощающие предположения.

В виде примера, иллюстрирующего изложенную теорию, рассмотрим движение судна со смоченным миделевым сечением $7,2 \text{ м}^2$ (примерно $6 \times 1,2 \text{ м}$), движущегося в канале или реке прямоугольного сечения шириной $B = 20 \text{ м}$ и глубиной $h_n = 1,6 \text{ м}$. Прямоугольное сечение взято исключительно с целью упрощения расчетов; принципиального значения это не имеет. Скорости судна берем разные, так что последовательно получаются различные случаи, рассмотренные выше. Графики для различных скоростей нанесены на одном чертеже (черт. 84); благодаря этому легче сравнить друг с другом случаи движения судна с различными скоростями.

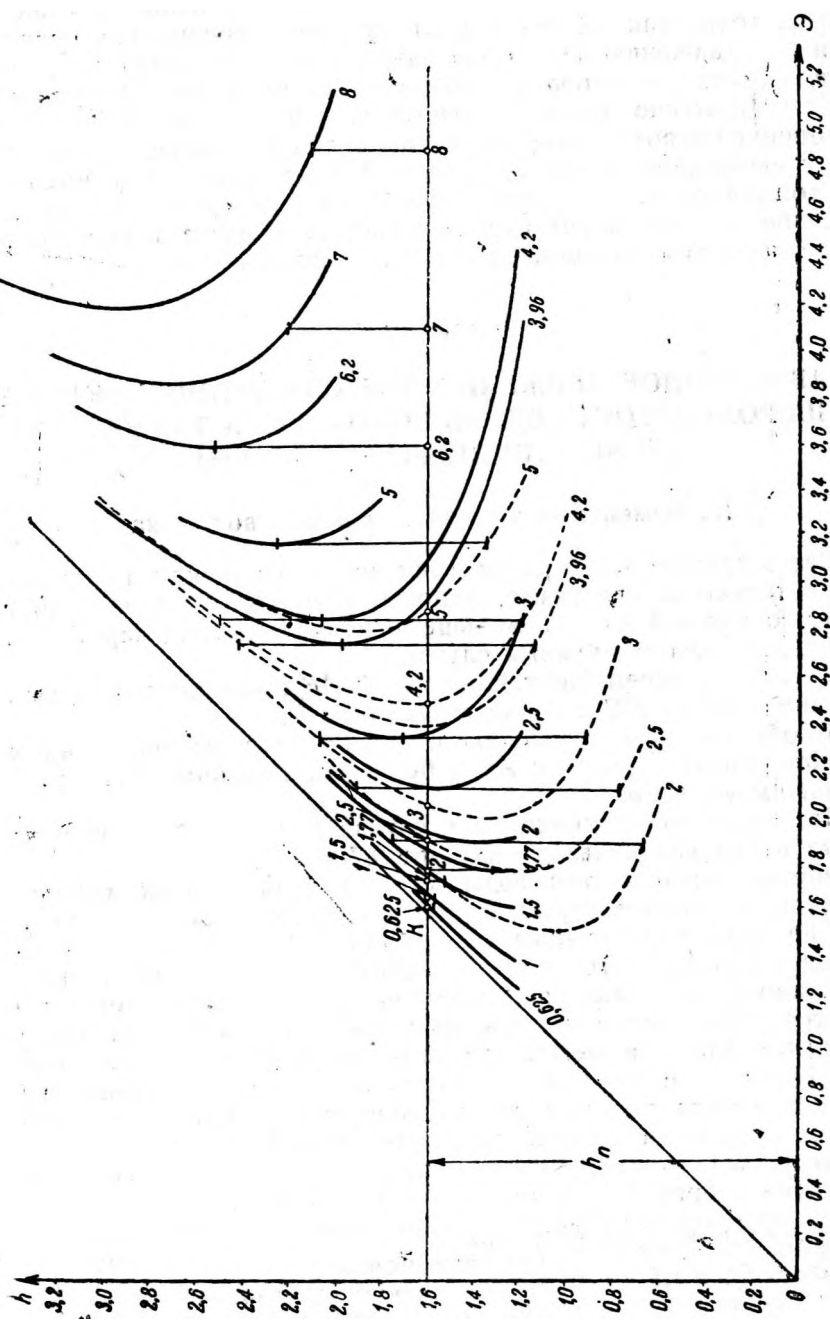
Значения величины нормальной удельной энергии сечения \mathcal{E}_n нанесены на черт. 84 на линии нормальной глубины в виде точек¹, обведенных кружками; возле каждой точки указано соответствующее значение скорости судна. Линии удельной энергии сечения в стесненном сечении нанесены сплошными линиями, а для нестесненного — штриховыми линиями; возле каждой из этих линий указана величина скорости c_n .

Для каждого конкретного канала или другого водотока и определенного судна можно найти, проще всего графически, как это было только что сделано, все интересующие нас глубины h_{0B} , h_1 , h_2 , подпоры или подъемы уровня над нормальным уровнем воды перед судном $h_{0B} - h_n$, подъемы или понижения уровня воды в стесненном сечении $h_1 - h_n$ (или соответственно $\Delta h = h_n - h_1$), понижения за судном.

Изменения всех этих величин в зависимости от скорости судна c_n ; можно для наглядности представить в виде диаграмм, откладывая по оси абсцисс c_n , а по оси ординат указанные величины; все они представляют определенный интерес.

Необходимо еще отметить, что повышения уровня воды, вызываемые движущимся судном, получают затем самостоятельные движения по отношению к берегам. Эти движения примерно такого же характера, как движение волн подъема в открытых руслах. Например, повышение уровня воды перед судном при не очень

¹ На предыдущих чертежах эти точки обозначались буквой L .



Черт. 84

больших скоростях последнего обгоняет его. Но исследование неустановившегося движения волн выходит за границы настоящей работы, точно так же как и исследование особенностей сопротивления движению судов по каналам по сравнению с сопротивлением их движению по неограниченному фарватеру; тем не менее, тут можно все-таки отметить, что чрезвычайно резкое повышение сопротивления движению судов по каналам по сравнению с движением по неограниченной воде начинается именно при той скорости, при которой $\mathcal{E}_{\min 1}$ становится больше, чем \mathcal{E}_m , т. е. при которой перед судном появляется значительное повышение, а за ним большое понижение уровня воды.

ГЛАВА III

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИЯХ УКЛОНА И ШЕРОХОВАТОСТИ ВДОЛЬ ВОДОТОКА, А ТАКЖЕ ПРИ ОТБИРАНИИ ЭНЕРГИИ ОТ ВОДЫ

§ 16. Изменение уклона дна вдоль водотока

Здесь прежде всего рассмотрим переходы между двумя последовательными участками, уклоны которых не равны друг другу, но каждый из них меньше критического. На черт. 85 и 86 показаны два возможных случая:

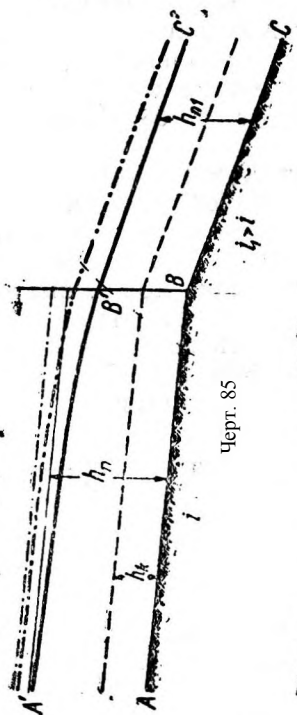
а) сначала имеем (черт. 85) участок AB с меньшим уклоном i и за ним участок BC с большим уклоном i_1 ;

б) обратное по сравнению с предыдущим расположением участков — сначала участок AB с большим, а за ним участок BC с меньшим уклоном.

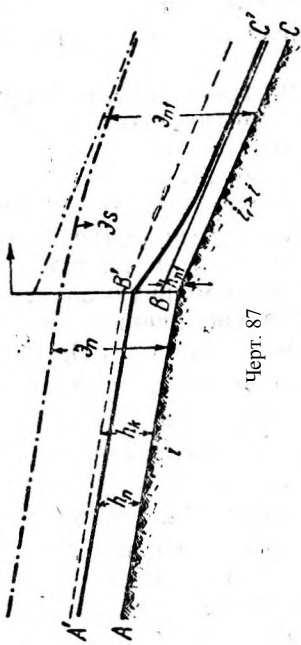
Два аналогичных возможных случая изменения уклонов на бурных водотоках показаны на черт. 87 и 88.

Формы поверхностей воды во всех этих случаях хорошо известны, а соответствующие построения кривых подпора и спада не представляют никаких затруднений и эти случаи приводятся здесь для того, чтобы, рассмотрев чертежи, убедиться, что именно приведенные продольные профили поверхностей воды являются единственно возможными, так как дают наименьшие возможные площади между линиями энергии и линиями дна. Какие бы другие профили ни брать вместо изображенных на чертежах, всегда получим либо большую площадь между градиентом энергии и линией дна, либо столкнемся с необходимостью допустить возможность движения в открытом водотоке с удельной энергией сечения меньшей, чем \mathcal{E}_{\min} .

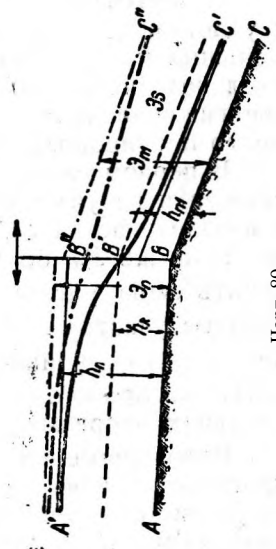
При переходе от участка со спокойным течением к участку с уклоном, большим критического (черт. 89), устанавливается, как известно, в месте изменения уклона, в сечении B , критическая глубина h_k . Это можно доказать либо на основании общего положения о возможно малой площади между градиентом энергии и дном, либо на основании выведенных из него поло-



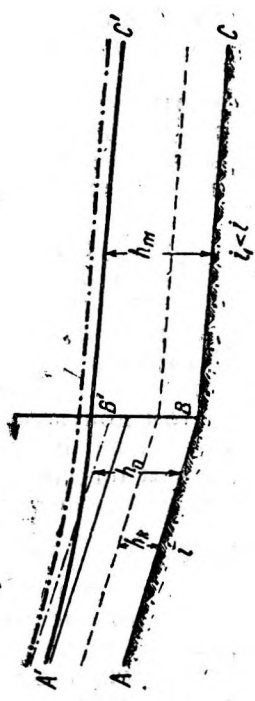
Черт. 85



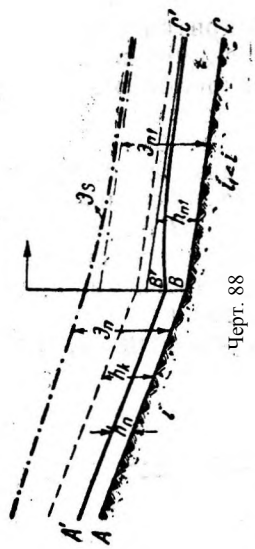
Черт. 87



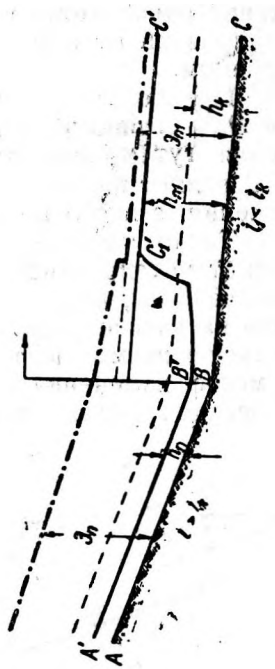
Черт. 89



Черт. 86



Черт. 88

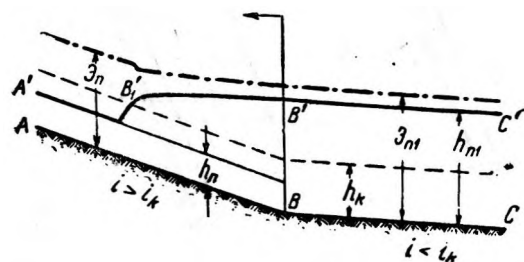


Черт. 90

жений относительно влияния на водоток сооружений и прочих отклонений от призматичности русла. Воспользуемся последним приемом.

Предположим, что критическая глубина и соответствующая ей \mathcal{E}_{\min} установятся где-либо на участке AB , не доходя до сечения B . Но такое предположение означало бы, что излом дна в B влияет на участок потока с бурным течением вверх против течения, а этого не может быть.

Точно так же доказывается, что критическая глубина не может установиться где-либо вниз от сечения B , так как это означало бы, что излом в B производит влияние вниз по течению на участок водотока со спокойным течением. Таким образом остается возможность установления критической глубины только в месте изменения уклона в сечении B . И в самом деле, критическая глубина здесь установится, так как при этом допущении



Черт. 91

от водотока не требуется, чтобы он дальше с сечением B двигался с удельной энергией сечения меньшей, чем \mathcal{E}_{\min} . Последнее обстоятельство станет сразу ясным, если обратить внимание на то, что на участке BC получается кривая спада с глубинами большими, чем нормальная, и, следовательно,

градиент энергии \mathcal{E}_s пойдет более полого, чем дно, а удельная энергия сечения, начиная от B , будет возрастать.

Остается еще рассмотреть переход (черт. 90, 91) от участка AB с уклоном i , большим критического, к участку BC с уклоном i_1 , меньшим критического; при этом иногда может случиться, что удельная энергия сечения \mathcal{E}_n на участке AB больше удельной энергии сечения \mathcal{E}_{n1} на участке BC (черт. 90) или же может иметь место противоположное соотношение энергий (черт. 91).

В первом случае водоток должен истратить излишнюю для движения на участке BC удельную энергию $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n1}$ сейчас же в начале участка BC на увеличенное трение и в прыжке.

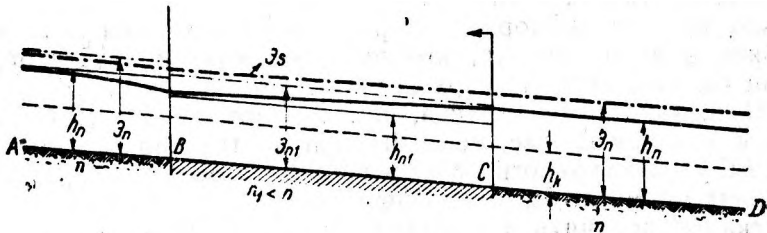
Если же \mathcal{E}_{n1} больше \mathcal{E}_n (черт. 91), то водоток должен увеличить свою удельную энергию сечения на величину $\mathcal{E}_{n1} - \mathcal{E}_n$ в конце участка AB ; для этого он перейдет на некоторой длине B_1B' в спокойное состояние. Интересно здесь отметить, что сразу за прыжком водоток в последнем случае будет иметь удельную энергию сечения даже меньшую, чем \mathcal{E}_n .

Изложенные в настоящем параграфе соображения легко распространить и на те случаи, когда один или даже оба участка имели бы нулевой или отрицательный уклон. На таких участках равномерного движения, конечно, быть не может.

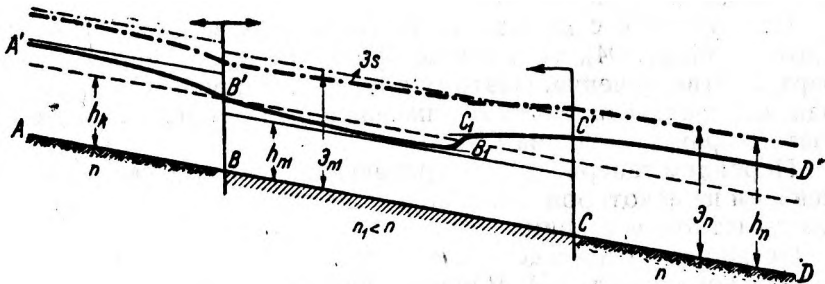
§ 17. Изменение шероховатости по длине водотока

Рассмотрим некоторые простейшие случаи изменения шероховатости стенок и дна русла по длине водотока, например, при бетонировании стенок, при зарастании участков водотоков и пр. Предположим, что русло (черт. 92) на участках AB и CD имеет коэффициент шероховатости n по Гангиле-Куттеру, а на участке BC коэффициент шероховатости n_1 меньший, чем n .

Сначала исследуем влияние такого изменения на водоток, для которого уклон дна i меньше критического для всех трех участков. В этом случае $\mathcal{E}_{n_1} < \mathcal{E}_n$ и $h_{n_1} < h_n$; поэтому на участке CD



Черт. 92



Черт. 93

с нормальной для данного водотока шероховатостью нет необходимости тратить излишнюю энергию ввиду отсутствия таковой. Вследствие этого в сечении C будем иметь глубину h_n и от этого сечения, как исходного, можем строить сначала кривую подпора на участке BC и затем кривую спада на участке AB .

Иногда при h_{n_1} не намного превышающем h_k , и при n_1 значительно меньшем, чем n , может случиться, что на участках AB и CD уклон дна i будет меньше критического (черт. 93), а на участке BC тот же уклон уже будет больше критического. При этих условиях и при достаточно длинном участке BC будет иметь место переход от спокойного течения к бурному. Этот переход через линию критических глубин и через соответствующую ему удельную энергию сечения \mathcal{E}_{\min} может произойти только в сечении B в месте изменения шероховатости. Это легко доказать совершенно аналогично тому, как было доказано, что h_k

и \mathcal{E}_{\min} устанавливаются в месте изменения уклона дна i (черт. 89) от значения, меньшего критического, к значению большему, чем критическое.

Так как удельная энергия сечения при наличии на участке BC кривой спада $B'B_1$ вниз по течению хотя и увеличивается, но может только приблизиться к значению \mathcal{E}_{n1} , то перед участком CD водоток должен запасти недостающую ему энергию. Ввиду этого образуется кривая подпора C_1C' , которая сопрягается с кривою спада $B'B_1$ прыжком. Построение кривых производится, как показано, стрелками. Если бы участок BC был настолько коротким, что кривая C_1C' не дала бы на участке BC достаточно близко к линии критических глубин, то на этом участке мы имели бы только кривую подпора. Построив ее до сечения B и найдя глубину в этом сечении, конечно, большую критической, мы могли бы уже отсюда вверх строить кривую спада.

Несколько иная картина, чем на черт. 93, могла бы получиться и в том случае, если бы при достаточно длинном участке BC удельная энергия сечения \mathcal{E}_{n1} была больше \mathcal{E}_n . При этих условиях мы могли бы, построив кривую спада $B'B_1$ до конца участка BC , получить в сечении C удельную энергию сечения \mathcal{E}_c большую, чем \mathcal{E}_n . Водоток должен истратить возможно скорее энергию $\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_n$; поэтому в рассматриваемом случае прыжок был бы отогнан на участок CD .

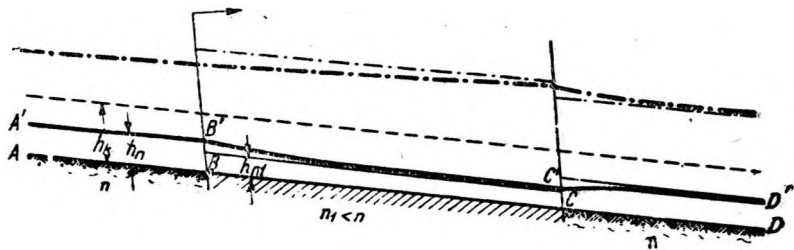
Если участок с меньшей шероховатостью имеется на бурном водотоке (черт. 94), то влияние его не будет распространяться вверх против течения. Поэтому построение кривой поверхности воды надо начать от точки B' ; сначала получим кривую спада $B'C'$, а затем кривую подпора $C'D'$.

Перейдем теперь к рассмотрению движения жидкости в русле, имеющем на некоторой длине шероховатость большую, чем перед этим участком и за ним.

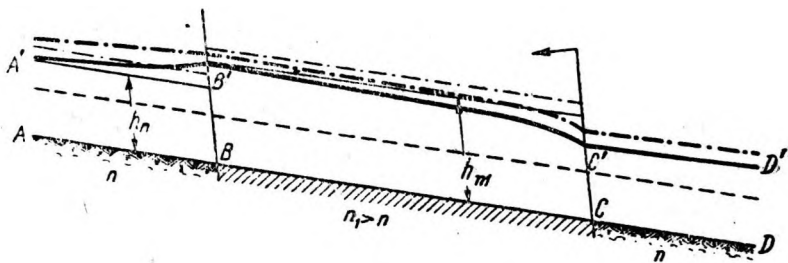
Остановимся прежде всего на водотоке с уклоном, меньшим критического (черт. 95). Влияние участка с большей шероховатостью не может распространяться вниз по течению на участок CD ; поэтому от точки C строим кривую спада $B'C'$, а затем кривую подпора $A'B'$.

Участок с большей шероховатостью на бурном водотоке (черт. 96) не будет влиять на предыдущий участок AB ; следовательно, построение кривых надо начать от точки B' ; строим сначала кривую $B'C'$, а затем кривую $C'D'$.

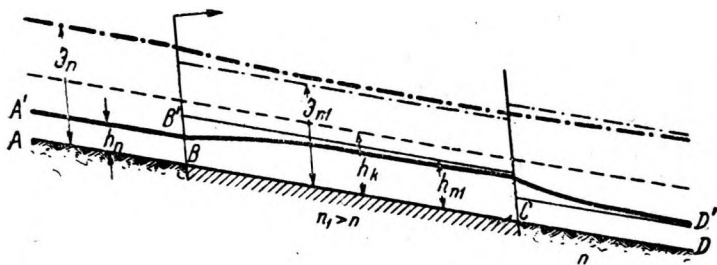
В только что рассмотренном случае нормальная глубина h_{n1} на участке с большей шероховатостью хотя и больше, чем глубина h_n , но все-таки она меньше критической глубины h_k . При очень большой шероховатости n_1 может случиться, что нормальная глубина h_{n1} (черт. 97) на участке BC окажется большей, чем критическая глубина h_k . Особенно легко это может случиться, если h_n близко к h_k . И в рассматриваемом случае участок BC не может влиять на движение на участке AB ; поэтому и здесь от точки B' строим кривую подпора $B'B_1$; если эта кривая приближается к линии критических глубин, не доходя до



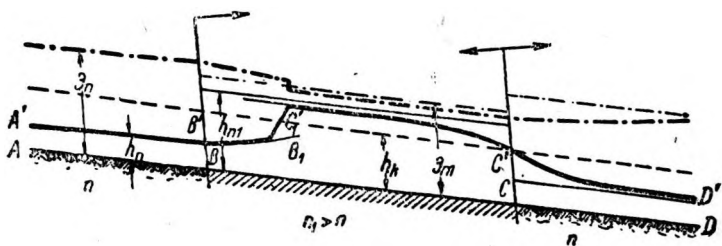
Черт. 94



Черт. 95



Черт. 96



Черт. 97

конца BC , то это означает, что на участке BC должен образоваться прыжок, а за ним дальше будет участок со спокойным течением. Заметим далее, что в сечении C удельная энергия может принять, а, значит, обязательно примет значение \mathcal{E}_{\min} . Поэтому в сечении C получится критическая глубина h_k . От этого сечения, от точки C' строим кривую спада $C'C_1'$ и затем находим место прыжка. Кроме того, от точки C' вниз по течению надо построить кривую спада $C'D'$.

В том случае, когда кривая подпора (черт. 98) $B'C'$ до конца участка BC не дойдет до линии критических глубин, прыжка вовсе не будет и поэтому от полученной уже точки нужно строить вниз кривую спада $C'D'$. Такой случай может встретиться, если участок BC сравнительно короткий.

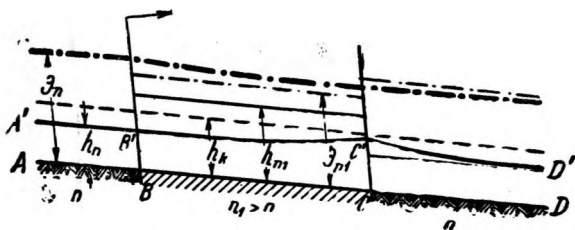
Может еще случиться (черт. 99), что \mathcal{E}_{n_1} больше, чем \mathcal{E}_n ; прочие же условия аналогичны тому, что показано на черт. 97. Понятно, что в этом случае прыжок при достаточно длинном участке BC не только не будет отогнан на участок BC , а наоборот, он надвинется на участок AB .

Остановимся еще вкратце на формах сопряжения в случае двух весьма длинных участков с разными шероховатостями. Сначала рассмотрим переход от участка с большей шероховатостью к участку с меньшей шероховатостью, причем на обоих участках нормальные глубины h_n и h_{n_1} (черт. 100) большие, чем критическая глубина h_k . Изменение шероховатости в сечении B не может оказать влияния вниз по течению на движение воды на участке BC со спокойным течением. Поэтому от точки B' строим кривую спада $A'B'$.

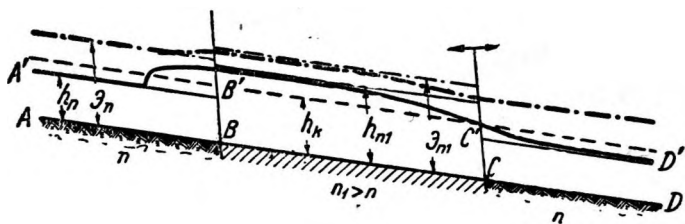
Если коэффициент шероховатости n_1 намного меньший, чем n (черт. 101), то может случиться, что на участке BC нормальная глубина h_{n_1} будет меньшая, чем критическая, в то время как на участке AB она больше критической глубины. В таком случае в сечении B установится критическая глубина и соответствующая ей удельная энергия сечения \mathcal{E}_{\min} ; доказываемое это совершенно так же, как то, что критическая глубина должна установиться в месте излома дна водотока при условиях, показанных на черт. 89.

Рассмотрим еще форму поверхности воды в бурном водотоке (черт. 102) при уменьшении шероховатости на участке BC . Это изменение шероховатости не может оказать влияния на бурный участок AB . Поэтому от точки B' строим кривую спада $B'C'$ (вниз по течению).

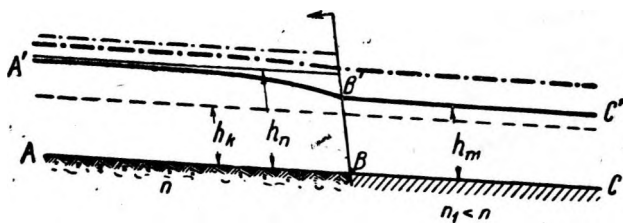
Теперь надо еще рассмотреть формы поверхностей воды в водотоках, в которых имеем на участке, расположенном ниже по течению, большую шероховатость, чем на предшествующем участке. Прежде всего исследуем случай, когда на обоих последовательных участках AB и BC (черт. 103) с разными шероховатостями имеем дело со спокойным водотоком. При этих условиях изменение шероховатости не может оказать влияния на участок BC . Исходным сечением является, очевидно, сечение B . От точки B' вверх против течения надо построить кри-



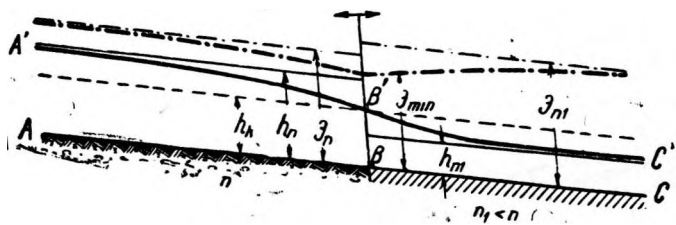
Черт. 98



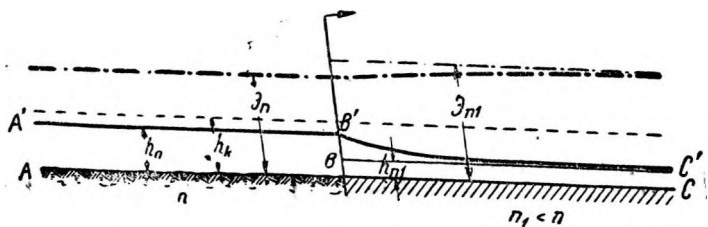
Черт. 99



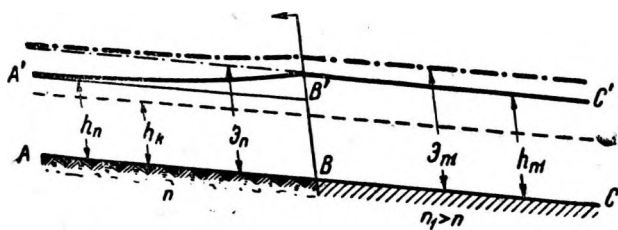
Черт. 100



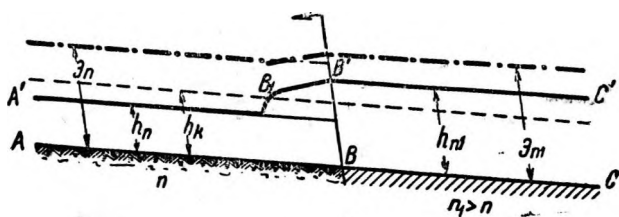
Черт. 101



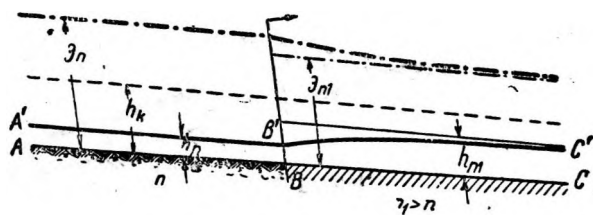
Черт. 102



Черт. 103



Черт. 104



Черт. 105

вую подпора $A'B'$. Если на участке BC (черт. 104) имеем нормальную глубину h_{n1} большую, чем h_k (спокойный водоток), а на участке AB благодаря значительно меньшей шероховатости нормальная глубина h_n меньше критической глубины h_k и при этом $\mathcal{E}_{n1} > \mathcal{E}_n$, то водоток должен в конце участка AB увеличить свою удельную энергию сечения, недостающую ему для равномерного движения на участке BC на величину $\mathcal{E}_{n1} - \mathcal{E}_n$.

Для этого он образует кривую подпора B_1B' и прыжок; эту кривую строим, начиная от точки B' .

Может случиться, что \mathcal{E}_n больше \mathcal{E}_{n1} ; при этом условии прыжок будет отогнан на участок BC , благодаря чему водоток сможет истратить лишнюю энергию $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n1}$.

Остается еще рассмотреть водоток, в котором и на участке AB с меньшей шероховатостью и на участке BC с большей шероховатостью нормальные глубины h_n и h_{n1} меньше, чем критическая глубина h_k (черт. 105). В этом случае изменение шероховатости не может отразиться на участке AB (против течения) и поэтому придется только построить кривую подпора $B'C'$ от точки B' .

§ 18. Отбирание энергии от воды, движущейся в открытом водотоке

Довольно часто изобретателями делаются предложения отбирать кинетическую энергию у текущей в реках воды при помощи тех или иных гидравлических двигателей, например, пропеллерных турбин¹; при этом обычно имеется в виду, что реку не подпирают при помощи плотин, а у воды отбирается та ее кинетическая энергия, которая соответствует бытовой скорости реки v ,.

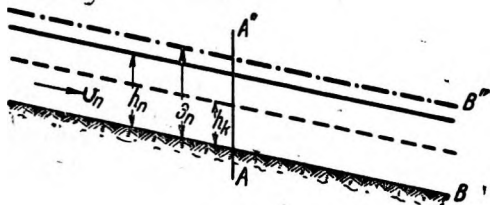
Рассмотрим сначала спокойный водоток с равномерным движением (черт. 106) со скоростью v_n .

Предположим, несколько условно, что в каком-нибудь сечении AA'' мы отнимаем при помощи соответствующего двигателя от каждого литра воды $\Delta\mathcal{E}$ (черт. 107) k гм энергии и именно кинетической энергии. Но при уменьшении кинетической энергии и скорости должно было бы увеличиться живое сечение реки, а вместе с ним и глубина. Однако увеличенной глубине, предположим h_0 , в спокойных течениях соответствует не меньшая, а большая удельная энергия сечения. Таким образом приходим к выводу, что, отнявши у водотока часть кинетической энергии $\Delta\mathcal{E}$, мы должны были бы подвести к нему в виде уже потенциальной энергии не только это же самое $\Delta\mathcal{E}$, но еще и дополнительно энергию $\Delta\mathcal{E}_1$.

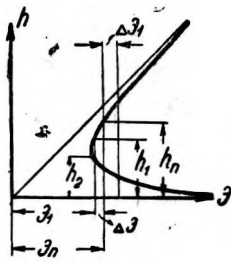
По поводу только что сказанного можно сделать возражение, что для нас не имеет значения, отбираем ли мы от реки именно кинетическую энергию или энергию вообще. Итак, пред-

¹ См. В. В. Фармаковский, Гидравлические двигатели, 1928. Также отчасти патент тов. Осадчего и др.

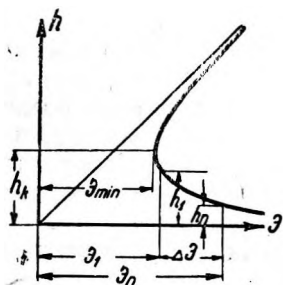
положим, что мы в сечении AA'' (черт. 106) отняли у воды некоторое количество энергии $\Delta\mathcal{E}$, включающее энергию потенциальную. Из графика $\mathcal{E}h$ на черт. 107 видно, что энергии $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_n - \Delta\mathcal{E}$ соответствует глубина h_1 меньшая, чем бытовая глубина водотока h_n . Но, как уже было доказано в § 9, вода не может в призматическом русле при спокойном течении перейти от меньшей глубины к большей вниз по течению. В самом деле, при глубине h_1 меньшей, чем h_n , линия энергии



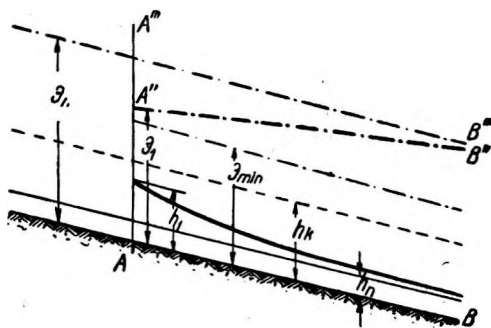
Черт. 106



Черт. 107



Черт. 108



Черт. 109

должна была бы на участке AB за сечением AA'' (черт. 106) идти круче, чем $A''B''$, так как при меньших глубинах и соответственно больших скоростях потери энергии были бы больше бытовых; но при этом линия энергии должна была бы приближаться к линии дна на расстояние меньшее, чем \mathcal{E}_{min} , а это, конечно, невозможно. Тем более водоток не может выйти за сечение AA'' с глубиной h_2 (черт. 107).

Из изложенного делаем вывод, что гидравлические двигатели, расположенные непосредственно в спокойном водотоке, могут отбирать только энергию, которая накапливается рекой благодаря подпору; при этом подпор должен вызываться самими же двигателями.

Иначе обстоит дело с бурными потоками. Если от воды такого водотока, текущего с удельной энергией сечения \mathcal{E}_n (черт. 108 и 109), отнять энергию $\Delta\mathcal{E}$ (считая, конечно, на 1 л

или 1 кг) в каком-либо сечении AA'' , то благодаря меньшей удельной энергии сечения $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_n - \Delta\mathcal{E}$ сейчас же за сечением AA'' установится глубина h_1 большая, чем h_n (черт. 109); благодаря этому на участке за двигателями потери энергии будут меньше нормальных и поэтому линия энергии $A''B''$ постепенно будет приближаться к бытовой линии энергии $A''B'''$. Ясно, что наибольшее количество энергии, которое можно отнять у бурного водотока без подпора его, будет $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{\min}$ на 1 кг воды. Большее количество энергии можно было бы получить только при условии образования перед двигателями подпора.

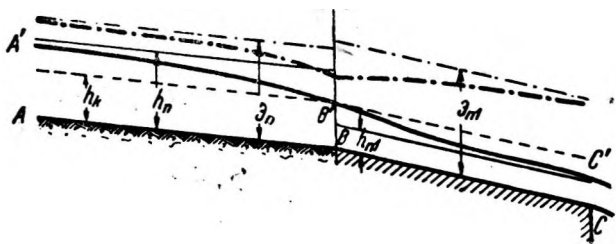
Изложенные соображения легко было бы обобщить и на тот случай, когда в реке до установки двигателя движение было неравномерное.

ГЛАВА IV

БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ В ОТКРЫТЫХ ВОДОТОКАХ. СЕЧЕНИЯ С КРИТИЧЕСКИМИ ГЛУБИНАМИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВОДЫ

§ 19. Более сложные случаи неравномерного движения в открытых водотоках

В предыдущих главах были рассмотрены сравнительно более простые причины, вызывающие неравномерное движение жидкости. Но очень часто встречаются и различные более

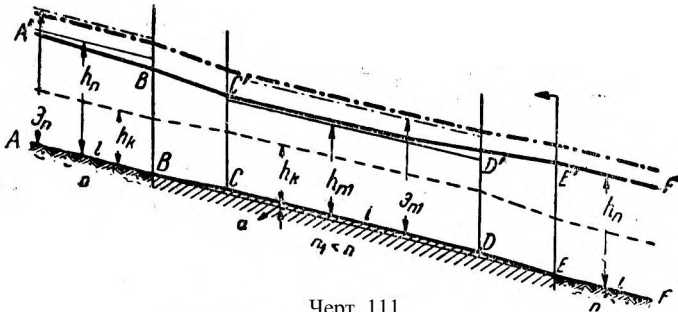


Черт. 110

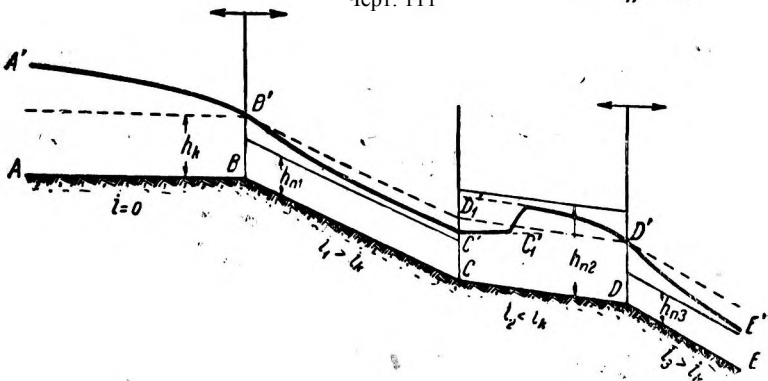
сложные, комбинированные, случаи. Например, на черт. 110 за участком AB с большей шероховатостью и уклоном, меньшим критического, идет участок BC со значительно меньшей шероховатостью и с несколько большим уклоном; благодаря этим последним двум причинам на участке BC нормальная глубина h_{n1} меньше критической глубины h_k . При таких условиях критическая глубина установится, конечно, не на перепаде в сечении C , а в сечении B ; от точки B' и нужно строить кривые спада $A'B'$ вверх против течения и $B'C'$ вниз по течению. Доказательства здесь можно и не приводить ввиду его простоты.

Следующий более сложный случай показан на черт. 111. Здесь имеем стеснение русла снизу на достаточно длинном участке CD , причем шероховатость стенок на этом участке значительно меньше, чем на соседних участках AB и EF . При некоторых соотношениях высоты a и коэффициентов шероховатости n и n_1 может случиться, что подъем дна в спокойном водотоке вызывает тем не менее кривую спада перед стесненным участком. Порядок построения ясен из чертежа.

Остановимся еще на случае, изображенном на черт. 112. Здесь можно предположить, что на различных участках изме-



Черт. 111



Черт. 112

няются не только уклоны, но и шероховатости. Величины уклонов и шероховатостей отразятся на величинах нормальных глубин h_{n1} ; h_{n2} ; h_{n3} . Если нанесем на чертеж не только линии нормальных, но и критических глубин, то сразу будет ясен характер водотока на каждом из участков; в данном случае на участках AB и CD водоток спокойный, а на участках BC и DE бурный. Как уже говорилось в предыдущем, при переходе от спокойного водотока к бурному критическая глубина h_k и \mathcal{E}_{\min} устанавливаются именно в месте перехода. В данном случае \mathcal{E}_{\min} и h_k могут установиться в сечениях B и D . Построение кривых поверхностей воды можно начать от любого из этих двух сечений, но сначала нужно произвести построения именно для участков BC и CD . Строя кривые $B'C'$ и затем $C'C'_1$, можем встре-

таться с тем случаем, который изображен на чертеже, а именно линия $C'C_1'$ подходит близко к линии критических глубин на участке CD и, следовательно, на этом участке должен образоваться прыжок. Поэтому нужно строить кривую спада $D'D_1'$ от сечения D и затем найти место прыжка хотя бы при помощи линии взаимных глубин. Однако может случиться и так, что кривая $C'C_1'$ на участке CD близко к линии критических глубин не подойдет, т. е. прыжка и участка со спокойным течением вообще не будет, а в сечении D получится глубина, меньшая критической. Наоборот, может случиться, что прыжок надвинется на участок BC или даже весь этот участок затопит, так что в сечении B установится не критическая глубина, а большая критической. Эту глубину в сечении B для последнего случая получим, строя кривые поверхностей, начиная от сечения D .

После того как будет окончательно разрешен вопрос о глубинах в сечениях B и D и о прыжке, можно построить и кривые спада на участках AB и DE .

Не будем здесь продолжать рассмотрение всевозможных комбинированных случаев; вместо этого еще раз подчеркнем всю важность определения исходных сечений для построения кривых поверхностей воды, в особенности в более сложных случаях; в правильности только что сказанного можно было убедиться из рассмотрения примеров построения кривых поверхностей воды, разобранных до сих пор; в частности можно указать и на примеры настоящего параграфа. Поэтому в следующих параграфах собраны и несколько дополнены сведения о нахождении исходных сечений.

§ 20. Сечения с критическими глубинами

Из многих примеров построения кривых поверхностей воды, приведенных в гл. II и III, а также в предыдущем параграфе настоящей главы, можно легко усмотреть, насколько полезно уметь быстро находить сечения, в которых могут устанавливаться критические глубины, так как такие сечения могут быть использованы как исходные при построении кривых поверхностей воды,

Напомним, что определить критическую глубину для какого-либо сечения можно, как известно, из формулы

$$a \frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_k^3}{B_k},$$

где ω_k и B_k представляют площадь сечения и ширину живого сечения, соответствующие критической глубине h_k .

Определение h_k при помощи приведенного уравнения обыкновенно выполняется подбором, но для прямоугольных сечений критическая глубина легко находится прямо, без применения подбора, по известной формуле

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{aQ^2}{g}}.$$

Применять каждый раз для нахождения сечений с критическими глубинами положение о возможно малой площади между линиями энергии и дна было бы, как уже говорилось, чересчур хлопотно, особенно в случае более сложных поверхностей воды, при наличии нескольких причин установления неравномерного движения воды в открытом потоке. Отсюда ясно, что следует найти специальные критерии, при помощи которых легче было бы возможно быстрее разыскивать те сечения, в которых могут устанавливаться критические глубины.

Прежде чем займемся нахождением критериев, о которых только что говорилось, отметим, что приемы гидравлических расчетов, часто применяемые до сих пор к сечениям с критическими глубинами, являются несколько неестественными и во всяком случае мало обоснованными; здесь мы имеем в виду часто встречающееся в практических расчетах применение к сечениям с критическими глубинами формул водослива с широким порогом. Искусственность такого способа вытекает из того обстоятельства, что сечения с критическими глубинами на водотоках имеют мало общего с водосливами с широким порогом, а именно, только то, что и тут и там есть критические глубины. Условия же движения воды на водосливе и на участках водотоков, на которых имеются сечения с критическими глубинами, очень часто сильно различаются¹. Надо еще добавить, что имеющиеся формулы для некоторых водосливов с непрямуюгольными сечениями струй на них сложны и не пользуются распространением.

Отсюда ясно, что более естественным является после определения места нахождения на водотоке сечения с критической глубиной определять последнюю непосредственно по имеющимся формулам для критических глубин.

С физической точки зрения критическая глубина водотока отличается, как об этом не раз говорилось, тем, что ей соответствует минимальная возможная в данном сечении и при данном расходе удельная энергия сечения:

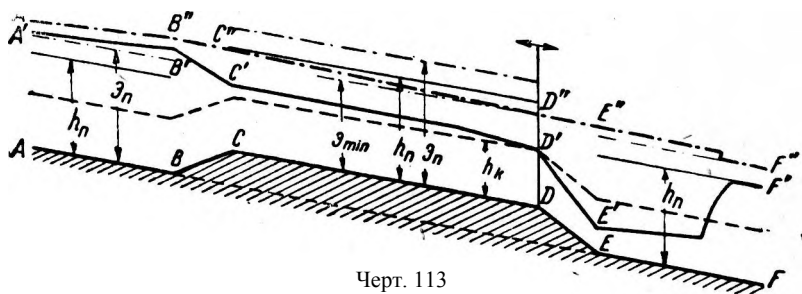
$$\mathcal{E}_{\min} = h_k + \frac{Q^3}{2 g \omega_k^2}.$$

Поэтому, вместо того чтобы искать непосредственно сечения с критическими глубинами, можно искать сечения (а иногда и целые участки), в которых удельная энергия сечения может принимать значения \mathcal{E}_{\min} .

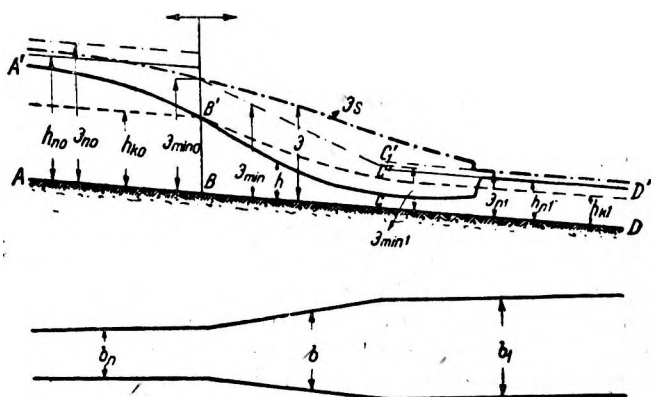
Рассмотрев внимательно изученные в предыдущем случае установления в определенных сечениях критических глубин и \mathcal{E}_{\min} , можно прийти к следующим заключениям:

¹ Такое искусственное использование теории водослива с широким порогом может даже повести к ошибкам. Так, проф. А. Н. Ахутин в цитированном уже "Специальном курсе гидравлики" на черт. 72а представляет перепад z на перепаде в русле спокойного водотока как $p + h_0 - t$, где h_0 — глубина равномерного движения до перепада, а t — бытовая глубина в отводящем русле. Это, конечно, неправильно; на самом деле $z = p + \mathcal{E}_{\min} - t$.

1. Постоянные вдоль водотока минимальная удельная энергия сечения \mathcal{E}_{\min} и критическая глубина h_k могут устанавливаться в таких сечениях, за которыми непосредственно вниз по течению переменная удельная энергия сечения \mathcal{E} увеличивается, начиная с \mathcal{E}_{\min} в рассматриваемом сечении. Примерами могут служить движения жидкости, показан-



Черт. 113



Черт. 114

ные на черт. 29, 89, 113. Надо отметить еще, что для возможности установления \mathcal{E}_{\min} в каком-либо сечении достаточно, чтобы на участке за этим сечением удельная энергия сечения даже не увеличивалась, а оставалась хотя бы равной \mathcal{E}_{\min} .

Совершенно ясно, что если бы за сечением или даже целым участком с удельной энергией сечения \mathcal{E}_{\min} удельная энергия сечения должна была бы уменьшаться, то такое движение было бы невозможно.

2. Критическая глубина h_k и \mathcal{E}_{\min} могут установиться и в таких сечениях, за которыми сама критическая глубина и \mathcal{E}_{\min} , сделавшись переменными,

начинают уменьшаться, как это имеет место, например, при плавном расширении спокойного водотока (черт. 114).

Хотя в последнем случае переменная удельная энергия сечения \mathcal{E} на участке BC в сечении B , но это не делает движение на участке BC невозможным, так как на этом участке благодаря расширению водотока и \mathcal{E}_{\min} является величиной переменной, а именно, уменьшающейся. Поэтому на участке BC удельная энергия сечения \mathcal{E} получается больше, чем \mathcal{E}_{\min} при условии, конечно, что \mathcal{E} уменьшается не так быстро как \mathcal{E}_{\min} .

Если какое-либо сечение удовлетворяет одному из указанных только что условий (или даже обоим сразу), то это еще не значит, что в этом сечении обязательно установится \mathcal{E}_{\min} и h_k . Для того, чтобы h_k и \mathcal{E}_{\min} установились в действительности, должны быть соблюдены еще некоторые дополнительные условия, о которых вкратце будет сказано в следующем параграфе.

§ 21. Об определении исходных сечений для построения кривых поверхностей воды

Как уже говорилось, построение кривых поверхностей воды при неравномерном движении следует начинать с нанесения на чертеж линии дна на продольном профиле русла, линии критических глубин по всей длине водотока и, наконец, линий поверхностей равномерного движения для тех участков с положительным уклоном дна, для которых можно определить h_n , за исключением, следовательно, участков с нулевым и отрицательным уклонами, непризматических участков, вообще таких, для которых h_n не имеется. Само собой разумеется, что необходимо иметь также подробные данные о поперечных сечениях русла и о шероховатости стенок и дна вдоль водотока, без которых нельзя строить не только кривые поверхностей воды при неравномерном движении, но и линии поверхностей воды для равномерного движения на соответствующих участках.

Переходя теперь к определению исходных сечений, отметим, что на практике они часто находятся очень легко; например, легко определяется, как уже говорилось, глубина перед водосливной плотиной, глубина на перепаде на спокойном водотоке, если только струя не подтоплена со стороны нижнего бьефа, и в других случаях.

Если имеем дело с более сложными сопряжениями кривых поверхностей воды, то можно, конечно, пользоваться теми же двумя частными положениями, которые были обоснованы в § 9 и использованы в гл. II и III.

При этом именно в более сложных случаях окажется полезным для определения исходных сечений иметь в виду следующее обстоятельство. Так как в спокойных течениях влияние сооружений и других причин установления неравномерного движения распространяется против течения, то на спокойных те-

чениях следует искать исходные сечения, идя вниз по течению. Наоборот, в бурных течениях исходные сечения нужно разыскивать в направлении вверх против течения.

Однако можно предложить и несколько иной путь определения на водотоке исходных сечений для построения кривых поверхностей воды при неравномерном движении ее. Именно, можно начать с разыскания сечений, в которых могут установиться критические глубины. Для этого можно использовать те два сформулированные в предыдущем параграфе критерия или условия, при выполнении которых в том или ином сечении может установиться критическая глубина. Но не составляет большого труда запомнить наиболее часто встречающиеся, а потому и наиболее практически важные случаи сечений, удовлетворяющих одному из только что упомянутых условий или даже обоим сразу.

В соответствии с первым критерием § 20 к числу сечений, в которых могут установиться критические глубины, принадлежат сечения на перепадах спокойных водотоков (черт. 29). Затем надо упомянуть сечения в местах изменения уклона дна водотока от значений меньших, чем критические, к значениям большим, чем последние (черт. 89). Весьма близок к только что указанным случаям и случай стеснения спокойного водотока снизу на некоторой длине (черт. 113); критическая глубина устанавливается в конце наиболее стесненного участка. Эти случаи широко известны среди проектирующих инженеров.

Менее известным является установление критической глубины в тех сечениях, перед которыми русло водотока имеет большую шероховатость и потому нормальная глубина h_n больше критической h_k и за которыми благодаря меньшей шероховатости и значительному уменьшению нормальной глубины h_n (черт. 93, 97, 99, 101) водоток становится бурным.

На бурных водотоках критическая глубина может иметь место в начале наиболее стесненного снизу или с боков участка (черт. 44, 55, 67).

В соответствии со вторым условием, указанным в § 20, критические глубины могут устанавливаться в конце наиболее стесненного с боков участка спокойного водотока (черт. 71).

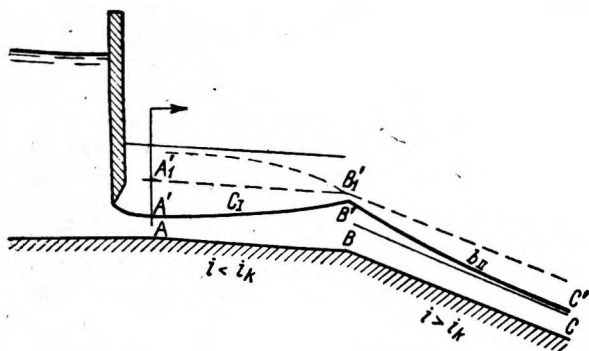
Весьма часто встречаются сечения, которые удовлетворяют одновременно обоим критериям возможности установления критических глубин, т. е. после этих сечений удельная энергия сечения \mathcal{E} может возрастать, а удельная энергия сечения \mathcal{E}_{\min} уменьшается (черт. 42, 65).

При стеснениях водотоков сверху на части их ширины плашкоутами, понтонами и т. п. критическая глубина может установиться в конце наиболее стесненного участка (черт. 58) в спокойном водотоке и при входе в наиболее стесненный участок на бурных водотоках (черт. 62).

Не будем останавливаться на некоторых других случаях, в которых также возможно установление критической глубины в том или ином сечении (см. § 18, 24); эти случаи встречаются реже и имеют меньшее практическое значение.

Перейдем к рассмотрению других условий установления критических глубин в указанных только что сечениях.

Для выяснения вопроса рассмотрим сперва движение воды при условиях, изображенных на черт. 115. В сечении B , в соответствии со сказанным в § 20 и в начале настоящего параграфа, могла бы установиться критическая глубина: однако критическая глубина установится в этом сечении на самом деле только при условии, что вода свободно подходит к этому сечению, так что перед сечением B может установиться кривая спада $A'B'$. Если же вода будет поступать на участок AB перед сечением B с очень большой скоростью, например, при истечении из-под щита, то кривая подпора c_1 может дойти до сечения B , оста-



Черт. 115

ваясь ниже линии критических глубин и сохраняя удельную энергию сечения \mathcal{E}_{\min} . Ясно, что в этом случае в сечении B установится глубина BB' , а не h_k . При изложенных условиях исходным сечением для построения кривых поверхностей воды будет сечение A , в кото-

ром глубина известна из условий истечения воды из-под щита. Построив кривую $A'B'$, строим дальше кривую $B'C'$.
Обобщая только что изложенное скажем, что критическая глубина может установиться в том или ином сечении водотока при условии, чтобы перед этим сечением не могло иметь места бурное течение, которое могло бы распространиться до рассматриваемого сечения. Отметим, между прочим, что возможен и переходной случай, когда бурное течение подойдет к сечению как раз с критической глубиной; однако этот случай может встретиться лишь очень редко.

Если имеются основания к тому, чтобы предположить возможность установления на участке AB бурного течения, то нужно построить кривую спада $A'B'$, начиная от сечения B , и убедиться, что где-либо на участке AB (черт. 115) образуется прыжок или даже, в условиях нашего чертежа, отверстие под щитом затопит; в таком случае в сечении B может установиться критическая глубина. Если ни образование прыжка, ни затопление не будут иметь места, то при наличии перед сечением B бурного течения последнее распространится до этого сечения: в таком случае, как это уже указывалось, критическая глубина в сечении B не сможет установиться и исходное сечение расположится где-то выше сечения B . Иногда может оказаться

более выгодным сразу строить кривую $A'B'$, найдя предварительно исходное сечение A ; если при построении кривой $A'B'$ дойдем до сечения B с глубиной, меньшей критической, то избежим построения кривой $A'_1B'_1$.

Однако, даже убедившись, что на участке AB перед сечением B не будем иметь бурного течения, еще нельзя категорически утверждать, что в этом сечении не только может установиться, но и обязательно установится критическая глубина. Для окончательного решения вопроса необходимо еще рассмотреть условия движения воды за исследуемым сечением. С этой целью обратимся опять к какому-либо конкретному примеру, например, к случаю движения воды, условия которого показаны на черт. 40.

В спокойном водотоке в соответствии с критериями, указанными в предыдущем § 20, в сечении D могла бы установиться критическая глубина h_{k1} . Установление последней возможна также благодаря тому обстоятельству, что перед сечением D нет оснований ожидать бурного течения. Но так как за сооружением на участке EE вода должна двигаться с весьма значительной удельной энергией сечения \mathcal{E}_n , значительной по сравнению с $\mathcal{E}_{\min 1} + a$, то в сечении D критическая глубина h_{k1} и $\mathcal{E}_{\min 1}$ не могут установиться. Убедиться в этом можно, построив кривую поверхности воды $D'E'$; если глубина DD' , полученная при построении кривой $D'E'$, окажется большей, чем h_{k1} , то в сечении D установится не критическая глубина h_{k1} , а глубина DD' . За сечением D будем иметь спокойное течение, тогда как после сечения, в котором установилась критическая глубина, течение должно быть обязательно бурное (см., например, черт. 42).

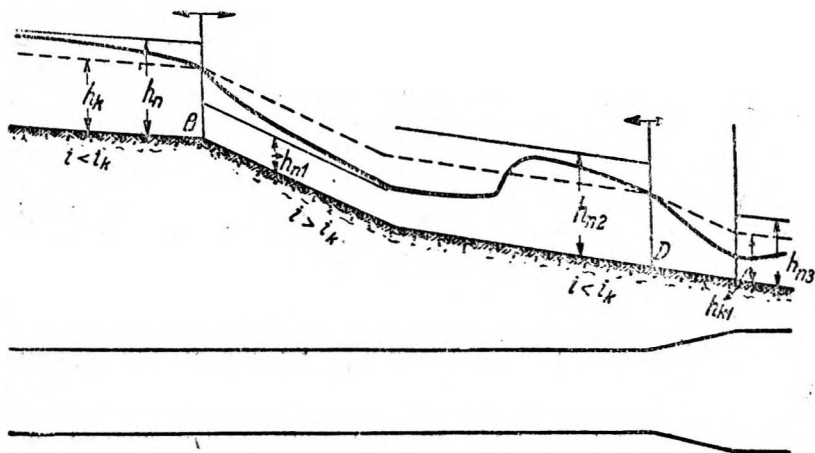
Несколько обобщая только что изложенное, можем сказать, что в каком-либо сечении может установиться критическая глубина, если за этим сечением будет иметь место бурное течение (или падение струи в воздухе, как на перепаде).

Если в сечении D критическая глубина установиться не может (черт. 40), так как глубина в нем больше критической, то это сечение уже не может быть исходным для построения кривых поверхностей воды; исходное сечение в этом случае должно находиться ниже по течению: например, на черт. 40 оно находится в сечении E , как это и было принято при построении кривой поверхности воды $D'E'$.

Остановимся еще на водотоках, на которых имеются два сечения с критическими глубинами (см., например, черт. 115). В этом случае после сечения B , расположенного выше сечения D , будем иметь бурное течение, а перед сечением D спокойное течение. Между этими сечениями должен иметь место переход от бурного к спокойному течению. Обычно этот переход происходит при помощи водяного прыжка: об определении места.

¹ Опять-таки и здесь возможен исключительный случай, когда, строя кривую $D'E'$ (черт. 40), придем к сечению D с глубиной, как раз равной критической глубине h_{k1} , хотя течение за сечением D спокойное.

прыжка уже было сказано. Иногда, впрочем, переход от бурного к спокойному течению может, как известно, произойти и без прыжка — на участке с критическим уклоном. Если прыжок



Черт. 116

представляется по тем или иным причинам нежелательным, то такой участок с критическим уклоном в подходящем месте устраивают нарочно.

ГЛАВА V

НЕПЛАВНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЖИВЫХ СЕЧЕНИЙ, ИЗМЕНЕНИЕ РАСХОДА ВДОЛЬ ВОДОТОКА И МЕСТНЫЕ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

§ 22. О сущности местных потерь, гашении энергии и перемешивании жидкостей в открытых водотоках

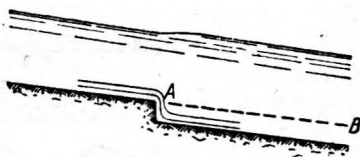
В предыдущей части работы были рассмотрены разнообразные случаи неравномерного движения в открытых водотоках, причем эта неравномерность движения возникала вследствие плавных стеснений или расширений русла, небольших изменений уклона дна, изменений шероховатости и пр.

В этих случаях поток следует за очертанием стенок и дна русла или сооружения. В действительности чрезвычайно часто встречаются более или менее резкие изменения сечения, в частности резкие расширения русла; весьма крутые изменения направления всего русла встречаются реже, но местные резкие изменения направления или повороты стенок и дна встречаются очень часто.

Резкие изменения живого сечения потока могут получаться не только в результате местных отклонений от призматичности самого русла, но и при образовании водяного прыжка. В пере-

численных случаях наблюдаются при движении в открытых руслах более или менее значительные потери энергии, которые следует называть "местными потерями". Эти местные потери в открытых водотоках исследованы пока мало¹. При исследовании этих потерь, имеющих большое значение, несомненно следует использовать новые достижения аэро- и гидромеханики, в частности результаты исследования Л. Прандтля и др. в отношении пограничного слоя. Однако при этом нужно иметь в виду и особенности движения в открытых руслах.

Рассмотрим прежде всего резкое изменение направления стенок или дна открытого русла возле выступа *A* (черт. 117). Если бы струйки возле выступа следовали достаточно близко за направлением стенки, то это имело бы следствием, как это доказывается в теоретической гидромеханике, чрезвычайное увеличение скоростей возле точки *A* — теоретически скорость здесь должна была бы возрасти до бесконечности². Однако указанные теоретические соображения имеют кинематический характер, они не учитывают энергетической стороны явлений, так как исходят из уравнения неразрывности движения жидкостей.



Черт. 117

На самом деле большое возрастание скорости у порога не может иметь места; это потребовало бы подведения воде энергии извне, так как вода подходит к порогу *A* с некоторым определенным запасом потенциальной энергии, которая может преобразоваться в кинетическую энергию. Но энергия извне воде не подводится; поэтому струйки не будут огибать порог, следуя близко за поворотом стенки, а вместо этого пойдут прямо, образуя так называемую поверхность раздела *AB*; по одну сторону ее будем иметь довольно значительную скорость, а по другую сторону "мертвую воду". Такое объяснение срыва

¹ Можно указать на такие работы:

1. Статья Raju о потерях на закруглениях в открытых водотоках, помещенная в *Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München*, Heft 6.

2. Статьи Kirschmer'a и Spangler'a о потерях в решетках в тех же *Mitteilungen*, Heft 1 и Heft 2.

3. О потерях в изгибах безнапорных водоводов в § 70 книги В. Р. Сгеагер and I. D. Justin, *Hydro-Electric Handbook* (в русском переводе этой книги см. стр. 147. в первом томе).

4. I. Hinds, *The Hydraulic Design of Flume and Siphon Transactions*, Transactions A. S. C. E., 1928.

5. Гидроэлектропроект. "Местные сопротивления в открытых руслах", "Гидротехническое строительство" № 11, 1936 и некоторые другие.

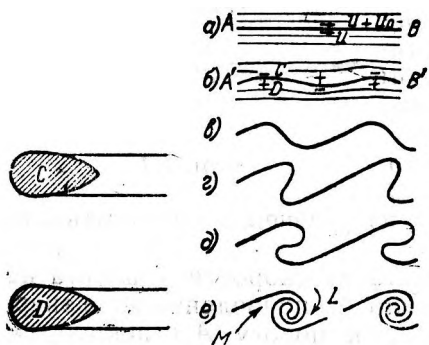
Вопросам о потерях энергии в прыжке и о гашении энергии посвящено очень много работ зарубежных и советских гидравликов; однако, вопросы эти еще далеко не выяснены.

² См., например, L. Prandtl-O. Tietjens, *Hydro-und Aeromechanik*, Erster Band, 1929 (есть русский перевод) § 77.

струи возле выступающих углов является более естественным чем объяснение этого явления особым принципом¹.

Дальнейшую судьбу описанной "поверхности раздела" проследим немного ниже, а сейчас рассмотрим еще другой случай образования поверхностей раздела. Предположим, что в спокойном водотоке поставлены какие-либо сооружения, например, быки (черт. 118). При течении за последними поток должен был бы расширяться; это сопровождалось бы увеличением глубины, а следовательно, и давления при условии, что струя не отрывалась бы от поверхности быков. Однако жидкость из области с меньшим давлением (точнее, из области с меньшей потенциальной энергией) может течь в область с большим давлением только за счет кинетической энергии. Так как жидкость в пограничном слое, образуемом на стенках сооружения, имеет

малую кинетическую энергию, то она лишена возможности двигаться по расширяющемуся участку и срывается с поверхности сооружения быков (на черт. 118); в результате образуются поверхности (вернее, слои) раздела. Очевидно, могут иметь место и различные комбинированные случаи образования поверхностей раздела. Очень часты в гидротехнических сооружениях случаи стеснения русла с последующим его расширением и образующимися при этом по-



Черт. 118

Черт. 119

верхностями раздела. Родственность явлений, имеющих место при таком стеснении русла, с описанными выше случаями образования поверхностей раздела не требует пояснений.

Поверхности раздела образуются и в том случае, когда струя жидкости попадает в жидкость, движущуюся с иной скоростью или покоящуюся.

Можно доказать, что поверхности раздела неустойчивы², они разлагаются на вихри. Изложим вкратце это доказательство. Допустим, что образовалась поверхность раздела AB (черт. 119, a). Всегда найдется достаточно причин, благодаря которым эта поверхность отклонится от своей формы, приняв некоторый волнообразный вид хотя бы и с очень малой высотой волн (черт. 119, b); при этих условиях возле вершины выступа C будем иметь стеснение верхней струи, увеличение в ней скорости, а следовательно, уменьшение давления, что и отмечено знаком $-$; наоборот, с другой стороны, у точки D получится увеличение давления, что отмечено уже знаком $+$.

¹ См. Т. Пешль, П. Эвальд, Л. Прандтль Физика упругих и жидких тел, Москва — Ленинград, 1933, стр. 206.

² См. цитированную книгу L. Prandtl'я и O. Tietjens'a.

Благодаря разности давлений высота выступа будет увеличиваться, а благодаря относительной скорости u_0 волна делается несимметричной (119, в); эта несимметричность увеличивается, волна опрокидывается и сматывается в вихри¹ (119, г — 119, е). Здесь процесс, конечно, схематизирован. Не надо думать, что в действительности сначала полностью образуются поверхности раздела, а затем только начнется образование вихрей; вернее будет сказать, что поверхность раздела обычно разлагается на вихри сразу же в процессе своего образования.

Эти рассуждения о неустойчивости поверхностей раздела несомненно должны быть использованы для выяснения сущности местных потерь в открытых водотоках, а также и процессов гашения энергии, так как последние не отличаются от явлений, наблюдаемых при местных потерях энергии. В самом деле, в кинетическую энергию вращательного движения вихрей преобразовывается кинетическая энергия движения струи. Кинетическая энергия вихрей для главного поступательного движения потока теряется. Сами вихри, вообще говоря, тоже неустойчивы. Двигаясь вместе с жидкостью с некоторой скоростью², они распадаются, вероятно, на более мелкие завихрения, которые постепенно исчезают; при этом их механическая энергия превращается в тепловую, т. е. она, как говорят, «теряется» или «гасится». Собственно говоря, энергия является потерянной для основного движения уже с того момента, когда она переходит в энергию вихревого движения, так как энергия последнего движения хотя и является еще механической, но она обречена уже на превращение в тепловую; превратить ее обратно в энергию основного движения вдоль русла мы не умеем.

Таким образом в области, где могут образоваться поверхности раздела, получаем движение чрезвычайно завихренное, близкое по своей природе к обычному турбулентному движению. Л. Прандтль называет даже случаи движения струи жидкости в жидкости без ограничивающих стенок³ «свободной турбулентностью».

Заметим далее, что каждый вихрь образуется частично из жидкости, движущейся (черт. 119) с большей скоростью $u+u_0$ по одну сторону поверхности раздела, частично из жидкости, движущейся с меньшей скоростью и по другую сторону той

¹ Слово вихрь применяем не в строго гидродинамическом, а в несколько более широком смысле, как это встречается в работах Л. Прандтля.

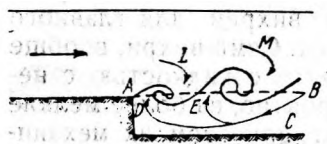
² Эта скорость вихрей сразу же после их образования равна приблизительно средней арифметической (черт. 119, а) из скоростей u и $u+u_0$.

³ См. L. Prandtl, Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, ZAMM, Band 5, 1925, H. 2.

См. также статью Гольмина в том же журнале за 1926 г. и монографию Г. Н. Абрамовича. Теория свободной струи и ее приложения, труды ЦАГИ, вып. 293, 1936.

же поверхности. Это особенно ясно из черт. 119, *e*. Таким образом получаем еще одно важное заключение: поверхности раздела и образующиеся из них вихри не только являются причиной местных потерь и гашения энергии, но благодаря им части жидкости хорошо перемешиваются друг с другом. Правильнее будет сказать, что процессы гашения энергии и механического перемешивания жидкости являются разными сторонами одного и того же процесса.

Изложенные соображения хотя и не дают пока возможности производить расчеты местных потерь энергии, процессов гашения энергии и процессов механического перемешивания жидкостей, но они все-таки дают возможность более сознательно подойти к проектированию гидротехнических сооружений и различных приборов



Черт. 120

или по крайней мере их моделей, подлежащих испытанию в лаборатории. В зависимости от преследуемой данным сооружением или прибором цели возникают и должны быть разрешены вопросы о количестве поверхностей раздела, расстояний их друг от друга, скоростях жидкостей и пр.

Далее, если принять изложенный взгляд, то можно будет попытаться и в гидротехнических сооружениях управлять пограничным слоем в желательном направлении.

Рассмотрим теперь несколько подробнее некоторые конкретные случаи местных сопротивлений, например, уступ на дне спокойного водотока (черт. 120). Вместо поверхности раздела, о которой говорилось выше, фактически получим ряд вихрей, уносимых вниз по течению. Вихри образуются не только за счет воды основного потока, движущегося в данном случае над поверхностью *AB*, но и за счет воды из пространства под этой поверхностью; приток воды к вихрям показан на чертеже стрелочками *D*, *E*, *C*, *L* и *M*. Но если из-под поверхности *AB* вода забирается, то туда она должна все время и поступать. В результате под поверхностью *AB* и образуется так называемый валец, в данном случае с горизонтальной осью.

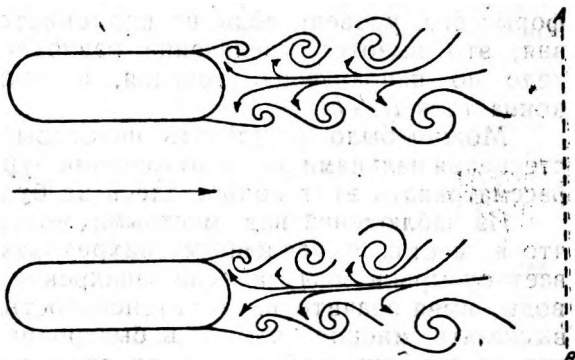
Рассмотрим еще движение за быками в реке (черт. 121). И здесь, конечно, вместо поверхностей раздела получаем ряды вихрей, между которыми существуют обратные течения. Такие обратные течения в результате дают вальцы с вертикальными осями. Следует отметить, что ряды вихрей не образуют в действительности так называемых дорожек Бенара-Кармана в той форме, как они описываются в книгах по гидро- и аэромеханике.

На самом деле завихрения вниз по течению проникают все

дальше в основной поток, усиливая его турбулентность и постепенно затухая¹.

В связи с протеканием потока через отверстия между быками необходимо разъяснить могущее возникнуть недоразумение, В § 9 доказывается, что сооружения не влияют на водоток вниз по течению, если за сооружением имеется спокойное течение. Теперь можно пояснить, почему к этому утверждению сделана оговорка, что оно применимо при условии медленно изменяющегося течения. В самом деле, на примере обтекания быков, имеющих обычно не вполне удобообтекаемую форму, видно, что влияние их и в спокойных течениях распространяется вниз по течению в виде образующихся и уносимых потоком вихрей.

При желании указанное только что противоречие можно было бы устранить, представляя себе сооружение, в данном случае бык, продолженным до какого-то сечения потока *AB* (черт. 121), в котором уже не имеется пространства с текущей обратно водой, а также более или



Черт. 121

менее усиленной завихренности. Такое представление является обоснованным, так как пространство за быками с текущей обратно водой стесняет сечение водотока до некоторой степени аналогично самим быкам; но конечно, ширину мысленно продолженных быков или других сооружений нужно представлять себе постепенно уменьшающейся по мере приближения к сечению *AB*. Потери энергии от завихрений распределяются на весь участок от конца сооружения до сечения *AB*, так что эти потери являются "местными" до некоторой степени условно, как это можно сказать и относительно более изученных местных потерь в трубах.

Описанные вальцы и завихрения, образующиеся за быками и различными другими сооружениями неудобообтекаемой формы, стесняют здесь поток на некотором, сравнительно коротком, участке. Этими стеснениями потоков легко объясняются понижения уровня в спокойных водотоках, которые наблюдаются за такими сооружениями. Подобные понижения в спокойных водотоках описаны в цитированной уже работе Б. А. Бахметева "Hydraulics of Open Channels" фиг. 18, стр. 60 или русский перевод стр. 50, а также в цитированной книге А. Коха-М. Карстаньена

¹ Аналогичное наблюдение описано в статье N. W. A k i m o f f, Über das Wesen des Mitstromes, Jahrbuch des schiffbautechnischen Gesellschaft, 36 B., 1934.

"Über die Bewegung des Wassers...", фиг. 87 и след. Объяснение таких понижений уровня (по сравнению с нормальным уровнем) потерями энергии, как это делают А. Кох и Б. А. Бахметев, нельзя признать правильным — ведь водоток с удельной энергией сечения меньшей, чем нормальная \mathcal{E}_n , не мог бы перейти вниз по течению к нормальной глубине, к которой он в действительности переходит. Потерями можно и нужно в спокойных водотоках объяснить только подпор перед сооружением.

По этой же причине у заднего конца стесняющего водоток сверху тела $RSTU$ (черт. 56), при не вполне удобообтекаемой форме его, уровень воды не поднимается до нормального уровня; это вызовет увеличение равнодействующей давления на тело по направлению течения, а также опускание заднего конца тела $RSTU$.

Можно было бы сделать некоторые выводы относительно стеснения вальцами за сооружениями бурных водотоков, однако рассматривать этот вопрос здесь не будем.

Из наблюдений над местными потерями хорошо известно, что в местах с усиленным вихреобразованием вода захватывает пузырьки воздуха, если завихрения достигают поверхности воды, имея значительную интенсивность. В связи с этим можно высказать мнение, что и в быstroтоках захват воздуха зависит от степени турбулентности движения. Последняя же в быstroтоках является функцией числа Рейнольдса и шероховатости стенок.

§ 23. Об учете местных потерь энергии при рассмотрении движения воды в открытых водотоках и сооружениях на них

Рассмотрим теперь вопрос, как ввести местные потери энергии в открытых водотоках в гидравлические расчеты. Если припомним, что даже более изученные местные потери в трубах обычно представляют сосредоточенными в определенных сечениях, а не распределенными по некоторым участкам, то можно прийти к заключению, что и в открытых водотоках мы будем вынуждены видимо еще долго учитывать местные потери грубо, например, представляя их себе сосредоточенными в определенных сечениях, обычно в таких сечениях, за которыми происходит резкое расширение русла или струи.

Для примера рассмотрим протекание спокойным водотоком мостового отверстия (черт. 122) при наличии в нем местных потерь. Как уже указывалось, следовало бы считать, что устои как бы продолжены до некоторого сечения D , причем стеснение русла от сечения B к сечению D постепенно уменьшается. Местная потеря энергии h_B распределена как-то по всему участку BD ; но по изложенным выше соображениям можно было бы пока довольствоваться хотя бы тем, чтобы считать местную потерю h_B сосредоточенной в сечении B . Добавив ее

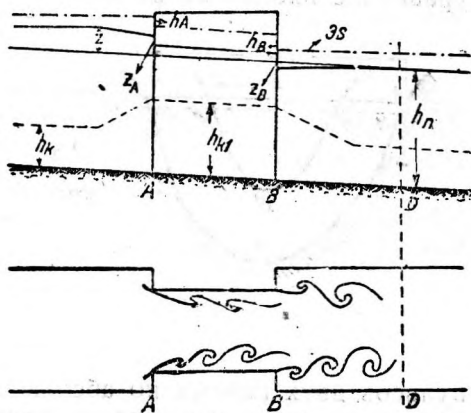
к удельной энергии сечения \mathcal{E}_n , мы смогли бы по энергии найти глубину в сечении B , а значит, и приращение глубины z_B в том же сечении. Аналогичную задачу нужно было бы решить и для сечения A , за которым благодаря расширению струи после ее сжатия также будем иметь местную потерю.

Здесь нужно бы иметь в виду, что явления вихреобразования за сечением A взаимодействуют, интерферируют с вихреобразованием за сечением B . Эта интерференция имеет место, если длина участка AB невелика, так что вихри, образовавшиеся за сечением A , не успеют в достаточной степени угаснуть до сечения B . Так как интерференция сопротивлений в мостовых отверстиях имеет место в большей или меньшей степени, то вполне понятно, почему подпор от мостов обычно определялся при экспериментальных исследованиях сразу суммарно, а не отдельно при входе и выходе из мостовых отверстий.

Определение потери h_B независимо от h_A может повести при наличии интерференции к некоторым неточностям. Однако во многих случаях с такими неточностями пока приходится мириться, так как вычисление потерь при входе и выходе из сооружений, а также и в других случаях местных потерь мы можем производить обычно даже и при отсутствии интерференции только весьма грубо. Такие вычисления можно производить, пользуясь данными из работ, указанных в начале предыдущего параграфа.

Однако соответствующих экспериментальных данных о местных потерях в открытых водотоках пока имеется мало и поэтому даже и для грубых расчетов этих данных очень часто не хватает. В последнем случае приходится обратиться к исследованиям моделей сооружений в лабораториях. Довольно часто, впрочем, можно разрешить вопрос о движении с местными потерями в открытом водотоке, воспользовавшись вместо уравнения Д. Бернулли (или понятия об удельной энергии) законом количества движения.

Выясним прежде всего вопрос, почему к движению с местными потерями можно, прилагая закон количества движения, получить во многих случаях определенные решения, тогда как уравнение Д. Бернулли таких решений не дает. Это объясняют тем обстоятельством, что в уравнение живых сил и получающееся из него уравнение Д. Бернулли должна войти работа не

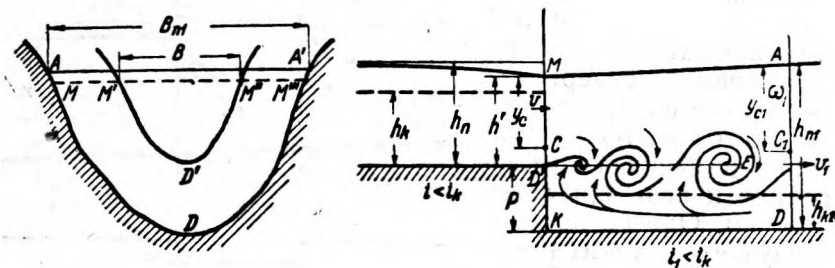


Черт. 122

только внешних, но и внутренних сил для выделенного объема жидкости.

При наличии поверхностей раздела внутри рассматриваемого объема слои скользят один по другому и поэтому окажутся не равными друг другу пути точек приложения сил действия и противодействия, а работа внутренних сил получится не равной нулю. Так как вычисление работ этих внутренних сил ввиду запутанности процессов движения при наличии поверхностей раздела пока не представляется возможным, то ясно, что к объемам жидкости с поверхностями раздела внутри этих объемов нельзя прилагать закон живых сил, а значит, и уравнение Д. Бернулли.

Иначе обстоит дело с уравнением количеств движения; в это уравнение входят не работы сил, а их импульсы; сумма же им-



Черт. 123

пульсов двух равных по абсолютной величине и противоположных по направлению сил действия и противодействия всегда будет равна нулю. Поэтому внутренние силы, имеющиеся внутри жидкости, ни при каких условиях не могут входить в уравнение количеств движения. Вот почему закон количеств движения мы можем использовать для исследования пространства, заполненного жидкостью, в которой имеются поверхности разрыва, разлагающиеся на завихрения, хотя самые эти завихрения более или менее обстоятельному непосредственному исследованию пока и не поддаются. В уравнение количеств движения входят кроме массовых сил только величины, характеризующие состояние жидкости на границах исследуемого объема — силы давления и скорости. Ясно, что уравнение количеств движения может установить связи только между указанными здесь величинами.

Применяя закон количеств движения к тому или иному конкретному случаю движения жидкостей, приходится сделать еще некоторые упрощения, которые облегчают исследование, хотя и делают его, конечно, менее точным. Выясним сказанное на примере резкого расширения русла в общем случае и в стороны и вниз (черт. 123), причем ограничиваемся случаем, когда $h_n > h_k$ и $h_{n1} > h_{k1}$.

Выделим на водотоке объем между сечениями MK и AD , при этом сечение AD берем на таком расстоянии KD от пере-

пада дна, чтобы за этим сечением движение жидкости происходило опять параллельными струйками. Теперь сделаем такие упрощающие исследование допущения: 1) будем, во-первых, считать дно на участке KD горизонтальным, что для рассматриваемого спокойного водотока не может повлечь заметной ошибки в результате; 2) не будем далее учитывать силы трения воды о русло на том же участке KD ; это допущение приходится сделать, так как при весьма сложном и неизученном характере движения на участке KD крайне трудно вычислить величину силы трения; при этом опять-таки можно полагать, что сила трения на коротком участке по своей абсолютной величине будет невелика; 3) для того чтобы можно было применить закон количеств движения к выделенному объему, необходимо еще установить распределение давления жидкости по площади $MM'D'M''D$ в месте резкого изменения сечения, так как достаточных данных об этом распределении пока не имеется, то делаем довольно естественное предположение, что давление распределяется по этой площади по законам гидростатики, т. е. по тому же закону, что и по площади сечения струи $M'D'M''$. Следовательно, обе указанных площади можем рассматривать как одну площадь $MM'M''M''D$, обозначив ее буквой Ω .

Приращение количества движения жидкости, находящейся в данный момент в выделенном объеме между сечениями MK и AD , отнесенное к одной секунде, будет

$$\frac{\alpha_0 \omega_1 v_1 \gamma}{g} v_1 - \frac{\alpha_0 \omega v \gamma}{g} v$$

или, принимая $\alpha_0 \approx 1$,

$$\frac{\omega_1 v_1^2 \gamma}{g} - \frac{\omega v^2 \gamma}{g}.$$

Сумма импульсов сил давлений на оба сечения за 1 секунду:

$$\Omega y_c \gamma - \omega_1 y_{c1} \gamma.$$

Тут y_c — глубина центра тяжести площади Ω под уровнем воды $MM'M''M''$, а y_{c1} — глубина центра тяжести сечения ω_1 под уровнем AA' ; уровень MM'' считаем прямой горизонтальной линией, хотя в действительности это и не совсем так.

Уравнение количеств движения теперь можем написать так:

$$\frac{\omega_1 v_1^2}{g} \gamma - \frac{\omega v^2}{g} \gamma = \Omega y_c \gamma - \omega_1 y_{c1} \gamma.$$

Иначе

$$\frac{\omega v^2}{g} \gamma + \Omega y_c \gamma = \frac{\omega_1 v_1^2}{g} \gamma + \omega_1 y_{c1} \gamma. \quad (33)$$

Заменяя v и v_1 через $\frac{Q}{\omega}$ и $\frac{Q}{\omega_1}$, можем это уравнение переписать еще так:

$$\frac{Q^2}{g\omega} \gamma + \Omega y_c \gamma = \frac{Q^2}{g\omega_1} \gamma + \omega_1 y_{c1} \gamma. \quad (33a)$$

Как известно, выражение $\omega \frac{v^2}{g} \gamma$ представляет давление струи, движущейся со скоростью v и живым сечением ω , на плоскость, перпендикулярную к направлению движения потока. Таким образом каждая сторона уравнения (33), или соответственно уравнения (33 а), представляет сумму гидростатического давления и давления струи, которую назовем полным давлением сечения¹. Эта сумма при сделанных выше допущениях является вдоль потока величиной постоянной. Все члены уравнения (33) и (33а) можно сократить на γ или считать γ равной единице; последнее предположение для воды означает, что силы давления выражались бы в тоннах, если размеры брать в метрах. Следовательно,

$$\frac{Q^2}{g\omega} + \Omega y_c = \frac{Q^2}{g\omega_1} + \Omega y_{c1}. \quad (34)$$

Для спокойного водотока величины ω_1 и y_{c1} в сечении AD будут известными, поэтому известной нужно считать и всю правую часть уравнения (34); это суммарное давление обозначим

для сечения AD буквой θ_1 ; таким образом имеем

$$\frac{Q^2}{g\omega} + \Omega y_c = \theta_1.$$

Величины ω , Ω и y_c в плоскости изменения сечения MK зависят от глубины h' в этом сечении. Следовательно, всю правую часть уравнения (34) можно рассматривать как функцию глубины h' ; эту функцию опять-таки обозначим буквой θ :

$$\theta = \frac{Q^2}{g\omega} + \Omega y_c.$$

Уравнение (34) можно решить для сечений русла произвольной формы только подбором. Удобно и гораздо нагляднее решать это уравнение графически. Для этого нужно выражение

$$\theta = \frac{Q^2}{g\omega} + \Omega y_c$$

представить в виде функции от h' (черт. 124). Полученный график можно бы назвать графиком θh .

Для примера на черт. 124 задача решена для следующих условий:

Сечения канала до перепада и после него приняты прямоугольными; ширина до перепада $B = 1$ м, ширина за перепадом $B_{n1} = 2$ м; расход $Q = 2$ м³/сек; высота перепада дна $p = D'K = 0,5$ м;

¹ Ср. цитированную книгу А. Коха — М. Карстаньена (русский перевод), стр. 50 — 56.

пусть $i > i_1$; нормальная глубина за перепадом $h_{n1} = 1,5$ м, а перед ним $h_n = 1$ м.

Вычислим сначала критические глубины:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{2^2}{g}} \approx 0,743 \text{ м}; \quad h_{k1} = \sqrt[3]{\frac{q_1}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1^2}{g}} \approx 0,467 \text{ м};$$

$$\Theta_1 = \frac{Q^2}{g B_{n1} h_{n1}} + B_{n1} y_{c1} = \frac{2^2}{g \cdot 2 \cdot 1,5} + 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} \approx 2,407.$$

Теперь напишем

$$\frac{Q^2}{g B h'} + \frac{B (p + h')^2}{2} = 2,407$$

или после подстановки числовых величин

$$\frac{0,408}{h'} + (0,5 + h')^2 = 2,407.$$

На черт. 124 представлена функция

$$\Theta = \frac{0,408}{h'} + (0,5 + h')^2.$$

По оси абсцисс откладываем $\theta_1 = 2,407$; на графике получаем глубину $h' = 0,895$ м, превышающую критическую глубину $h_k = 0,743$ м для верхней части канала. Поэтому в этой части канала можем построить кривую спада b_1 . Конечно, искомую глубину h' на перепаде можно определить, не строя графика $\theta h'$, непосредственно из уравнения:

$$\frac{0,408}{h'} + (0,5 + h')^2 = 2,407.$$

Имея теперь глубину h' , можем вычислить "местную" потерю энергии на участке KD :

$$h_r = h' + \frac{v'^2}{2g} + p - \left(h_{n1} + \frac{v_{n1}^2}{2g} \right).$$

Скорость в сечении MD'

$$v' = \frac{Q}{B h'} = \frac{2}{1 \cdot 0,895} = 2,23 \text{ м/сек};$$

$$v_1 = \frac{Q}{B_{n1} h_{n1}} = \frac{2}{2 \cdot 1,5} = 0,667 \text{ м/сек}.$$

После подстановки получим для местной потери

$$h_r = 0,895 + \frac{2,23^2}{2g} + 0,5 - \left(1,5 + \frac{0,667^2}{2g} \right) = 0,12 \text{ м}.$$

Однако, определивши при помощи закона количеств движения глубину h' , нет уже надобности, собственно говоря, определять потерю энергии h_r .

Определение глубины в том или ином месте в случае резких изменений сечений водотоков при помощи или непосред-

ственно закона количеств движения или при помощи какого-либо видоизменения этого закона встречается уже давно. Однако при решении соответствующих задач обычно не обращают внимания и не исследуют одно обстоятельство, которое легко заметить, если пользоваться графиком θ/h , а именно: кроме уже рассмотренного решения, математически возможно еще решение h'' , для нашего примера равное $\sim 0,215$ м.

При такой глубине скорости в верхнем канале

$$v'' = \frac{Q}{Bh''} = \frac{2}{1 \cdot 0,215} = 9,33 \text{ м/сек.}$$

Удельная энергия сечения, соответствующая глубине h'' , будет:

$$\mathcal{E}'' = h'' + \frac{v''^2}{2g} = 0,215 + \frac{9,33^2}{2g} = 4,65 \text{ м.}$$

Между тем, при глубине $h' = 0,895$ м удельная энергия сечения получается

$$\mathcal{E}' = h' + \frac{v'^2}{2g} = 0,895 + \frac{2,23^2}{2g} = 1,15 \text{ м.}$$

Ясно, что при обычных условиях движения в верхнем канале с $i < i_k$ установится большая глубина h' с меньшей удельной энергией сечения, как это и было принято выше.

Однако иногда вода к сечению MD' может приходиться с малой глубиной (меньшей критической) и с большой скоростью, например, при истечении воды в верхний канал из-под щита, а также если в этом канале

Исследование форм движения, которые при этом могут получиться, потребовали бы много места и, кроме того, они нуждаются еще в экспериментальном изучении; поэтому указанную только что задачу здесь решать не будем. Отметим только, что она, видимо, имеет много общего с так называемым поверхностным прыжком при устройстве вертикальных уступов с носком в нижнем бьефе водосливных плотин¹.

Остановимся еще на том случае, когда переход от сечения ω (черт. 123) к сечению ω_1 имеет вид не уступа с вертикальной стенкой, а вид наклонных поверхностей, хотя этот переход остается все-таки недостаточно плавным. При указанных условиях в уравнении количеств движения приходится учитывать проекцию (на направление скорости потока v_1) давлений на наклонные поверхности. Эти давления приходится вычислять пока только приближенно.

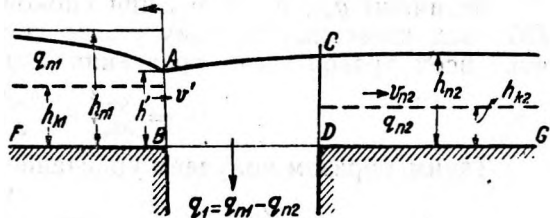
Здесь уместно будет еще отметить, что между функциями глубины θ и \mathcal{E} имеется некоторая аналогия, как это можно было видеть выше.

¹ См. М. Д. Чертоусов, Специальный курс гидравлики, 1937. В этой книге указаны относящиеся к вопросу работы профессоров А. А. Сабанеева и И. И. Леви.

§ 24. О движении с переменным вдоль водотока расходом

Остановимся теперь вкратце на движении жидкости с переменным вдоль водотока расходом. Именно здесь уместно рассмотреть этот вид неравномерного движения, так как и оно, видимо, может сопровождаться кроме обычных потерь на трение еще и другими потерями, относительно которых можно высказать предположение, что они по своей физической природе весьма близки к рассмотренным выше местным потерям. В самом деле, если к жидкости какого-либо потока, имеющего скорость v , добавить некоторое количество жидкости с иной скоростью v_0 , то очевидно, возникают условия для образования своеобразных поверхностей раздела и сопровождающих их потерь энергии; аналогичные условия получаются, если от потока жидкость отбирать. Изучены потери энергии при изменении расхода вдоль потока пока весьма мало.

Отметим здесь то обстоятельство, что хотя добавление или забор воды из водотока будут в общем сопровождаться потерями энергии, но удельная энергия воды, движущейся в русле дальше за местом, например, добавления некоторого количества последней, может быть и меньше и больше удельной энергии, которой обладала вода в русле до поступления на участок, на котором произошло изменение расхода. Уменьшение или увеличение удельной энергии воды в русле зависит от соотношения скоростей воды, движущейся в русле и вновь поступающей в него.



Черт. 125

В последнее время движению жидкости с переменной вдоль потока массой начинают уделять все большее внимание¹, так как на практике встречается немало случаев такого движения. Здесь остановимся на простейших случаях забора воды на сравнительно коротких участках из водотоков с призматическим руслом и уклоном $i < i_k$ (черт. 125). При сделанных допущениях можно будет пренебречь силами трения на стенках и составляющей силы тяжести воды в направлении ее движения. Предположим еще, что забираемая вода отходит от потока (черт. 125) по направлению, перпендикулярному к его скорости. Для упрощения будем рассматривать водоток прямоугольного сечения шириной в 1 м; благодаря этому площадь любого живого сечения численно будет равна глубине в этом сечении.

¹ См. проф. Я. Г. Ненько, О движении жидкости с переменной вдоль потока массой, 1938; а также журнал „Wasserkraft und Wasserwirtschaft“, 1939, Н. 5/6, стр. 65 — 69.

Применим теперь к объему жидкости $ABDC$ закон количеств движения:

$$\frac{h_{n2} v_{n2}^2}{g} \gamma - \frac{h' v'^2}{g} \gamma = \frac{h'^2}{2} \gamma - \frac{h_{n2}^2}{2} \gamma$$

или

$$\frac{h' v'^2}{g} + \frac{h'^2}{2} = \frac{h_{n2} v_{n2}^2}{g} + \frac{h_{n2}^2}{2}. \quad (35)$$

Введя выражения для скоростей

$$v' = \frac{q_{n1}}{h'} \text{ и } v_{n2} = \frac{q_{n2}}{h_{n2}},$$

можем написать уравнение (35) еще и в таком виде:

$$\frac{q_{n1}^2}{g h'} + \frac{h'^2}{2} = \frac{q_{n2}^2}{g h_{n2}} + \frac{h_{n2}^2}{2}. \quad (35a)$$

Величины q_{n2} , h_{n2} и v_{n2} при спокойном течении на участке DG нам известны; поэтому нужно считать известной и величину всей правой части уравнения (35a):

$$\Theta_2 = \frac{q_{n2}^2}{g h_{n2}} + \frac{h_{n2}^2}{2}.$$

Таким образом получаем уравнение с одним неизвестным h' :

$$\frac{q_{n1}^2}{g h'} + \frac{h'^2}{2} = \Theta_2. \quad (36)$$

Корни (действительные, положительные) последнего уравнения будем разыскивать опять для конкретных условий, а именно:

$$q_{n2} = 0,75 \text{ м}^3/\text{сек. м}; \quad q_{n1} = 1 \text{ м}^3/\text{сек. м};$$

количество забираемой из лотка воды

$$q_1 = q_{n1} - q_{n2} = 0,25 \text{ м}^3/\text{сек. м};$$

$$h_{k1} = \sqrt[3]{\frac{q_{n1}^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1^2}{g}} = 0,471 \text{ м}; \quad h_{k2} = \sqrt[3]{\frac{q_{n2}^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{0,75^2}{g}} = 0,386 \text{ м}.$$

Пусть $h_{n2} = 0,75 \text{ м}$; тогда:

$$\Theta_2 = \frac{0,75^2}{g \cdot 0,75} + \frac{0,75^2}{2} = 0,36.$$

Подставляя числовые значения в уравнение (36), получим

$$\frac{0,104}{h'} + 0,5 h'^2 = 0,36.$$

Решаем это уравнение графически, для чего строим график (черт. 126) функции

$$\Theta = \frac{0,104}{h'} + 0,5 h'^2.$$

Нанося на чертеж величину Θ_2 ; находим два корня:

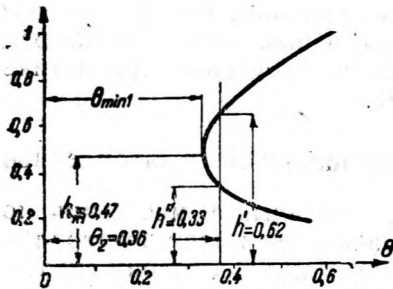
$$h' = 0,62 \text{ м} \text{ и } h'' = 0,33 \text{ м}.$$

Первый из этих корней больше, а второй меньше, чем h_{k1} .

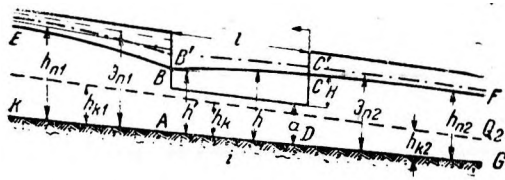
При обычных условиях в спокойном водотоке в сечении AB установится глубина $h' = 0,62$ м; перед этим сечением можем построить кривую спада на участке FB .

Таким образом видно, что при заборе воды из спокойного водотока наименьшая глубина установится в сечении AB (черт. 125) в начале участка BD , на котором происходит забор воды. При этом не имеет большого значения, как именно забирается вода — через отверстие в дне лотка, как на черт. 125, или через отверстия в боковых стенках или, наконец, при помощи так называемого бокового водослива (черт. 127).

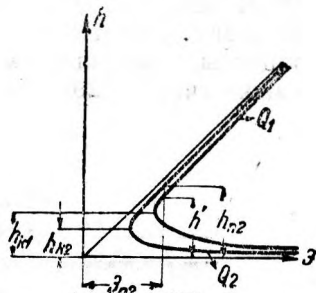
В том случае, когда θ_2 (черт. 126) получилось бы меньше, чем θ_{min1} , мы легко приддем к заключению, что в сечении AB



Черт. 126



Черт. 127



Черт. 128

на черт. 125 и 127 должна установиться критическая глубина h_{k1} и \mathcal{E}_{min1} , причем $\mathcal{E}_{min1} > \mathcal{E}_{n2}$. В этом случае можно предполагать, что на участке DG может появиться кривая подпора s_1 и прыжок или затопленный прыжок. Таким образом мы нашли еще один случай сечений с критической глубиной; ясно, что за такими сечениями критические глубины h_k и \mathcal{E}_{min} уменьшаются благодаря уменьшению расхода.

Теперь заметим еще, что уравнения (35) и (36) без всяких изменений годятся для решения задачи, противоположной только что рассмотренной, а именно задачи о соотношении глубин в конце и в начале участка, на котором вода в водоток добавляется, а не забирается.

При не очень значительных изменениях расхода в спокойных водотоках удельная энергия сечения также меняется мало и поэтому без значительных ошибок можно для решения задачи о нахождении глубины h' воспользоваться вместо функции θ функцией \mathcal{E} . Такое решение для бокового водослива (черт. 127) дано на черт. 128.

Выяснив на простейших и довольно важных примерах, как можно исследовать вопросы движения жидкости в открытом русле с переменным вдоль потока расходом, не будем здесь больше останавливаться на этом вопросе. Отметим еще раз, что многие задачи движения жидкостей в открытых руслах с переменным расходом рассмотрены в цитированных в начале этого параграфа работах. В этих работах авторы их принимают во внимание силы трения и силу тяжести (уклон) на тех участках, на которых изменяется расход. Уравнение (36) настоящего параграфа проф. Я. Т. Ненько в своей статье «Теория бокового водослива»¹ получает, между прочим, из более общего уравнения движения жидкости с переменным вдоль потока расходом, именно для бокового водослива в стенке призматического русла прямоугольного сечения.

§ 25. Гидравлический прыжок — незатопленный² и затопленный

Среди гидравлических явлений, связанных с местными потерями энергии, особенно большое значение имеет незатопленный и затопленный гидравлический прыжок. Рассмотрим вкратце процессы, имеющие место в незатопленном гидравлическом прыжке (черт. 129). Суть этих процессов лучше всего выясня-



Черт. 129



Черт. 130

ется, если обратить внимание на то обстоятельство, что вода с большой скоростью v_1 (черт. 130) попадает в поток, движущийся в том же направлении, но со скоростью меньшею, чем v_1 . Ясно, что при этом может образоваться поверхность раздела PS , которая уже во время своего образования распадается на вихри (черт. 129). Эти вихри увлекают с собой воду из пространства над поверхностью раздела, и поэтому туда устремляется вода от B к A и образуется так называемый валец AB ,

¹ Сборник "Гидравлика и конструкции", Харьков, 1938.

² Здесь ограничимся рассмотрением обычного прямого прыжка, фронт которого перпендикулярен к направлению потока. Относительно косоного прыжка см. книгу Ernst Preiswerk, Anwendung gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freier Oberfläche, Zürich, 1938.

в котором вода находится во вращательном, но не замкнутом движении, так как в него попадают все время новые и новые массы воды¹. Кроме больших вихрей, образующихся благодаря поверхности раздела PS (черт. 129), в вальце вероятно, имеются еще очаги зарождения более мелких вихрей, как, например, возле точки a (черт. 129). За точкой B вальца уже нет, но вода имеет, видимо, еще чрезвычайно завихренное движение и уровень воды (при горизонтальном дне) еще несколько повышается до некоторой точки B' .

Связь между глубинами критической h_k , перед прыжком и за прыжком в случае прямоугольного сечения русла, или между расходом Q , площадями живого сечения перед прыжком и за прыжком ω_1 и ω_2 , и между соответственными глубинами центров тяжести этих сечений y_{01} и y_{02} в общем случае произвольного сечения легко устанавливается при помощи того же закона количеств движения.

Для прямоугольного сечения будем иметь уравнение

$$\alpha_0 \frac{q^2}{gh_1} + \frac{h_1^2}{2} = \alpha_0 \frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2},$$

где q — расход на единицу ширины потока.

Так как $\frac{\alpha_0 q^2}{g} \approx h_k^3$, то уравнение можно написать так:

$$\frac{h_k^3}{h_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{h_k^3}{h_2} + \frac{h_2^2}{2}. \quad (37)$$

В общем случае уравнение прыжка имеет такой вид

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_1} + \omega_1 y_{01} = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 y_{02}. \quad (38)$$

Обычно одна из глубин h_1 и h_2 бывает задана и из соответствующего уравнения надо найти взаимную ей глубину. Для определенности положим, что задано h_2 , а вместе с ним ω_2, y_{02} и

$\Theta_2 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 y_{02}$ в случае произвольной формы живого сечения потока; разыскивается же глубина h_1 . Легко видеть, что среди корней рассматриваемых уравнений будет такой:

$$h_1 = h_2.$$

Этот корень ничего не дает и должен быть отброшен. Из двух прочих нужно взять, конечно, только положительный; для прямоугольного сечения он имеет такой вид:

$$h_1 = -\frac{h_2}{2} + \sqrt{\frac{h_2^2}{4} + \frac{2h_k^3}{h_2}}.$$

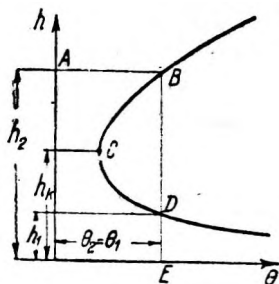
¹ Такие, примерно, объяснения явлениям в прыжке дал А. Шоклич в статье "Über die Energieverlichtung durch Walzen*" "Die Wasserwirtschaft 1932, № 16 — 17, рассматривая прыжок с точки зрения гашения энергии. К аналогичным выводам пришел одновременно с А. Шокlichem и автор настоящей работы, рассматривая прыжок как сместитель.

В общем случае произвольного сечения необходимый корень можно найти, представивши графически (черт. 131) функцию θ от глубины h для заданного сечения русла:

$$\theta = \frac{a_0 Q^2}{g \omega} + \omega y_0.$$

Тут ω и y_0 являются функциями переменной глубины h .

Построивши кривую θh , нет надобности определять θ_2 ; можно просто отложить h_2 , провести линию AB параллельно оси абсцисс, затем линию BE параллельно оси ординат; отрезок DE и даст взаимную глубину h_1 .



Черт. 131

Так как точке C соответствует, как известно, критическая глубина h_k , то часто говорят, что в месте образования прыжка поток переходит через критическую глубину h_k от глубины h_1 , меньшей, чем h_k , к взаимной глубине h_2 большей, чем h_k ; Б. А. Бахметев¹ говорит, что прыжок является формой перехода из бурного течения в спокойное, причем он, конечно, принимает, что при переходе с нижней ветви

графика $\mathcal{E}h$ (черт. 3) на верхнюю ветвь последнего поток не переходит через \mathcal{E}_{\min} ; однако Б. А. Бахметев совершенно не останавливается на вопросе о том, каким же образом такой переход может совершиться. Поэтому приходится согласиться со справедливостью некоторых упреков, которые по этому вопросу делаются по адресу Б. А. Бахметева. Проф. Я. Т. Ненько² объясняет указанное противоречие тем обстоятельством, что струя воды в прыжке в нижней его части движется с переменным расходом — сначала увеличивающимся, а затем опять уменьшающимся.

Нам кажется, что для требующегося объяснения действительно следует использовать факт движения потока в прыжке с переменным расходом. Этот факт хорошо известен, хотя экспериментально исследован мало³. Однако в рассуждениях проф. Я. Т. Ненько представляется неясным утверждение, что "в прыжке перехода течения с одной ветви удельной энергии на другую не происходит — течение продолжает оставаться на одной и той же ветви". Ведь в действительности глубина и удельная энергия сечения перед прыжком соответствуют все-таки нижней ветви, а за прыжком верхней ветви графика $3A$.

Быть может, более правильным будет такое объяснение. Пусть прыжок происходит на участке AA' (черт. 132). Не будем

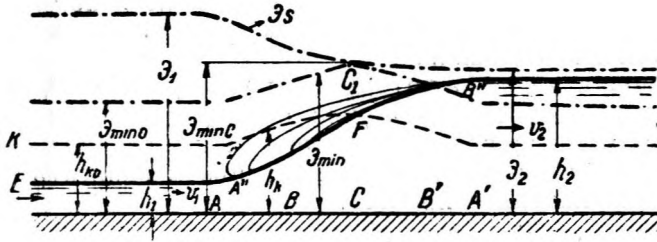
¹ В. А. Бахметев, *Hydraulics of Open Channels*, 1932, стр. 227 или русский перевод этой книги.

² См. цитированные работы проф. Я. Т. Ненько, о движении жидкости с переменной вдоль потока массой.

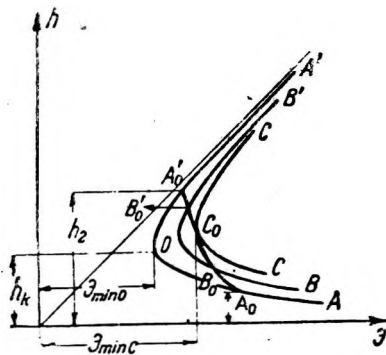
³ См. например, J a n S m e t a n a, *Experimental studie vodneho skoku vzduteho*, 1934, стр. 13, табл. 2.

обращать внимания на давление в струе, которое получается от наличия над поверхностью $A''FB''$ основной струи массы жидкости, движущейся назад. Не будем также учитывать искривления струек.

Теперь обратим внимание на то обстоятельство, что в первой части прыжка, примерно на участке AC , расход в основной струе возрастает, а затем на участке CA' уменьшается; соответственно критические глубины от A до C увеличиваются, а затем уменьшаются. Следовательно, и \mathcal{E}_{\min} на участке AC возрастает



Черт. 132



Черт. 133

до $\mathcal{E}_{\min c}$, а затем на участке CA' уменьшается до $\mathcal{E}_{\min 0}$. Если согласиться, что удельная энергия сечения примет значение \mathcal{E}_{\min} в том сечении, где расход перестает увеличиваться, то в этом сечении, как будет видно из дальнейшего, течение может перейти с нижней ветви графиков $\mathcal{E}h$ на верхнюю без возникновения у нас указанных выше противоречий.

Чтобы в этом убедиться, начертим графики $\mathcal{E}h$ (черт. 133) для нескольких живых сечений в прыжке: $A, B, C, B'A'$ (черт. 132).

Для каждого из сечений L, B, C нужно строить свой график $\mathcal{E}h$, так как в каждом из этих сечений будет иной расход. Но эти графики совпадут для сечений A' и A ; точно так же на участке CA' можно найти такое сечение B' , для которого расход будет равен расходу в сечении B . Поэтому для каждой пары сечений с одинаковыми расходами можно вычертить по одному графику $\mathcal{E}h$. На черт. 133 графики $\mathcal{E}h$ для каждой пары сечений обозначены теми же буквами, что и соответствующие сечения на черт. 132.

Переходя от сечения A к сечению B на черт. 132, мы на черт. 133 должны от точки A_0 на кривой AOA' перейти к точке B_0 с большей глубиной и меньшей удельной энергией сечения на кривой BB' . Дальше переходим на кривую CC' в точке C_0

с максимальной критической глубиной и с удельной энергией сечения $\mathcal{E}_{\min c}$; тут именно и происходит переход через критическую глубину, но при этом $\mathcal{E}_{\min c}$ больше, чем $\mathcal{E}_{\min 0}$. После этого переходим на кривые BB' и AA' , но в обратной последовательности и на ветви для спокойного течения (точки B_0' и A_0'). Это вполне возможно, так как за сечением C переменная удельная энергия сечения \mathcal{E}_{\min} может уменьшаться скорее, чем понижается линия энергии $\mathcal{E}s$ на участке CA' .

Хотя приведенное рассуждение и дает возможность сравнительно просто объяснить переход с нижней ветви AO графика $\mathcal{E}h$ на верхнюю его ветвь OA' , однако же ясно, что явления в прыжке нуждаются в дальнейшем теоретическом и экспериментальном исследовании.

Остановимся еще на потере энергии в прыжке. Определивши при помощи уравнений (37) или (38) h_1 по заданному h_2 (или наоборот) и найдя соответствующие этим глубинам удельные энергии сечений \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (черт. 132), можем написать такое выражение для потери в прыжке:

$$H_r = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \left(h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} \right).$$

Полагая $\alpha = 1$, после несложных преобразований получим

$$H_r = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}.$$

Это выражение, как легко доказать, не равно выражению для потерь в прыжке, которое получится, если применить сюда формулу Борда:

$$H'_r = \frac{(v_1 - v_2)^2}{4h_1 h_2} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{4h_1 h_2}.$$

Разница является результатом того обстоятельства, что потери энергии в трубе при ее расширении сопровождаются также преобразованием части исчезающей кинетической энергии в энергию давления, причем соотношение скоростей задается соотношением площадей живых сечений. В прыжке же соотношение скоростей перед прыжком и за ним является результатом устанавливающегося соотношения глубин, а следовательно, и площадей живого сечения перед прыжком и за ним; при этом последнее устанавливается в противоположность трубам не только в соответствии с формой русла, но и с другими условиями движения жидкости и прежде всего энергетическими условиями.

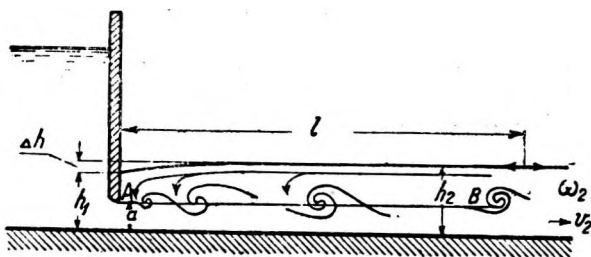
Что касается размеров прыжка вдоль потока, то в отношении этого вопроса пока имеются большие расхождения между исследователями. В то время как в Европе преимущественно исследуется длина вальца l на участке AB (черт. 129), Б. А. Бахметев и А. Е. Матцке (А. Е. Matzke)¹ подразумевают под длиной

¹ B. A. B a k h m e t e f f and A. E. M a t z k e, The Hydraulic Jump in Terms of Dynamic Similarity, Proceedings Am. S. C. E., Oktober, Vol. 62, № 8, Part 2

прыжка величину L . Вопрос затрудняется еще и тем, что при волнистой форме прыжка вальца, собственно говоря, вовсе не имеется. Вопрос о длине вальца l (или длине прыжка в целом L) имеет большое значение, так как на основании имеющихся исследований можно думать, что длину водобойного колодца следует назначать именно в связи с длиной l .

Не малое значение имеет также длина затопленного прыжка (черт. 134), в соответствии с которой следует, видимо, назначать длину того участка за перепадом, на котором нужно закреплять дно водотока в том случае, когда прыжок затопляется без водобойного колодца.

Не приводя здесь эмпирических формул для длины незатопленного и затопленного прыжка, так как формулы эти можно найти в "Гидравлическом справочнике" акад. Н. Н. Павловского



Черт. 134

или в цитированной книге проф. М. Д. Чертоусова, остановимся еще на рассмотрении явлений в затопленном прыжке (черт. 134).

И здесь вместо поверхности раздела AB образуются завихрения и обратные течения на поверхности. Связь² между обычно заданной глубиной h_2 и глубиной возле стенки h_1 опять можно получить, написавши уравнение количеств движения для участка между стенкой и концом прыжка. Пусть сжатое сечение струи будет ω_c , скорость в этом сечении v_c , площадь сечения русла, соответствующая глубине h_1 , возле стенки ω_1 , глубина центра тяжести этой площади под уровнем y_{1c} , те же величины в конце рассматриваемого участка — ω_2 и y_{2c} . Предположив еще, что давление по площади распределено по закону гидростатики, напишем уравнение количеств движения:

$$\frac{\omega_c v_c^2}{g} + \omega_1 y_{1c} = \frac{\omega_2 v_2^2}{g} + \omega_2 y_{2c}$$

или после замены скоростей через расход Q и площади живых сечений

$$\frac{Q^2}{g\omega_c} + \omega_1 y_{1c} = \frac{Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 y_{2c} \quad (39)$$

² Ср. цитированную работу, J. S m e t a n a или F. B u n d s c h u, Angewandte Hydraulik, 1929.

Решать это уравнение нужно подбором, лучше графически. Для прямоугольного сечения русла уравнение (39) принимает вид

$$\frac{q^2}{ga} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2} \quad (40)$$

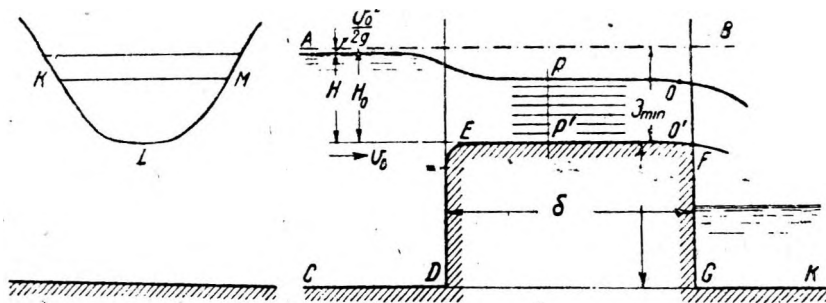
Это уравнение относительно является неполным квадратным и решается очень легко.

ГЛАВА VI

О ВОДОСЛИВАХ С ШИРОКИМ ПОРОГОМ

§ 26. Незатопленный водослив с широким порогом

Водослив с широким порогом играет в гидравлических расчетах очень большую роль; правда, до некоторой степени это объясняется, как уже упоминалось, тем обстоятельством, что по схеме водослива с широким порогом иногда рассчитывают и такие сооружения, которые с водосливом имеют мало общего.



Черт. 135

Однако, если даже отказаться от только что упомянутого недостаточно обоснованного применения теории водослива с широким порогом, последняя все-таки сохранит свое большое значение, в том числе и в практических приложениях. Здесь нужно указать еще на тесную связь теории водослива с широким порогом с общей теорией неравномерного движения жидкости в открытых руслах; имея в виду эту связь, мы и остановимся тут на теории водослива с широким порогом.

Наибольшее значение среди водосливов с широким порогом имеют, конечно, водосливы прямоугольные. Но находят применение и водосливы с иными формами вырезов в стенках — трапециoidalные, параболические и др. Поэтому, мы рассмотрим сначала общий случай (черт. 135) произвольной формы сечения *KLM* струи на водосливе, т. е. произвольной формы выреза в стенке водослива, а затем более подробно уже остановимся на прямоугольном водосливе. Не лишним будет напомнить, что ширина

порога δ (т. е. толщина стенки водослива) принимается настолько значительной, чтобы на пороге могло установиться медленно изменяющееся движение хотя бы на коротком участке; при этом образующие поверхности лотка на стенке (EO' и др.) предполагаются горизонтальными. Принимаем также, что течение перед водосливом происходит с небольшими скоростями v_0 ; во всяком случае это течение спокойное.

Основной задачей теории незатопленного водослива с широким порогом, который мы будем исследовать в этом параграфе, является установление связи между расходом через водослив Q и напором на пороге H , вместо которого в случае надобности

берут величину $H_0 = H + v_0^2/2g$, т. е. напор, исправленный на скорость подхода v_0 . При выводе искомой зависимости будем иметь в виду пока только водослив с хорошо закругленным краем E стенки.

Если считать, что положение о возможно малой площади между линией энергии и дном водотока обосновано при помощи более общего принципа рассеяния энергии, как мы это сделали выше в § 7, то из этого положения следует, что в сечении $00'$ перед "водопадом" должна установиться удельная энергия сечения \mathcal{E}_{\min} , а вместе с ней критическая глубина h_k , критическая ширина струи на пороге B_k и критическая площадь живого сечения ω_k .

Таким образом положение Б. А. Бахметева об установлении критической глубины в конце порога водослива получает определенное обоснование, т. е. оно перестает быть постулатом, как его часто и с достаточным основанием называют. Правда, Б. А. Бахметев указывает на возможность вывода его положения из принципа устойчивости движения Routh'a, но самого вывода не дает. Кроме того, Б. А. Бахметев обосновывает свое положение следующими недостаточно убедительными соображениями¹: ... «естественному стремлению уровня воды на пороге понизиться насколько возможно кладется предел тем обстоятельством, что за известным пределом понижения (см. фиг. 191 в книге проф. Бахметева) уменьшению глубины соответствует приращение удельной энергии сечения». Это соображение является не совсем убедительным, так как в той же книге Б. А. Бахметева на фиг. 194 и 195 приводятся случаи движения воды через водослив с глубинами на пороге меньшими, чем критическая, и притом в сечениях, достаточно далеких от водопада; впрочем, нужно отметить, что сам же Б. А. Бахметев указывает, что эти формы струи имеют место на водосливах с незакругленным краем стенки при входе на порог. Последнее замечание Б. А. Бахметева, однако, не меняет дела, так как он не анализирует разницы между водосливами с закругленным и незакругленным краем стенки при входе на порог. Сделанные тут замечания показывают, что Б. А. Бахметев действительно не дал

¹ Проф. Б. А. Ба х м е т е в, Гидравлика, общий курс, 1932, стр. 218.

вполне убедительного вывода своего положения и оно нуждается в доказательстве.

Возвращаясь к основной задаче теории водослива с широким порогом, заметим, что, определивши для заданного расхода и заданной формы сечения струи на пороге водослива величины h_k , \mathcal{E}_{\min} и ω_k , можно было бы найти скорость в сечении с критической глубиной и затем потери энергии H_w от входа на водослив до этого же сечения. После этого можно написать

$$H_0 = \mathcal{E}_{\min} + H_w.$$

Таким образом по заданному Q можно определить необходимое H_0 , а затем и H , т. е. требуемая связь между Q и H_0 , установлена. Однако обычно считается желательным установление этой связи в виде формулы, прямо связывающей Q и H_0 .

Такую формулу мы получим здесь только для прямоугольного водослива¹. Ограничимся нахождением связи между H_0 , и расходом q на единицу ширины струи на водосливе. Как известно, высота скорости v_k в сечении с критической глубиной равна половине критической глубины

$$\frac{v_k^2}{2g} = \frac{h_k}{2}.$$

Если обозначим коэффициент суммарной потери энергии на водосливе буквой ζ , то для потери энергии можем написать:

$$H_w = \zeta \frac{v_k^2}{2g} = \zeta \frac{h_k}{2},$$

поэтому

$$H_0 = \mathcal{E}_{\min} + H_w = \frac{3}{2} h_k + \frac{\zeta}{2} h_k = \frac{3 + \zeta}{2} h_k.$$

И отсюда

$$h_k = \frac{2}{3 + \zeta} H_0.$$

Подставив сюда вместо h_k выражение

$$\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

и решив относительно q , получим

$$q = \sqrt{\frac{1}{2 \left(\frac{3}{2} + \zeta \right)^3}} \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}.$$

¹ Вывод формул для некоторых других водосливов дан в работах: В. Н. Аравин, Движение воды в каналах, оканчивающихся водосливом с широким порогом, Изв. н.-и. Института гидротехники, т. II; А. Н. Рахманов, О трапециодальных водосливах с широким порогом, Известия Научно-мелиорационного института, вып. XIX, и некоторые другие.

Обозначив буквой m первый корень, получим

$$q = m\sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}.$$

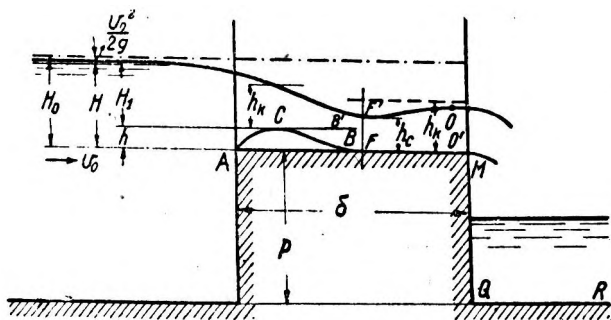
Обыкновенно коэффициент расхода водослива m выражают не через ζ , а через коэффициент скорости φ , связанный с ζ таким соотношением:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}}.$$

Отсюда

$$m = k \sqrt[3]{\frac{k}{2}}, \quad \text{где } k = \frac{2\varphi^2}{1 + 2\varphi^2}.$$

Гораздо более сложные явления имеют место на пороге водослива в случае незакругленного ребра при входе на порог (черт. 136). В этом случае у ребра A струя срывается со стенки



Черт. 136

и таким образом имеется тенденция к образованию поверхности раздела ACB' , которая, конечно, уже в процессе своего образования на части CB' распадается, и струя достигает плоскости порога около B . Так как жидкость в пространстве ACB сравнительно мало связана со струей, то напор и удельную энергию сечения следовало бы, собственно говоря, измерять уже не от плоскости порога, а от наивысшей образующей поверхности ACB' ; при этом мы не будем учитывать влияния искривления струек, и поэтому выводы будут иметь преимущественно только качественный характер.

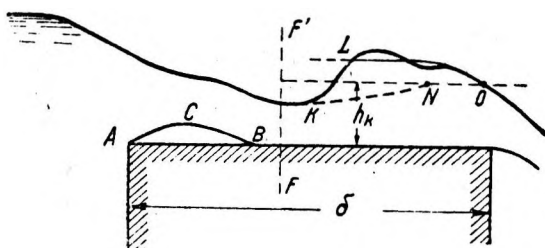
При сделанных допущениях \mathcal{E}_{\min} и h_k установятся над C ; но в таком случае в сечении FF' удельная энергия сечения будет примерно $\mathcal{E}_{\min} + h$, если не учитывать сопротивлений. Из двух глубин, соответствующих удельной энергии сечения большей, чем \mathcal{E}_{\min} , здесь должна установиться глубина меньшая критической, как это легко доказывается при помощи положения о наименьшей площади между линией энергии и дном. Таким образом на водосливе за точкой B может установиться бурное течение с глубиной меньшей, чем критическая. При на-

личии кривой подпора $F'O$ за сечением FF толщина стенки δ не может влиять на движение до сечения $F'F$, т. е. она не может влиять на расход. При некоторых условиях, в частности при значительном размере δ , кривая подпора KN (черт. 137) может подойти к линии критических глубин на некотором расстоянии от "водопада". В этом случае от точки O против течения установится кривая подпора OL при спокойном течении на этом участке. Понятно, что между кривыми KN и OL должен установиться прыжок. Обычно обе кривые достаточно близки к линии критических глубин и поэтому высота прыжка мала.

И в этом случае толщина стенки δ не может влиять на расход. Понятно также, что прыжок может надвинуться на сечение FF' .

Таким образом хотя бы качественно объясняются формы поверхностей воды, встречающиеся на порогах водосливов с широким порогом.

Если согласиться рассматривать поверхность ACB (черт. 136) как порог своеобразного водослива и принять, что над точкой C



Черт. 137

установится критическая глубина, то для расхода прямоугольного водослива на единицу ширины можем написать такую формулу:

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{2g} H_1^{\frac{3}{2}}.$$

Здесь не учтены потери энергии на участке AC , которые, впрочем, должны быть очень малыми.

По некоторым опытным данным при достаточно больших отношениях p/H (примерно при $p/H > 10$) имеем $h = 0,14H$; поэтому $H_1 = H - 0,14H = 0,86H$.

Подставив в формулу для расхода $0,86H$ вместо H_1 , получим:

$$q \approx 0,308 \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}.$$

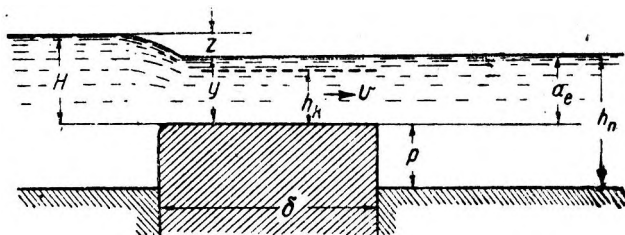
Здесь значение $0,308$ для коэффициента расхода водослива довольно близко к значениям его, приводимым в справочниках и курсах гидравлики для водосливов с незакругленной стенкой при входе на порог.

§ 27. О затопленном водосливе с широким порогом

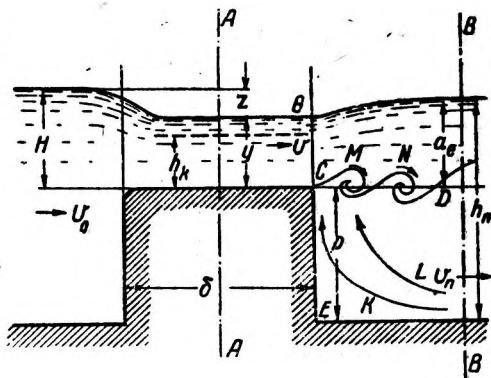
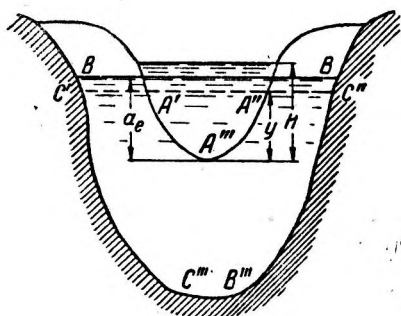
Теорией затопленного водослива с широким порогом пользуются чрезвычайно часто при гидравлических расчетах разнообразнейших сооружений. Однако наиболее принятые в насто-

ящее время взгляды на движение воды через затопленный водослив с широким порогом, излагаемые в сочинениях по гидравлике, нельзя признать правильными, так как обычно принимаемая в теоретических выводах картина движения через рассматриваемый водослив во многих случаях сильно отличается от наблюдаемой в действительности.

В самом деле, обычно принимают, что водослив с широким порогом затоплен, если (черт. 138) высота a_e уровня воды



Черт. 138



Черт. 139

в нижнем бьефе над порогом водослива больше критической глубины h_k на пороге; при этом полагают, что уровень нижнего бьефа надвигается на водослив и на пороге устанавливается вместо глубины h_k глубина a_e . Между тем, опыты с полной несомненностью показывают, что толщина струй над порогом затопленного водослива (черт. 139), будучи больше критической глубины h_k там же, всегда бывает меньше высоты a_e .

Повышение уровня за водосливом a_e — y было известно в гидравлике давно¹, но им обыкновенно пренебрегали, ссылаясь на то, что оно мало. Однако разность a_e — y далеко не всегда

¹ См., например, следующие сочинения:

1. М. J. Boussinesq, Essai sur la theorie des eaux courantes, 1877, pp. 569—696.

2. Б. А. Бахметев, Гидравлика, общий курс, 1932, стр. 224.

3. Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937, стр. 409 и дальше.

бывает настолько мала, чтобы ею можно было пренебрегать во всех случаях. Недавно еще на это обстоятельство указал инж. Я. Е. Сницар¹. Однако, рассматривая вопрос о затопленности водослива с широким порогом только с энергетической точки зрения, Я. Е. Сницар вынужден бы ограничиться выводами, так сказать, качественного характера; это произошло потому, что энергетическое рассмотрение могло бы дать ответ о величине повышения уровня $a_e - y$ в нижнем бьефе только при условии, что предварительно мы нашли бы величину местной потери энергии, получающейся после схода струи с порога сейчас же за последним.

Нет достаточных оснований, чтобы вычислять эту потерю при помощи теоремы Борда, так как и здесь имеет место образование вихрей из поверхности раздела CD в открытом водотоке, т. е. условия движения здесь до некоторой степени аналогичны тому, что происходит, например, в гидравлическом прыжке. Поэтому для установления соотношения между глубиной y и скоростью v на пороге, с одной стороны, и условиями движения в нижнем бьефе, с другой стороны, следует воспользоваться законом количеств движения. В нижнем бьефе нужно взять, конечно, такое сечение, в котором можно считать струйки движущимися уже параллельно со средней скоростью v_n при глубине h_n . Пусть указанные только что условия устанавливаются в нижнем бьефе уже в сечении BB .

Обозначим площадь сечения AA струи на водосливе ($A'A'A''$) через ω_c , площадь $C'A'A''A''C''C''$ стенки водослива, омываемую водой нижнего бьефа, через ω_p и площадь живого сечения BB через ω_n .

Для того чтобы можно было применить закон количеств движения к части потока, заключающейся между сечениями AA и BB , необходимо было бы еще предварительно исследовать распределение давления воды по площади ω_p ; однако ввиду того что таких исследований не было произведено, можно пока с некоторой степенью уверенности принять распределение давления по этой площади по закону гидростатики. По этому же закону будут распределены давления воды по площадям ω_c и ω_n , так как вода движется через эти площади параллельными струйками. Силами трения воды о боковые стенки и дно потока на участке между сечениями AA и BB пренебрежем.

При этих условиях приращение количества движения выделенной жидкости, отнесенное к 1 сек., будет:

$$\frac{\omega_n v_n^2 \gamma}{g} - \frac{\omega_c v^2 \gamma}{g}.$$

Импульс сил давления на сумму площадей ω_c и ω_p за 1 секунду будет равен выражению $(\omega_c + \omega_p) \gamma_{c,p} \gamma$ а для площади ω_n соответственно $\omega_n \gamma_{c,n} \gamma$.

¹ Инж. Я. Е. Сницар, Затопленность и незатопленность открытых водоспусков и водосливов с широким порогом, "Гидротехническое строительство", 1937, № 10, стр. 25.

В этих выражениях $y_{c.p}$ представляет глубину центра тяжести суммы площадей $\omega_c + \omega_p$ (площадь $C'A'A''C''C'''$ на черт. 139) под уровнем $C'A'A''C''$, а $y_{c.n}$ есть глубина центра тяжести сечения BV под уровнем воды в этом сечении.

Теперь уравнение количеств движения можно написать в таком виде:

$$\frac{\omega_n v_n^2 \gamma}{g} - \frac{\omega_c v^2 \gamma}{g} = (\omega_c + \omega_p) y_{c.p} \gamma - \omega_n y_{c.n} \gamma.$$

Заменяв здесь v_n и v через $\frac{Q}{\omega_n}$ и $\frac{Q}{\omega_c}$ и сократив на γ , получим

$$\frac{Q^2}{g} \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{1}{\omega_c} \right) = (\omega_c + \omega_p) y_{c.p} - \omega_n y_{c.n}.$$

или несколько иначе:

$$\frac{Q^2}{g \omega_c} + (\omega_c + \omega_p) y_{c.p} = \frac{Q^2}{g \omega_n} + \omega_n y_{c.n}. \quad (41)$$

Это уравнение можно было написать и сразу, пользуясь свойствами полного давления сечения, изложенными в § 23.

Из уравнения (41) при заданных Q , ω_n и $y_{c.n}$ путем подбора определим глубину y на водосливе. Определение глубины y может быть облегчено следующими замечаниями: искомая глубина y , будет больше критической глубины h_k на пороге водослива¹ и меньше высоты a_e , равной разности уровня воды в нижнем бьефе и отметки порога водослива $h_n - p$.

Уравнение (41) выведено для произвольных форм сечения как водотока, так и струи на водосливе. Применим это уравнение к случаю прямоугольного водослива на потоке прямоугольного же сечения, причем (черт. 140) ширина водотока пусть будет равна ширине водослива. В этом случае нужно положить:

$$\omega_n = B h_n; \quad \omega_c = B y; \quad \omega_p = B p; \quad y_{c.p} = \frac{y+p}{2}; \quad y_{c.n} = \frac{h_n}{2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (41) и обозначив частное $\frac{Q}{B}$ буквой q , получим

$$\frac{q^2}{g y} + \frac{(y+p)^2}{2} = \frac{q^2}{g h_n} + \frac{h_n^2}{2}.$$

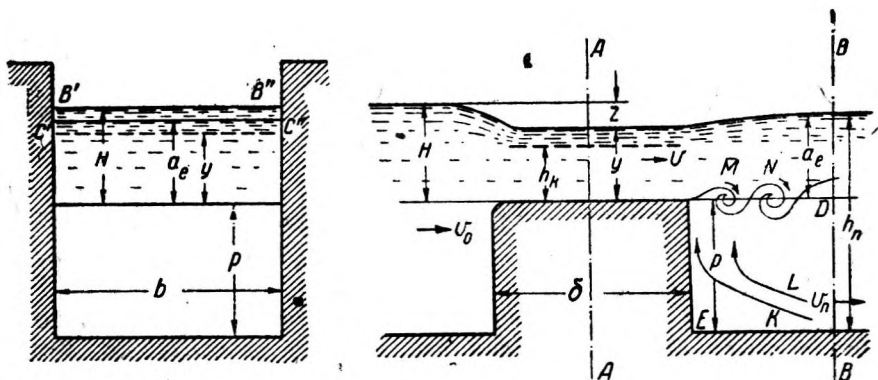
Принимая во внимание, что равно $\frac{q^2}{g}$ кубу критической глубины, можем написать окончательно

$$\frac{h_k^3}{y} + \frac{(y+p)^2}{2} = \frac{h_k^3}{h_n} + \frac{h_n^2}{2} \quad (42)$$

и отсюда y можно определить подбором, применяя при желании графический прием.

¹ Второй положительный корень уравнения (41) должен быть отброшен в соответствии с общим положением о возможно малом значении площади между линией энергии и линией дна.

При заданном расходе и, следовательно, при известной критической глубине h_k для определенного водослива можно определить из уравнения (42), или соответственно (41), ту глубину h_{nk} в нижнем бьефе, при которой глубина на пороге как раз достигает значения h_k . Легко согласиться, что если в нижнем бьефе глубина h_n будет меньшая, чем h_{nk} , то водослив становится незатопленным, и, наоборот при $h_n > h_{nk}$ водослив будет затопленным.



Черт. 140

Что касается определения напора на пороге H , то его можно было бы находить, вычисливши величину z из формулы:

$$v = \varphi \sqrt{2g \left(z + \frac{v_0^2}{2g} \right)}.$$

Однако значения коэффициентов φ , которые даются в справочниках, найдены, исходя из неверного предположения, а именно, принимается, что $y = a_e$, поэтому можно думать, что лучшие

результаты даст обычная формула водослива $q = m \sqrt{2gH^2}$ ³, если коэффициент расхода в этой формуле вычислять по формуле, предлагаемой проф. М. Д. Чертоусовым¹ для водослива с не закругленным входом:

$$m = 0,488 \sqrt{\frac{\psi_a (1 - \psi_a^2) (1 + \psi_p)}{1 + \psi_p - \psi_a}}, \quad \text{где} \quad \psi_a = \frac{y}{H} \quad \text{и} \quad \psi_p = \frac{p}{H}.$$

Для водослива с закругленным входом коэффициент расхода следует увеличить, примерно, на 6—8% по сравнению со значением, получаемым по приведенной только что формуле.

¹ Проф. М. Д. Чертоусов, К вопросу об истечении через водослив с широким порогом, "Гидротехническое строительство", 1938, № 12.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие.....	3
Принятые обозначения.....	4

ГЛАВА I

Задачи и методы исследования неравномерного движения жидкости в открытых руслах и гидротехнических сооружениях

1. Причины установления неравномерного движения жидкости в открытых руслах.....	5
2. Задачи теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах.....	6
3. Удельная энергия сечения.....	8
4. Дифференциальное уравнение неравномерного движения жидкости в открытом русле при плавных отклонениях последнего от призматичности.....	13
5. Об интегрировании дифференциального уравнения неравномерного движения жидкости в открытых водотоках в некоторых частных случаях.....	16
6. Исследование кривых поверхностей воды при неравномерном движении жидкости в призматических открытых руслах с прямым уклоном.....	25
7. Общее положение о возможно малой площади между линией энергии и линией дна в открытых водотоках и гидротехнических сооружениях.....	34
8. Примеры непосредственного применения общего положения о возможно малой площади между линиями энергии и дна.....	47
9. Частные положения о движении жидкости в открытых водотоках.....	52

ГЛАВА II

Неравномерное движение жидкости при стеснениях и расширениях русла с плавными переходными участками

10. Стеснения русла водотоков на некоторой длине с плавными переходными участками.....	56
11. Плавные переходы к руслам с меньшей шириной и с более высоко расположенным дном.....	69
12. Стеснения водотоков сверху на части ширины их.....	71
13. Плавные расширения русла на некоторой длине при одновременном понижении дна.....	77
14. Плавный переход от более узкого к более широкому руслу с одновременным понижением дна.....	82
15. О движении судов по каналам и рекам; формы поверхностей воды.....	83

ГЛАВА III

Неравномерное движение при изменениях уклона и шероховатости вдоль водотока, а также при отбирании энергии от воды

16. Изменение уклона дна вдоль водотока.....	92
17. Изменение шероховатости по длине водотока.....	95
18. Отбирание энергии от воды, движущейся в открытом водотоке.....	101

ГЛАВА IV

Более сложные случаи неравномерного движения в открытых водотоках. Сечения с критическими глубинами. Определение исходных сечений для построения кривых поверхностей воды

19. Более сложные случаи неравномерного движения в	открытых водотоках.....	103
20. Сечения с критическими глубинами.....		105
21. Об определении исходных сечений для построения кривых поверхностей воды.....		108

ГЛАВА V

Неплавные изменения живых сечений, изменение расхода вдоль водотока и местные потери энергии в открытых руслах

22. О сущности местных потерь, гашении энергии и перемешивании жидкостей в открытых, водотоках.....		112
23. Об учете местных потерь энергии при рассмотрении движения воды в открытых водотоках и сооружениях на них.....		118
24. О движении с переменным вдоль водотока расходом.....		125
25. Гидравлический прыжок — незатопленный и затопленный.....		128

ГЛАВА VI

О водосливах с широким порогом

26. Незатопленный водослив с широким порогом.....		134
27. О затопленном водосливе с широким порогом.....		138

Цена 5 р. 25 к.