

103.
Институт Инженеров Путей Сообщения.

Профессор С. П. ТИМОШЕНКО.

КУРС СТАТИКИ СООРУЖЕНИЙ.

Часть I.

Выпуск 2-ой.

Издание Студенческой Библиотеки.

ПЕТРОГРАД.
1922.

Р. Ц. № 515, гор. Петроград.

Типо-литография Народного Комиссариата Путей Сообщения. Фонтанка, 117.
Отпечатано в количестве 3.000 экз.

Предисловие Издательства.

Студенческая Библиотека Петроградского Института Инженеров Путей Сообщения особой честью для себя почитает выдать вновь, после пятилетнего перерыва, издательскую свою деятельность выпуском первым изданием „Курса Статика Сооружений“ профессора С. П. Тимошенко.

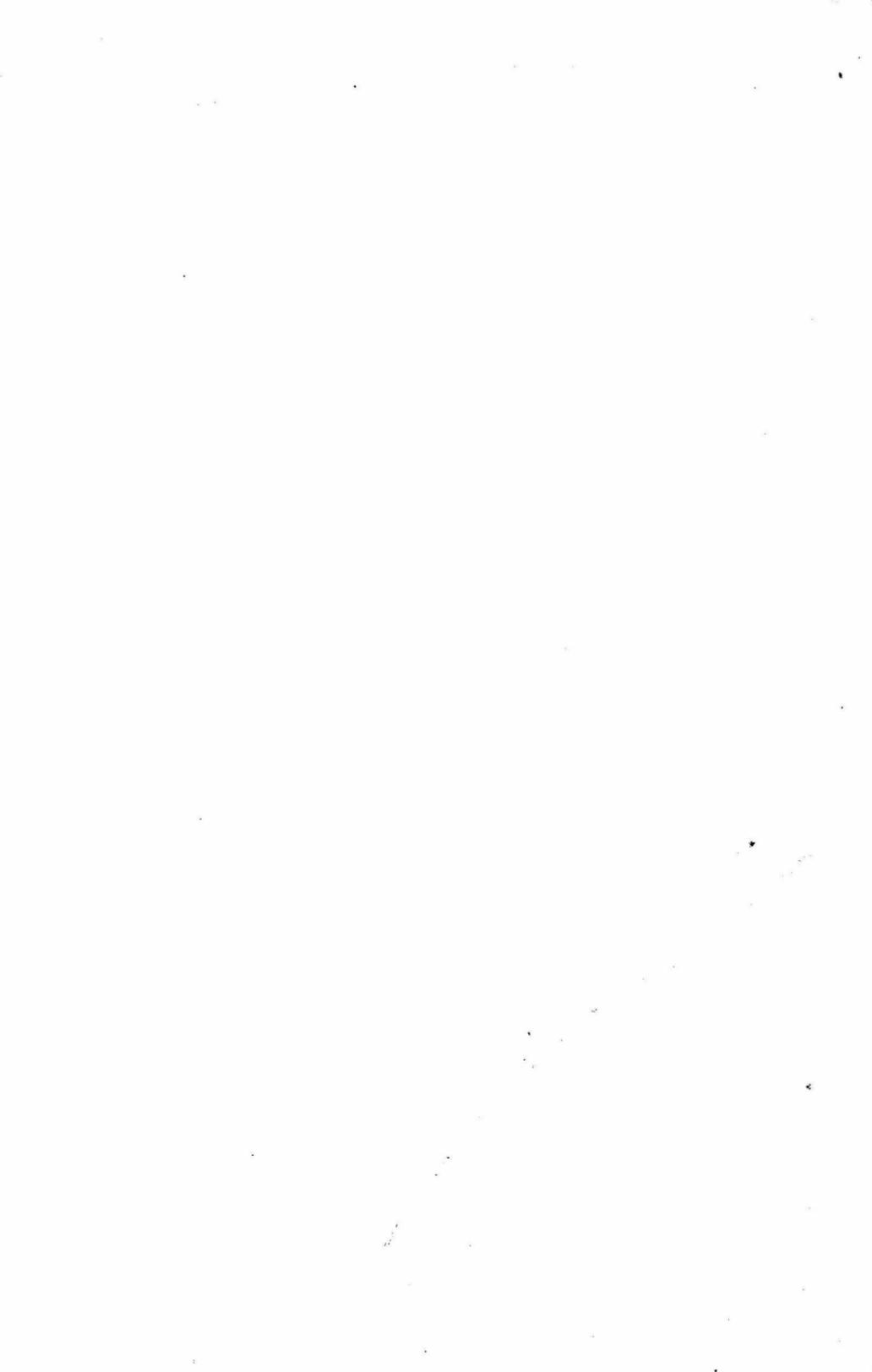
Самую горячую признательность шлем мы, от имени Студенчества, глубокоуважаемому и дорогому профессору нашему, Степану Прокофьевичу, и в том, что новое печатное слово Степана Прокофьевича появляется от Института, мы черпаем уверенность, что и живую увлекательную речь нашего любимого лектора мы слова услышим в стенах родного Института.

Выпуск настоящего труда оказался возможным для Студенческой Библиотеки лишь при поддержке, оказанной ей ректорами Института — проф. Г. П. Передерием и проф. В. В. Арнольдом, Библиотечной Комиссией Института, во главе с председателем ее, проф. А. А. Саткевичем, и преп. Института Д. Я. Авимовым-Перец, за что Правление Студенческой Библиотеки и приносит им свою глубокую благодарность.

Настоящий курс выходит под наблюдением преп. Института Н. М. Белзева, взявшего на себя всю редакционную и корректорскую работу, за что Правление считает особо необходимым выразить живейшую благодарность ему, а также инженеру п. с. Б. Ф. Глазунову, лично выполнившему чертежи в настоящему выпуску.

Председатель Правления
Студенческой Библиотеки *Н. Шошин.*

Заведывающий Издательским Отделом *Б. Луцкий.*



Г Л А В А IV.

О деформациях плоских стержневых систем с идеальными шарнирами.

§ 38. Общие замечания.

Во всех предыдущих задачах мы занимались определением усилий, возникающих в стержнях ферм под действием заданных нагрузок. При этом мы рассматривали фермы как абсолютно жесткие, геометрически неизменяемые системы. В действительности стержни ферм несколько изменяют свою длину и эти изменения сопровождаются соответствующими перемещениями узлов фермы. Хотя эти перемещения при тех напряжениях, какие допускаются на практике в строительных материалах, получаются обыкновенно весьма малыми, но их вычисление в некоторых случаях представляет практический интерес. Например, важное значение имеет вопрос о прогибах мостовых ферм под действием подвижной нагрузки. Большое значение представляет вопрос о перемещениях в связи с расчетом статически неопределимых систем. Совершенно также как и для статически неопределяемых случаев расчета сплошных балок, при расчете систем с *лишними* стержнями или *лишними* опорными закреплениями приходится к ур-ям статики присоединять дополнительные ур-я, составленные на основании рассмотрения деформаций системы.

Когда определены усилия S во всех стержнях системы и найдены на основании закона Гука

$$\delta l = \frac{S \cdot l}{EF} \dots \dots \dots (a)$$

удлинения δl всех стержней, то определение перемещений узлов фермы представляет чисто геометрическую задачу. В случае статически определимой системы с n узлами задача эта, как легко показать, может быть приведена к решению системы $2n$ ур-ий

линейных относительно $2n$ малых величин δx_i , δy_i , представляющих искомые приращения координат узловых точек рассматриваемой фермы. В самом деле, пусть l_{ik} —длина стержня, соединяющего узлы i и k , тогда

$$l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2.$$

Дифференцированием мы устанавливаем такую зависимость между приращением длины стержня, которое может быть найдено на основании формулы (а), и изменениями координат соответствующих узловых точек

$$l_{ik} \delta l_{ik} = (x_i - x_k) \delta x_i - (x_i - x_k) \delta x_k + (y_i - y_k) \delta y_i - (y_i - y_k) \delta y_k.$$

Подобных уравнений мы можем написать столько, сколько имеется стержней (считая и опорные стержни), т. е. $2n$ ур-ий, которые будут заключать $2n$ неизвестных приращений координат узловых точек. Общий способ определения перемещений узлов фермы сводится таким образом к решению системы $2n$ линейных ур-ий с $2n$ неизвестными. Способ этот, хотя и не представляет принципиальных затруднений, но в приложениях является весьма громоздким и на практике им не пользуются. Практика выработала ряд других приемов, которые быстрее ведут к цели. К изложению этих приемов мы теперь перейдем.

§ 39. Способ Максвелла.

В 1864 году в небольшой по объему работе Клерк Максвелл опубликовал *) способ определения перемещений узлов фермы и общий прием для расчета статически неопределимых стержневых систем. Геометрическую задачу об определении перемещений узлов фермы по изменениям длин стержней Максвелл решает на основании самых элементарных рассуждений. В первую очередь он рассматривает такую простую задачу: найти увеличение расстояния между узлами B и C фермы, получающееся вследствие удлинения стержня A на величину δl . Для решения этого вопроса приложим

*) См. Philosophical Magazine, 1864 г. т. 27, стр. 294. „On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames“. Эта работа к сожалению осталась неизвестной для широких кругов инженеров и замеченный в ней способ расчета вошел в практику значительно позднее, после работ Мора, опубликованных в 1874 г.

в B и C две равные и прямо противоположные силы единица и определим усилие S' , вызываемое этими силами в стержне A . Удалим теперь стержень A и вместо него приложим две равные и прямо противоположные силы S' . Таким образом получаем подвижную систему, находящуюся в равновесии под действием сил S' и сил единица, приложенных в B и C . Применяя к этой системе сил начало возможных перемещений, получаем уравне

$$+ S' \cdot \delta l + 1 \cdot \delta L = 0,$$

откуда

$$\delta L = - S' \cdot \delta l.$$

Подобным же образом может быть учтено влияние удлинения любого стержня на изменение расстояния между B и C и полное увеличение расстояния BC , обусловленное деформацией всех стержней системы, представится так

$$\delta L = - \sum S' \cdot \delta l \dots \dots \dots (b)$$

Выражение (b) может быть получено и непосредственно, если мы, применяя начало возможных перемещений, будем иметь в виду два состояния рассматриваемой системы: действительное, при котором стержни получают удлинение δl и фиктивное, когда на систему действуют две равные и прямо противоположные силы единица, приложенные в точках B и C . Эти силы вместе с усилиями S' , возникающими в системе, представляют систему сил взаимно уравновешивающихся, а потому работа их на всяком возможном перемещении должна равняться нулю. Выбирая в качестве возможных перемещений действительные перемещения первого состояния, мы приходим сейчас же к уравнению (b).

Пользуясь обобщенным понятием силы и соответствующего перемещения, мы легко можем применить способ Максвелла к определению изменений всякого рода величин, определяющих форму заданной системы. Например, мы можем определять изменения расстояний между различными прямыми, принадлежащими системе, можем вычислять изменения углов между отдельными стержнями системы и т. д. Положим, требуется найти изменение угла φ между прямыми ik и l_1k_1 , получающееся при действии заданной системы грузов (черт. 270, фиг. а). Кроме действительного состояния системы, которому соответствуют удлинения стержней δl , рассмотрим еще фиктивное состояние (фиг. б),

когда все заданные нагрузки отброшены и к ферме приложена сила, соответствующая искомому перемещению. Обобщенная сила в данном случае составитя из двух равных и прямо противоположных пар сил, с моментами равными единице, приложенных так, как это указано на фигуре (b). Пусть S^1 усилия в стержнях системы для этого фиктивного состояния. Тогда, принимая за возможные перемещения действительные перемещения, соответствующие заданным нагрузкам, и пользуясь началом возможных перемещений, получим *)

$$1 \cdot \delta\varphi - \sum S^1 \delta l = 0.$$

откуда сейчас же может быть найдено искомое изменение угла $\delta\varphi$. Из приведенных примеров ясно, что в тех случаях, когда требуется найти одно или небольшое число различных перемещений, применение способа Максвелла является вполне уместным. Когда же требуется определить перемещения всех узлов системы или большого количества их, способ Максвелла является громоздким, так как для каждого перемещения приходится составлять свою систему усилий S^1 . В таких случаях выгоднее всего воспользоваться одним из графических приемов для определения перемещений узлов фермы.

Задачи.

137) Найти горизонтальное перемещение среднего шарнира трехшарнирной арки под действием заданной нагрузки (черт. 271, фиг. а), если при этом получаются перемещения плетовых шарниров, определяемые составляющими ξ_1 η_1 , ξ_2 η_2 и кроме того температура отдельных стержней системы повышается на t градусов. Кроме действительного состояния системы будем рассматривать фиктивное, представленное на фигуре (b). Из треугольника сил (фиг. с) сейчас же находим соответствующие фиктивному состоянию опорные реакции A и B и их составляющие H_1 , H_2 , V_1 и V_2 . После этого легко находятся усилия S^1 в стержнях системы.

Обратимся теперь к действительному состоянию системы. Через S будем обозначать усилия для этого состояния. Тогда удлинение δl какого-либо стержня под действием возникающего в нем усилия и под влиянием повышения температуры на t градусов определится так:

$$\delta l = \frac{Sl}{EF} + \alpha t l,$$

где α —коэффициент линейного расширения материала стержня.

*) Минус перед знаком суммы получается потому что при удлинении δl усилия S^1 , заменяющие растянутый стержень, совершают отрицательную работу.

Определив таким образом действительные удлинения стержней, будем их рассматривать как возможные перемещения для системы усилий фиктивного состояния. Тогда уравнение равновесия, принимая во внимание смещения опор для действительного состояния, напишется так

$$1. \delta - H_1 \xi_1 - V_1 \eta_1 + H_2 \xi_2 + V_2 \eta_2 - \Sigma S' \cdot \delta l = 0,$$

откуда для искомого горизонтального перемещения шарнира C

$$\delta = \Sigma S' \left(-\frac{Sl}{EF} + \alpha l \right) + H_1 \xi_1 + V_1 \eta_1 - H_2 \xi_2 - V_2 \eta_2.$$

138) Определить перемещение подвижной опоры B (черт. 272, фиг. а) под действием заданной нагрузки и при условии изменения температуры отдельных стержней системы на t градусов. Кроме действительного состояния системы придется рассмотреть фиктивное состояние, представленное на фигуре (b). Определив усилия S' для фиктивного состояния и удлинения стержней

$$\delta l = \frac{Sl}{EF} + \alpha l$$

для действительного состояния, находим искомое перемещение δ из уравнения

$$1. \delta = \Sigma S' \cdot \delta l.$$

139) Найти изменение расстояния a между узлом m и прямой ik , измеренного в заданном направлении mf (черт. 273, фиг. а). Задача заключается в подлежащем выборе типа обобщенной силы, соответствующей искомому перемещению. Такая сила, представляющая группу, составленную из трех сил, изображена на фиг. (b). Работа этой группы сил, при изменении расстояния a на величину δ , будет равняться $1 \cdot \delta$. Применяя начало возможных перемещений к усилиям S' фиктивного состояния и перемещениям δl и δ действительного состояния, получим:

$$1. \delta - \Sigma S' \cdot \delta l = 0,$$

откуда находится искомое перемещение δ .

140) Найти повышение ключевого шарнира C трехшарнирной арки (черт. 274) под действием заданной нагрузки и повышения температуры отдельных стержней системы.

§ 39. Диаграмма Виллио для простейших систем.

В случае простейших систем, составленных путем присоединения к основному треугольнику последовательно всех узлов фермы, каждого двумя стержнями, вопрос о перемещениях легко решается при помощи диаграммы перемещений, впервые построенной Williot'ом. *).

*) Williot, Publications scientifiques industrielles 1877 г.

Рассмотрим предварительно такую простейшую задачу. Узел A прикреплен к системе при помощи двух стержней AB и AC (фиг. а). Положим, заданы перемещения шарниров B и C , а также изменения длин δl_1 и δl_2 стержней 1 и 2. Требуется найти соответствующее перемещение узла A . Для этого предположим, что соединение стержней в шарнире A устранено. После этого стержень AB перенесен параллельно самому себе в положение $A'B'$ так, что BB' по величине и направлению представляет заданное перемещение шарнира B . Точно также стержень AC перенесен в положение $A''C''$ так, что CC'' представляет перемещение шарнира C . В этих новых положениях стержню $A'B'$ придаем заданное удлинение $A'A'$, равное δl_1 и стержню $C''A''$ укорочение $A''A''$, равное δl_2 . После этого для получения нового положения шарнира A остается только из точки B' сделать засечку радиусом $B'A'$, и из точки C'' — засечку радиусом $C''A''$. В пересечении мы получим искомое положение A_1 шарнира A . Так как практически удлинения δl_1 и δl_2 , а также перемещения узлов фермы малы по сравнению с длинами стержней, то с достаточной для практики точностью засечки дугами кругов могут быть заменены перпендикулярами $A_1'A_1$ и $A_2'A_1$. Заметим еще, что при построении выгодно малые перемещения узлов и удлинения стержней для ясности чертежа откладывать в увеличенном масштабе и все построения, относящиеся к определению перемещения узла A , выполнять на особом чертеже (фиг. б). В таком случае получается следующий порядок построения. От произвольного полюса O откладываем в выбранном масштабе по величине и направлению перемещения OA' и OA'' шарниров B и C . Из концов A' и A'' проведенных отрезков откладываем удлинения δl_1 , δl_2 . При этом нужно обращать внимание на направление, в котором эти отрезки должны быть отложены. Если стержень AB удлиняется, то соответствующий отрезок δl_1 откладывается от точки A' в направлении от B к A . Точно также сжатие стержня AC соответствует откладывание отрезка δl_2 от точки A'' в направлении от A к C . Возставив в концах отложенных отрезков перпендикуляры и получив точку их пересечения A_1 , найдем искомое перемещение OA_1 шарнира A .

Освоившись с этим построением, мы теперь без всяких затруднений построим перемещения узлов любой простейшей системы. Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 276.

Предварительно вычисляем удлинение и укорочение $\delta_1, \delta_2, \dots$ всех стержней (сжатые стержни на чертеже указаны толстыми

линиями). Точка a по условиям закрепления остается неподвижной. Предположим еще, что стержень ae сохраняет свое направление. Тогда перемещение точки e направлено горизонтально и равно удлинению δ_2 . Соответственно этому на фигуре (b), где построены перемещения, точка a' совпадает с полюсом O и точка e' получена откладыванием от полюса O отрезка δ_2 по горизонтальному направлению вправо, так как соответствующий стержень 2—растянут.

Определив таким образом, перемещение узлов a и e и зная приращение длин δ_1 и δ_4 , мы сейчас же можем на фигуре (b) найти точку b' , определяющую перемещение шарнира b . Для этого из e' проводим отрезок δ_4 в направлении от e к b и из a' отрезок δ_1 в направлении от b к a . Из концов отложенных таким образом отрезков восставляем перпендикуляры и в пересечении их получаем точку b' . Луч Ob' по величине и направлению даст нам перемещение точки b . Имея на фигуре (b) точки b' и e' , мы тем же способом можем построить точку c' . Для этого из точки e' в направлении от e к c откладываем отрезок δ_5 , и из точки b' , в направлении от c к b —отрезок δ_3 . Восставляя в концах этих отрезков перпендикуляры, получаем точку c' . Луч Oc' дает нам по величине и направлению перемещение узла c . Повторяя то же построение, мы получаем на фигуре (b) точку d' и перемещение Od' опорного шарнира d заданной фермы. Если найденные перемещения узлов в уменьшенном масштабе нанести на фигуре (a), то получим намеченное на чертеже пунктиром деформированное состояние фермы. Относительные перемещения узлов фермы, обусловленные изменениями длин стержней, найдены нами совершенно правильно, но так как в основании построения было положено произвольное допущение, что стержень 2 сохраняет свое направление, то искаженный вид фермы, намеченный на фигуре (a) пунктиром, оказался повернутым вокруг точки a и шарнир d' , который по условиям закрепления должен совершать перемещение, параллельные плоскости скольжения подвижной опоры (в нашем случае горизонтальные перемещения), оказался перемещенным в наклонном направлении ad' . Чтобы получить действительные перемещения узлов, нужно намеченную пунктиром искаженную ферму повернуть вокруг шарнира a на такой угол, чтобы точка d упала на направление ad . Тогда геометрическая сумма из перемещений, представленных фигурой (b), и из перемещений вращения даст нам действительные перемещения узлов, удовлетворяющие условиям закрепления фермы. Для ясности соответствующие переме-

жения вращения представлены отдельно на фигуре (с). Чтобы удовлетворить условиям закрепления на правой опоре фермы, нужно точке d дать вертикальное перемещение вращения $d''O$, равное по величине и противоположное по направлению вертикальной составляющей перемещения Od' , полученного на фигуре (b). Наметив точки a'' и d'' , мы для получения перемещений вращения прочих узлов фермы должны будем только на вертикальном отрезке $a''d''$ построить фигуру $a''b''c''e''d''$ геометрически подобную очертанию заданной фермы. В самом деле, если нужно нам получить перемещение вращения, соответствующее, например, узлу c , то направление перемещения придется наметить, очевидно, перпендикулярно радиусу ac , соединяющему рассматриваемый узел с центром вращения a , а величина перемещения $c''a''$ будет пропорциональна этому радиусу. Следовательно, треугольник $a''c''d''$ на фигуре (с) получится подобным треугольнику acd (фиг. а) и повернутым относительно этого последнего на 90° . Такое же заключение можно получить и для прочих узлов фермы. Следовательно, построенная нами фигура $a''d''c''e''b''$ действительно даст перемещения вращения для всех узлов заданной фермы. Для удобства геометрического сложения ранее полученных перемещений (фиг. b) с перемещениями вращения, мы перенесем фигуру (с) на фигуру (b), тогда отрезки, соединяющие точки с одинаковыми буквами, сразу будут давать величину перемещения. Направление перемещений идут от букв с двумя значками к буквам с одним значком. Возьмем, например, узел d . Перемещение этого узла, при условии сохранения направления стержня 2, представляется по величине и направлению лучем Od' (фиг. b). Перемещение вращения по величине и направлению представляется отрезком $d''O$. Действительное перемещение узла d , являющееся геометрической суммой только что найденных перемещений, представится очевидно отрезком $d''d'$. Точно также найдем, что действительные перемещения узлов c , b и e представятся отрезками $c''c'$, $b''b'$ и $e''e'$.

Заметим, что при построении *диаграммы перемещений*, аналогичной той, которую мы получили на фигуре (b), в случае ферм больших пролетов, точки, изображающие перемещения, по мере удаления от неподвижного опорного шарнира, будут получаться все дальше и дальше от полюса O , чертеж получается весьма растянутым. Мы получим менее растянутую диаграмму, если все построение будем вести, начиная с одного из средних шарниров фермы. Возьмем например, систему, представленную на чертеже 277 (фиг. а).

Начнем построение с среднего шарнира a . Положим, что этот шарнир остается неподвижным и направление стержня ab неизменным. Тогда на *диаграмме перемещений* (фиг. б) точка a' совпадает с полюсом O и точка b' расположится в конце вертикального отрезка $a'b'$, равного удлинению стержня 1 . Намеся точки a' и b' мы ведем теперь дальнейшее построение так же, как это было показано раньше. Имея удлинения δ_3 и δ_2 мы строим точку c' . По удлинениям δ_8 и δ_5 строим точку f' . Далее наносим точки d' , g' и, наконец, опорные шарниры h' и e' . Получив таким образом перемещения всех точек и нанеся эти перемещения в уменьшенном масштабе на фигуре (а), мы получим намеченное на чертеже пунктиром деформированное состояние фермы. Так как мы при построении исходили из произвольного допущения, приняли шарнир a неподвижным и стержень ab не поворачивающимся, то в результате нашего построения условия на опорах фермы оказываются не удовлетворенными. Шарниры h и e переместились в положение h' и e' . Чтобы получить действительные перемещения шарниров, нам нужно теперь намеченную пунктиром искаженную ферму переместить как неизменяемую систему в такое положение, чтобы были удовлетворены условия на опорах. Этого мы можем достигнуть таким образом. Сначала перемещаем ферму поступательно так, чтобы точка h' совпала с точкой h (фиг. а). После этого вращаем ферму относительно h до тех пор, пока точка e' не упадет на линию he , соответствующую направлению скольжения подвижного шарнира e . Перемещения узлов, соответствующие указанным двум движениям, должны быть геометрически сложены с перемещениями, полученными на диаграмме (б). Тогда в результате этого сложения мы получим действительные перемещения узлов фермы. Чтобы к перемещениям, найденным на фигуре (б), прибавить поступательное перемещение $h'O$, нужно только полюс, от которого производится отсчет перемещений перенести из точки O в точку h' . Легко показать, что такой перенос соответствует геометрическому сложению найденных раньше перемещений с перемещением $h'O$. Возьмем, например, узел c . Найденное для него перемещение по величине и направлению определяется лучом Oc' , имеющим направление от точки O к точке c' . К этому перемещению нужно прибавить вектор $h'O$. Геометрическая сумма этих отрезков даст нам вектор $h'c'$, имеющий направление от точки h' к точке c' .

Перенос полюса из точки O в h'' , соответствует, следовательно сложению найденного раньше перемещения Oe' с поступательным перемещением $h'O$. Подобное заключение справедливо и для других узлов фермы. Выполнив поступательное перемещение фермы, мы должны будем в точке h' , с которой теперь совпадает полюс, поместить и точку h'' , так как действительное перемещение этой опорной точки равно нулю. Обратимся теперь к другому опорному шарниру, шарниру e . После поступательного передвижения искаженной фермы, перемещение этого шарнира представится лучом $h'e'$ и имеет наклонное направление. Так как по условиям закрепления перемещение правой опоры должно быть горизонтальным, то после поступательного переноса фермы, ее придется повернуть вокруг h на такой угол, чтобы уничтожить вертикальную составляющую перемещения $h'e'$. Другими словами перемещение вращения шарнира e должно представиться по величине и направлению отрезком $e''h'$. Для получения перемещений вращения других узлов фермы остается только на вертикальном отрезке $e''h''$ построить фигуру геометрически подобную очертанию заданной фермы. Отрезки, соединяющие на фигуре точки с одинаковыми буквами, дадут нам величины соответствующих действительных перемещений. Направления перемещений идут от букв с двумя значками к буквам с одним значком. Например, перемещение узла d по величине и направлению определится вектором $d''d'$. На практике особое значение имеют вертикальные перемещения (прогибы) узлов пояса фермы. Для данного случая проектируя перемещения, найденные на фигуре (d) и проводя замыкающую h_0e , легко получаем прогибы узлов нижнего пояса фермы.

Многоугольник $h_0g_0a_0d_0e$ называют *многоугольником прогибов или линией прогибов*. Заметим здесь, что построение диаграммы перемещений легко может быть выполнено намеченным здесь способом и в тех случаях, когда перемещения подвижной опоры не горизонтальны, а происходят по заданному наклонному направлению.

Задачи.

141) Найти перемещение узла A (черт. 278), если узел B совершает горизонтальное перемещение, равное 2 м., а узел C перемещается вертикально вниз на 2 м. Длина брусьев AB и BC остается при этом неизменной.

142) Построить диаграмму перемещений и найти полюс по середине для системы, представленной на чертеже 279. Предположим, что шарнир d остается при деформациях неподвижным и направление стержня bd неизменным. Тогда, пользуясь готовыми значениями удлинений $\delta_1, \delta_2, \dots$ (растянутые стержни отмечены на фигуре а знаком $+$), получаем на диаграмме перемещений (фиг. б) точки b', c' и a' . Перемещения Oa' и Oc' не удовлетворяют условиям закрепления фермы на опорах. Мы должны искаженной ферме дать поступательное перемещение равное $a'O$ (шарнир a —неподвижен) и потом повернуть ферму около точки a так, чтобы перемещение c' шарнира c совпадало с направлением скольжения подвижной опоры. Для этого мы принимаем точку a' за полюс, проводим $c''a'$ параллельно направлению перемещения опоры c и на полученном таким образом, вертикальном отрезке $a'c''$ строим фигуру $a''b''c''$, подобную очертанию заданной системы. Из полученной таким образом диаграммы сейчас же могут быть найдены все перемещения по величине и направлению.

143) Построить диаграмму перемещений для системы, представленной на чертеже 280. Предполагая точку a неподвижной и стержень aa неповорачивающимся, строим на диаграмме перемещений (фиг. б) точки d', b' и c' . Получаемое при этом расположение искаженной фермы (см. фиг. а) не удовлетворяет условию закрепления точки c . Всю систему необходимо повернуть около шарнира a так, чтобы перемещение шарнира c соответствовало заданному укорочению δ_c стержня b . Для этого на фигуре (б) в найденному перемещению Oc' нужно геометрически прибавить такое перемещение $c'O \perp a$, чтобы сумма этих перемещений $c''c'$ имела в направлении стержня bc составляющую равную δ_c . Теперь остается только на отрезке Oo'' построить фигуру $c''b''a''d''$ геометрически подобную заданной ферме и мы будем иметь на чертеже величины и направления перемещений всех узлов фермы.

144) Построить диаграммы перемещений для узлов систем, представленных на чертеже 281. Нулевые усилия и усилия растяжения отмечены на чертежах. Изменения длин всех стержней предполагаются известными.

§ 40. Диаграмма Виллио для сложных ферм.

В случае сложной фермы, образованной из вспомогательных фермочек по такому же закону, как простейшие фермы состояются из стержней, построение диаграммы Виллио может быть выполнено без всяких затруднений. Нужно только при построениях вместо изменений длин стержней пользоваться изменениями расстояний между шарнирами, соединяющими вспомогательные фермочки. Ход построения поясним на простом примере (черт. 282, фиг. а). Знаки усилий отмечены на чертеже. Изменения длин всех стержней предполагаются известными. Сначала строим диа-

грамму перемещений для фигуры $abcd$, считая точку a неподвижной и стержень ab не поворачивающимся (фиг. b). Потом строим такую же диаграмму (фиг. c) для части $defg$, считая неподвижным шарнир g и неповорачивающимся стержень eg . Из этой новой диаграммы мы сейчас же можем найти изменение расстояния между шарнирами d и g . Для этого нужно только отрезок $g'd'$, представляющий относительное перемещение этих шарниров, спроектировать на направление линии dg . Полученный таким образом отрезок δ_{gd} даст нам укорочение расстояния между шарнирами d и g . Чтобы нанести на фигуре (b) точку g' , определяющую перемещение шарнира g , нужно еще определить изменение расстояния между шарнирами a и g . Для этого, вообще говоря, требуется построение диаграммы перемещений для фермочки $ahgk$, но в данном случае можно избежать этого построения. Стержни ah и hg расположены по одной прямой, поэтому сближение точек a и g , обусловленное поворачиванием этих стержней на малые углы, представится малой величиной высшего порядка который можно пренебречь. В таком случае изменение расстояния ag определится, как сумма известных уже нам удлинений стержней ah и hg . Определив, таким образом, изменения расстояний dg и ag , мы можем построить теперь на фигуре (b) точку g' совершенно также, как если бы вместо фермочки $degf$ и $ahgk$ были простые стержни dg и ag . Для нахождения действительных перемещений шарнира g и шарниров фермочки $abcd$, остается только принять условия на опорах. Шарнир a — неподвижен, поэтому a'' совпадает с полюсом O . Шарнир g перемещается горизонтально. Для получения соответствующей точки g'' на фигуре (b), нужно через найденную точку g' провести горизонтальную линию до пересечения с вертикалью, идущей через полюс, в точке g'' . Теперь остается только на отрезке $a'g''$ построить фигуру геометрически подобную очертанию заданной сложной фермы. Чтобы получить перемещение узлов фермочки $delf$ нужно на фигуре (c) нанести найденные уже действительные перемещения $d''d'$ и $g''g'$ шарниров d и g и по точкам d'' и g'' построить фигуру $d''e''g''f''$ подобную очертанию фермочки $degf$. Если построения выполнены правильно, то направление $d''g''$ должно получиться перпендикулярным направлению dg . Таким образом получаем все данные для определения перемещений узлов сложной фермы.

На основании сделанного примера, можно наметить такой порядок построения диаграммы Виллио для сложных систем рас-

смаатриваемого типа. Сначала выбираем одну из фермочек и все остальные фермочки заменяем стержнями, располагающимися между шарнирами, соединяющими фермочки и между опорными шарнирами. Полученная таким образом система из заменяющих (фигтивных) стержней будет образована по типу *простейшей системы*. Изменения длин фиктивных стержней получаем из частных диаграмм, которые должны быть построены для каждой вспомогательной фермочки. Пользуясь диаграммой для выбранной фермочки и изменениями длин фиктивных стержней, строим, пользуясь прежними правилами, перемещения всех шарниров, соединяющих фермочки, и всех опорных шарниров. Пользуясь условиями закрепления на опорах, мы после этого легко находим и действительные перемещения указанных точек. Чтобы получить перемещения промежуточных шарниров вспомогательных фермочек, остается только на построенные раньше частные диаграммы отдельных фермочек нанести уже найденные действительные перемещения соединительных шарниров. Этих точек будет достаточно для получения, путем построения геометрически подобных фигур, перемещений всех прочих узлов.

Задачи.

145) Построить диаграмму перемещений для фермы Полонсо (черт. 283). Действующие на ферму нагрузки и изменения длин стержней указаны на чертеже (фиг. а). Предполагая узел a неподвижным и стержень ab не поворачивающимся, строим диаграмму перемещений для части фермы cha . Для получения перемещений шарниров i и q , принадлежащих второй половине фермы, строим на фигуре (с) диаграмму перемещений для этой половины и из нее находим изменение длин δh_i , δh_q и δik . После этого, по общим правилам, строим точки i и q , определяющие перемещения узлов i и q . Чтобы получить действительные перемещения, удовлетворяющие условиям закрепления на опорах, мы сообщаем ферме поступательное перемещение $e'O$, что равносильно переносу полюса в точку e' (фиг. б), и, после этого, поворачиваем ферму вокруг точки e с таким расчетом, чтобы перемещение $q''q'$ узла q получалось горизонтальным. Для этого проводим через построенную уже точку q' горизонтальную прямую до пересечения с вертикалью, идущей через e' , в точке q'' . Теперь, для получения перемещений прочих точек, строим на отрезке $e'q''$ фигуру $q''h''e'$, геометрически подобную очертанию заданной фермы. Для получения перемещений промежуточных узлов правой половиной фермы, мы переносим на фигуру (с) найденные перемещения $q''q'$ и $h''h'$. Если построение выполнено правильно, то $q''h''$ должно получиться перпендикулярно к qh . Построив на $q''h''$ фигуру $q''h''i''$ геометрически подобную правой по-

ловине фермы ihq , получаем перемещения для всех узлов этой половины фермы. Заметим, что в данном примере, для определения изменения расстояний hi , iq и hq можно было и не строить диаграммы перемещений для второй половины фермы. В самом деле, каждое из этих расстояний составляется из нескольких стержней, расположенных по одной прямой. В таком случае, нужные нам изменения расстояний получатся как суммы изменений длин соответствующих стержней. Определив на основании этого положение точек i' и q' на диаграмме (b), мы можем на той же диаграмме наметить k' , зная δ_{12} и δ_{hk} и далее n' — по величинам δ_8 и δ_{13} , p' — по величинам δ_{14} и δ_3 и, наконец, l' и m' — по величинам δ_6 , δ_{11} , δ_{20} и δ_2 , т. е., все построение выполняется независимо от диаграммы, представленной на фиг. (c). Повторим, что такое упрощение становится возможным лишь вследствие того, что по направлениям hq , hi и iq стержни располагаются в одну прямую. В противном случае, для определения нужных нам изменений расстояний, необходимо построение диаграммы и для второй половины фермы.

146) Построить диаграмму перемещений для трехшарнирной арки с затяжкой (черт. 284). Сначала строим частные диаграммы I и II для левой и правой половины фермы. Из диаграммы II находим изменение расстояния bc . Получив это изменение и имея величину δ_{ac} приращения длины стержня ac , строим на диаграмме I точку c' . Теперь надлежащим поворотом левой половины фермы относительно шарнира a найдем действительные перемещения узлов левой половины фермы и опорного узла c . Перенеся действительные перемещения шарниров b и c на диаграмму II, получим возможность найти действительные перемещения прочих узлов системы.

147) Построить диаграмму перемещений для систем, представленных на чертеже 285. При построении диаграммы перемещений для системы, представленной на фигуре (a), начинаем с фермочки abc . Далее, пользуясь тем, что пояса вспомогательных фермочек прямолинейны, мы, суммируя удлинения отдельных брусьев, находим изменения расстояний bf , bc , cf , cg , gd и cd . После этого на диаграмме перемещений можно получить точки f' , c' , g' и d' и надлежащим поворотом фермы около шарнира a найти действительные перемещения шарниров фермочки abc и узлов f , c , g , d . Перемещения промежуточных шарниров фермочек bef и cgd могут быть найдены без построения особых диаграмм, если воспользоваться замечанием, сделанным при построении диаграммы для фермы Полонсо. Намеченный здесь порядок построения диаграммы перемещений можно применить также и к ферме, представленной на фигуре (b). Для получения перемещений промежуточных узлов вспомогательных фермочек в этом случае придется строить отдельные частные диаграммы.

148) Построить диаграмму перемещений для систем, представленных на чертеже 286. Каждая из этих ферм составлена из двух простейших систем, связанных между собой шарниром b и стержнем ce . Сначала строим отдельные диаграммы I и II для левой и правой половины фермы. Из диаграммы II находим изменения расстояний bc , ce

и bd . После этого, на диаграмме I могут быть получены точки e' и d' и после надлежащего поворота части $ac'b$ около шарнира a будут найдены действительные перемещения всех узлов левой половины фермы, а также шарниров e и d . Теперь для получения действительных перемещений узлов правой половины фермы, остается только перенести на диаграмму II действительные перемещения шарниров e и d .

§ 41. Построение диаграмм Виллио для систем, не представляющих одного жесткого целого.

Когда заданная система составлена из нескольких жестких частей, относительная неподвижность которых обеспечена дополнительными опорными закреплениями, то для определения перемещений узлов начинаем с построения диаграмм перемещений для отдельных жестких частей системы. После этого нужно найти действительные перемещения соединительных и опорных шарниров из условий связи между жесткими частями и из опорных закреплений. Общий ход решения подобных задач поясним на простейших примерах. В качестве простейшего примера рассмотрим трехшарнирную арку abc (черт. 287, фиг. а). Здесь две жесткие части I и II в точках a и c шарнирно скреплены с фундаментом и в точке b связаны шарниром между собой. Сначала построим частные диаграммы I и II [фиг. (b) и (c)], считая точки a и c неподвижными и направления стержней ad и ce неизменными. Таким образом из диаграммы I фиг. b находим для узла b перемещение $a'b'$. Для того же узла из диаграммы II (фиг. c) находим перемещение $c'b'$. Теперь каждую половину трехшарнирной арки нужно так повернуть около соответствующего неподвижного шарнира, чтобы геометрическая сумма из найденных уже перемещений и перемещений вращения получалась для шарнира b одинаковой независимо от того рассматриваем ли мы этот шарнир принадлежащим левой или правой половине фермы. Рассматривая левую половину фермы, заключаем, что при вращении ее около шарнира a , перемещение точки b будет иметь направление mn перпендикулярное к ab . Следовательно, на фигуре (b) точка b'' должна располагаться на линии mn . Проеция искомого перемещения $b''b'$ на направление ab будет иметь величину $b'k$ (фиг. b). Точно также рассматривая правую половину трехшарнирной арки, заключаем, что на фигуре (c) точка b'' должна располагаться на линии m_1n_1 перпендикулярной к направлению bc и проекция искомого перемещения $b''b'$ на направление bc равно $b'k_1$. Имея

две проекции $b'k$ и $b'k_1$ перемещения $b''b'$, мы легко получаем и нужное нам перемещение. Откладывая на фигуре (b) величину $b'k_1$ получаем точку k_2 . Перпендикуляр, восстановленный в k_2 к линии $b'k_2$ даст в пересечении с mn искомую точку b'' . Подобным же образом находим точку b'' и на фигуре (c). Найдя точки b'' и приняв во внимание, что точки a'' и c'' совпадают с a' и c' , находим перемещения всех прочих узлов фермы путем построения фигур $a'd''b''f''$ и $c'e''b''g''$ геометрически подобных левой и правой половине трехшарнирной арки.

К тому же результату мы могли бы прийти, если бы воспользовались приемом, применявшимся выше при рассмотрении сложных ферм. Из частных диаграмм (b) и (c) мы путем проэктирования находим изменения расстояний ab и bc . Они представляются отрезками $b'k$ и $b'k_1$. По этим изменениям сейчас же может быть построено перемещение точки b . Для этого придется только начертить имеющийся на фигуре (b) четырехугольник $b'k_2b''k$.

В качестве более сложного примера рассмотрим построение перемещений для консольно балочной системы (черт. 288). Система составлена из трех геометрически неизменяемых частей, соединенных между собой шарнирами c и d . Для части I, имеющей в a неподвижную и в b подвижную опору, действительные перемещения всех узлов могут быть получены без всяких затруднений. Нам для дальнейшего понадобится перемещение шарнира c и мы будем считать это перемещение известным из диаграммы I, не представленной на чертеже. Теперь строим частные диаграммы II и III для подвесной фермы cd и правой консольной балки def . Чтобы не затемнять чертежа, мы даем на фигуре (b) лишь положение точек c' и d' частной диаграммы II и на фигуре (c) — положения точек d' , e' и f' частной диаграммы III. Построив эти диаграммы, исходя из неподвижности какого-либо узла и из условия сохранения направления каким-либо стержнем, мы для получения действительных перемещений должны будем жестким частям II и III сообщить такие дополнительные перемещения, чтобы оказались выполненными условия закрепления на опорах и условия соединения в узлах c и d . Для части II мы из диаграммы I знаем действительное перемещение соединительного шарнира c . Это перемещение в виде отрезка $c''c'$ наносим на диаграмме II (фиг. b). Если теперь за полюс выбрать c'' , то условие в соединительном шарнире c будет удовлетворено. Теперь

нужно часть II поворачивать вокруг c до тех пор, пока для точки d не получим такого же перемещения $d'' d'$, как и для узла d в ферме def . При таком поворачивании точка d будет совершать перемещение перпендикулярное к направлению cd . На основании предыдущего мы можем заключить, что точка d'' должна лежать на вертикальной линии, идущей через c'' . Положение d'' на этой линии может быть найдено лишь после рассмотрения диаграммы III (фиг. с). На этой диаграмме у нас пока имеются лишь точки f' , e' и d' . Так как опорные узлы e и f могут совершать лишь горизонтальные перемещения, то, следовательно, точки f'' и e'' непременно должны лежать на горизонтальных линиях, проходящих через f' и e' . Принимая во внимание, что точки e'' и f'' получаются в результате поворота фигуры III около неподвижного центра, мы сейчас же можем нанести и ту прямую, на которой лежит в диаграмме III точка d'' . Очевидно отношение расстояний a и b между прямыми будет равно отношению соответствующих расстояний a_1 и b_1 между узлами фермы, и мы будем иметь

$$a : b = a_1 : b_1$$

Таким образом получены три параллельные прямые, идущие через f'' , e'' и d'' . Так как перемещение соединительного шарнира d должно получиться на фигурах (b) и (с) одинаковым, то для получения точки d'' на фигуре (с) мы можем воспользоваться тем, что горизонтальная составляющая перемещения $d'' d'$ нам уже известна из фигуры (b). Эта составляющая, очевидно, равна m , расстоянию от точки d' до вертикали, идущей через c'' . Отложив от точки d' на фигуре (с) горизонтальный отрезок m и проведя через конец его вертикальную линию, найдем в пересечении с ранее проведенной горизонтальной прямой искомую точку d'' . Принимая во внимание, что $d'' e'' \perp de$ и $e'' f'' \perp ef$, мы строим теперь, при помощи ранее проведенных горизонтальных линий, фигуру $d'' e'' f'' k''$ геометрически подобную ферме $defk$. Получив таким образом перемещения всех узлов части III, мы переносим перемещение $d'' d'$ на фигуру (b) и на отрезке $c'' d''$ строим фигуру $c'' i'' d''$, подобную cd . Теперь у нас будут все данные для получения действительных перемещений всех узлов части II. На основании построенных диаграмм мы без всякого затруднения можем начертить линию прогибов для горизонтального пояса $lcdk$ нашей системы.

Задачи.

149) Построить диаграмму перемещений и линию прогибов для системы, представленной на чертеже (289). От только что рассмотренного случая заданная система отличается лишь устройством опор. Мы строим сначала частные диаграммы для частей I, II и III. По условиям закрепления, сейчас же находятся перемещения всех узлов частей I и III. Таким образом найдутся действительные перемещения точек c и d . Принимая во внимание, что точка c является общей для частей I и II и в точке d части II и III имеют одинаковое вертикальное перемещение, мы, перенося на частную диаграмму II полное перемещение точки c и вертикальное перемещение точки d , будем иметь достаточно данных для получения действительных перемещений всех прочих узлов части II.

150) Построить диаграмму перемещений и линию прогибов для консольно-балочной системы, представленной на чертеже 290. Перемещения для частей I, II и III строятся так, как это было объяснено на чертеже 288. Найдя из диаграммы III перемещение шарнира k и приняв во внимание, что шарнир l совершает горизонтальные перемещения, мы легко находим действительные перемещения всех узлов части IV.

151) Найти диаграмму перемещений и линию прогиба верхнего пояса для консольно-арочной системы, представленной на чертеже 291. Диаграмма перемещений для средней части системы построится так, как это было показано для трехшарнирной арки. Из этой диаграммы мы найдем действительные перемещения шарниров d и e . По этим перемещениям и по опорным закреплениям в узлах g и h легко находятся перемещения узлов для частей I и II.

§ 42. Диаграмма Виллио в более сложных случаях.

В предыдущих примерах приходилось строить диаграмму перемещений для простейших ферм, опертых в двух точках, или для систем, составленных из простейших ферм, путем соединения их при помощи шарниров и соединительных стержней. Условия закрепления на опорах во всех случаях были таковы, что мы без затруднений могли получать действительные перемещения, удовлетворяющие условиям на опорах. Обратимся теперь к фермам, не относящимся к типу простейших и к более сложным условиям на опорах. При решении подобных задач выгодно пользоваться таким приемом. Сначала выбрасываем один из стержней фермы или один из опорных стержней и геометрическую неизменяемость ¹⁾ получающейся после этого системы обеспечиваем до-

¹⁾ Мы говорим, конечно, о геометрической неизменяемости в предположении неизменной длины всех стержней системы.

полнительным опорным закреплением, например, закреплением, обеспечивающим определенное направление перемещения какого либо узла. Закрепление подбираем так, чтобы введя его можно было без затруднений построить диаграмму перемещений. Получив такую диаграмму, мы из нее легко находим изменение расстояния между теми узлами, которые были соединены выброшенным стержнем. Так как мы совершенно произвольно внесли дополнительное закрепление, то конечно полученное нами на диаграмме изменение указанного выше расстояния не будет, вообще говоря, равняться известному из предварительного расчета удлинению устраненного стержня. Теперь мы должны устранить введенное при построении диаграммы закрепление и полученной таким образом подвижной системе сообщить такое перемещение, чтобы удлинение устраненного стержня в точности равнялось изменению расстояния между соответствующими узлами. Тогда геометрическая сумма из полученных таким образом перемещений и из перемещений, найденных по диаграмме, даст нам нужные действительные перемещения узлов системы. При исследовании перемещений узлов подвижной системы с большой выгодой можно пользоваться как изображающими точками, так и способом, основанным на построении мгновенных центров для отдельных жестких частей системы. Поясним эти общие соображения несколькими простыми примерами. Положим, требуется найти перемещения узлов геометрически неизменяемой статически определимой системы $abcdef$, составленной из девяти стержней (черт. 292). Удлинения всех стержней предполагаются найденными путем предварительного расчета и знаки усилий отмечены на чертеже. Рассматриваемая система не принадлежит к типу простейших и диаграмма перемещений не может быть получена прежними приемами. Для решения вопроса воспользуемся высказанными выше общими соображениями. Устраним стержень g , соединяющий узлы a и f и неизменяемость системы обеспечим тем, что заставим стержень ab сохранять свое первоначальное направление, что равносильно введению абсолютно жесткого опорного стержня bm . Преобразовав таким образом заданную нам систему, мы легко найдем перемещения всех узлов. Точка a' , очевидно, совпадет с полюсом o (фиг. b). Точки b' и d' найдутся, если мы отложим δ_1 и δ_2 по направлениям стержней 1 и 2. Пользуясь удлинениями δ_3 и δ_4 строим точку c' . Далее строим точки e' и f' . Теперь, проектируя на направление стержня af отрезок Of' , найдем то изменение расстояния между

шарнирами a и f , которое получается, если допустить, что стержень ab сохраняет свое направление. Устроим это условие и рассмотрим перемещения получающейся таким образом подвижной системы. Исследование этих перемещений произведем при помощи изображающих точек. Шарнир b может совершать теперь перемещения, перпендикулярные к направлению ab . Соответствующая изображающая точка b_0 будет лежать на ab . Отрезок b_0 возьмем произвольной длины. Проведем линии $b_0 c_0 \parallel bc$ и $b_0 e_0 \parallel be$ получаем изображающие точки c_0 и e_0 . Изображающая точка f_0 получится в пересечении линий $ef_0 \parallel ef$ и $c_0 f_0 \parallel cf$. Направление mn перпендикулярное к ff_0 определит возможное перемещение точки f рассматриваемой подвижной системы. Величину этого перемещения $f''O$ (фиг. б) выберем такой, чтобы геометрическая сумма перемещений $f''O$ и $O f'$ давала на направление af проекцию, равную изменению длины стержня af . В нашем случае это изменение есть сжатие δ_0 . Наша подвижная система имеет одну степень свободы, и потому, дав точке f определенное перемещение $f''O$, мы получим вполне определенные перемещения и для прочих узлов. Эти перемещения придется геометрически сложить с перемещениями, полученными на диаграмме ранее. Возьмем, например, точку e . К перемещению Oe' , имеющемуся на диаграмме, придется прибавить перемещение $e''O$ точки e подвижной системы. Точка e'' найдется в пересечении прямой Oe'' , перпендикулярной ee_0 (фиг. а) и прямой $e''f''$, перпендикулярной стержню ef ¹⁾. Таким же образом найдутся и прочие точки с двумя значками.

Отрезки $f'' f'$, $e'' e'$ и т. д. дадут по величине и направлению искомые перемещения.

В качестве второго примера рассмотрим случай простейшей фермы, имеющей три опорных точки (черт. 293). Изменения длин всех стержней предполагаются вычисленными раньше. Знаки усилий отмечены на чертеже. Мы сначала устроим стержень he и построим диаграмму перемещений (фиг. б) в предположении, что стержень af сохраняет свое направление. Точки диаграммы получим в таком порядке a' , d' , b' , c' и наконец e' . Проекция перемещения Oe' на направление he получится, вообще говоря, не

¹⁾ Мы откладываем не повернутые скорости, как это делалось при построении изображающих точек, а действительные скорости. Поэтому картина скоростей $e''f''$ будет перпендикулярна к направлению ef соответствующего стержня.

равной изменению длины устраненного стержня he . Чтобы удовлетворить этому условию и получить изменение расстояния he в точности равным изменению длины устраненного стержня, мы отбросим дополнительное закрепление, которое удерживало неизменным направление стержня af . Тогда получим подвижную систему: ферма $abce$ будет иметь возможность вращаться около мгновенного центра o . При этом точка e будет перемещаться по прямой mn , перпендикулярной oe . Величину этого перемещения $e''O$ (фиг. б) выберем такой, чтобы геометрическая сумма из перемещений $e''O$ и Oe' дала нам отрезок $e''e'$, проекция которого на направление стержня he равна δ_{10} . В данном случае изменение длины δ_{10} является сжатием, что и принято во внимание. Проекция перемещения имеет направление от e к h . Нанеся на чертеже точку e'' , мы легко можем построить и прочие точки с двумя значками.

Задачи.

152) Построить диаграмму перемещений для двухпролетной системы, представленной на чертеже 294. Сначала устраним опору g и для обеспечения неподвижности системы введем дополнительное закрепление, обеспечивающее неизменность направления стержня ab . Для получаемой таким образом системы, мы без затруднения строим диаграмму перемещений. Построив частные диаграммы для жестких частей I и II простейшего типа, мы из них находим изменения расстояний ab , ac , dg и eg , которые обозначим номерами 1, 2, 8 и 9 и потом строим диаграмму, представленную на фигуре (б). Получаемое при этом перемещение Og' узла g не удовлетворяет условию опорного закрепления. В точке g мы имеем подвижную опору, могущую перемещаться по горизонтальному направлению. Чтобы удовлетворить этому условию устраним введенное нами дополнительное закрепление бруска ab и полученной таким путем подвижной системе сообщим такое движение, чтобы получаемое при этом перемещение шарнира g , сложенное с уже найденным перемещением Og' , давало в сумме горизонтальный отрезок. Для изучения перемещений подвижной системы, можно воспользоваться способом изображающих точек. Точку b_0 наносим на бруске ab в произвольном расстоянии bb_0 от точки b . После этого, проведением прямых $b_0c_0 \parallel bc$ и $b_0e_0 \parallel be$, получаем изображающие точки c_0 и e_0 . Для получения изображающей точки d_0 проводим $c_0d_0 \parallel cd$ и $e_0d_0 \parallel ed$. Наконец, для получения g_0 строим $\triangle c_0d_0g_0 \sim \triangle cdg$. По направлению gg_0 устанавливаем перпендикулярное к нему направление mn возможного перемещения для шарнира g . На фигуре (б) нужно взять такую величину $g''O$ этого перемещения, чтобы направление $g''g'$, согласно условию закрепления на опоре, получилось горизонтальным. Теперь мы легко находим и прочие точки с двумя значками. Например, для получения d'' замечаем, что перемещение $d''O$

перпендикулярно направлению ad_0 и, кроме того, линия $g'd''$, изображающая перемещение бруска gd , должна быть перпендикулярна направлению этого бруска. Точка e' получится в пересечении прямой $Oe' \perp ce_0$ и прямой $e'd'' \perp ed$ и т. д. Заметим здесь, что изображающие точки понадобились нам для того, чтобы определить направление m перемещения шарнира g . Это направление мы могли бы также легко найти, определяя положение мгновенного центра (II) для жесткой части II нашей системы. Построения, служащие для определения нужного мгновенного центра нами уже производились раньше. Они намечены пунктиром на фигуре (а). Направление (II) g , очевидно, должно совпасть с найденным ранее направлением g_0 .

Указанный здесь прием решения задачи применим также к системе, представленной на чертеже 295. На этом чертеже намечены построения, относящиеся к определению мгновенных центров (II) и (III) для той подвижной системы, которая получается после устранения опоры g . Направление m , перпендикулярное к радиусу (III) g , определит направление возможного перемещения для шарнира g .

153) Построить диаграмму перемещений и линию прогибов верхней пояса трехпролетной системы, представленной на чертеже 296. Система эта составлена из четырех жестких частей, заштрихованных на фигуре (а). Устраняя шарнир g , получаем две подвижные системы, каждая из которых составлена из двух жестких частей. Закрепляя для левой системы направление ab и для правой системы направление nk , мы легко найдем соответствующие перемещения узлов как левой, так и правой системы. На фигурах (b) и (c) даны лишь перемещения $O_1g'_1$ и $O_2g'_2$ шарнира g . В действительности, шарнир g является общей точкой для левой и правой половины системы. Чтобы удовлетворить этому условию, мы устраним укрепления направлений ab и kn и дадим подвижным системам такие движения, чтобы соответствующие перемещения шарнира g , сложенные с найденными уже перемещениями $O_1g'_1$ и $O_2g'_2$, давали для левой и правой половины одну и ту же величину. Исследование перемещений подвижных систем можно выполнить путем построения соответствующих мгновенных центров. Построения эти указаны на фигуре (а). Пользуясь центрами (II) и (III), мы сейчас же можем нанести направления $p_1q_1 \perp (II)g$ и $p_2q_2 \perp (III)g$, определяющие направления возможных перемещений шарнира g . Обращаясь к фигуре (c), заключаем, что действительное перемещение шарнира g имеет в направлении перпендикулярном p_2q_2 составляющую, равную m . Переносим эту составляющую на фигуру (b), откладывая от точки g'_1 отрезок m и проводя через конец этого отрезка прямую параллельную p_2q_2 , получим в пересечении с направлением p_1q_1 искомую точку g_1'' . Теперь без затруднения могут быть найдены и прочие точки с двумя знаками.

154) Построить диаграмму перемещений для цепного моста, усиленного двумя жесткими фермами I и II (черт. 279). Удлинения всех стержней предполагаются найденными предварительным расчетом, и мы, устранив подвижную опору в шарнире r и задавшись определенным направлением для перемещения точки s (фиг. а) легко найдем пере-

мещения всех узлов системы. Откладывая от полюса O удлинение δ_1 и восставляя в конце его перпендикуляр, найдем в пересечении этого перпендикуляра с горизонтальным направлением точку a' . Далее, откладывая от a' величину δ_2 и восставляя перпендикуляр, возьмем на этом перпендикуляре в произвольном месте точку c' . Задав себе таким образом перемещение шарнира c , мы легко находим перемещения прочих узлов. Имея c' и принимая во внимание, что b' совпадает с полюсом O , мы можем построить d' . Далее получаем на диаграмме точки в таком порядке: $e', f', g', k', i', k', l'$. Имея перемещения шарнира k и направление перемещения шарнира p , мы легко находим перемещения всех узлов жесткой части II и далее получаем точки m', n' и наконец r'^1). Так как мы произвольно задались положением точки c , то в результате построения мы получили перемещение Or' , не удовлетворяющее условию закрепления. Устраним теперь введенное нами дополнительное закрепление шарнира c и изучим перемещения полученной таким образом подвижной системы. Узел r этой системы, связанный стержнем rq с неподвижной точкой q , будет иметь возможность совершать перемещения перпендикулярные rq . Нанеся это направление на диаграмму (фиг. б), мы так выберем величину $r''O$ этого перемещения, чтобы геометрическая сумма $r''O + Or'$ дала нам горизонтальное перемещение $r''r'$. Чтобы найти действительные перемещения прочих узлов, нужно теперь выяснить, какие движения будут совершать узлы системы, когда узел r совершает перемещение $r''O$. Этот вопрос проще всего разрешить при помощи изображающих точек. Точку c_0 на линии ac намечаем произвольно и проведением линии $c_0d_0 \parallel cd$, находим точку d_0 . Теперь построением геометрически подобной фигуры находим изображающие точки для всех узлов жесткой части I. После этого, проведя линии $c_0h_0 \parallel ch$ и $g_0h_0 \parallel gh$, находим точку h_0 и таким же образом точку l_0 . Имея изображающую точку k_0 и проводя линию $k_0p_0 \parallel kp$ до пересечения с опорной вертикалью, находим изображающую точку p_0 . Построением геометрически подобной фигуры находим изображающие точки для всех узлов жесткой части II, после чего строятся точки m_0, n_0 и, наконец, r_0 . Имея направления перемещений всех узлов и величину $r''O$, мы легко находим на диаграмме (фиг. б) все прочие точки с двумя значками и, следовательно, действительные перемещения всех узлов фермы.

§ 43. Диаграмма перемещений для шарнирного многоугольника.

На ряде примеров мы показали, как в различных случаях может быть построена диаграмма перемещений. Из этих примеров видно, что построение усложняется с увеличением числа узлов. При этом точность чертежа убывает, в особенности в тех случаях, когда перпендикуляры, которые приходится восстанавли-

¹⁾ В диаграмме мы нашли лишь точки a', b', c' и r' .

вать, пересекаются под очень острыми углами. Эти обстоятельства заставляют иногда прибегать к другим приемам определения перемещений особенно в тех случаях, когда не требуется разыскание перемещений всех узлов фермы. Далее при рассмотрении статически неопределенных систем мы часто будем встречаться с вопросом об определении прогибов узлов, принадлежащих одному какому либо поясу фермы. В таком случае естественно заняться лишь стержнями, принадлежащими этому поясу. Эти стержни образуют шарнирный многоугольник, построение перемещений узлов которого может быть выполнено весьма просто, если только известны изменения длин всех стержней, образующих многоугольник, и углы поворота этих стержней. Совершенно ясно, что если из предварительного расчета определены усилия во всех брусках и по этим усилиям вычислены соответствующие удлинения, то вопрос об определении изменений углов между стержнями представляет собой совершенно определенную геометрическую задачу. Далее мы подробно остановимся на решении этой основной задачи, теперь же предположим, что все удлинения и изменения углов нам известны, и покажем, как по этим данным может быть построена диаграмма перемещений для узлов шарнирного многоугольника. Рассмотрим сначала такую элементарную задачу. Имеется брусок ab , для которого найдено удлинение M , угол поворота ψ и перемещение узла a . По этим данным нужно найти перемещение узла b (фиг. а). Сначала дадим бруску поступательное перемещение aa' , соответствующее перемещению узла a . От нового положения b' узла b откладываем в надлежащую сторону изменение длины бруска M . Теперь остается повернуть брусок около шарнира a' на известный угол ψ . Так как мы всегда будем иметь дело с малыми углами поворота, то соответствующее перемещение шарнира b можно считать направленным по перпендикуляру к $a'b'$. При чем величина этого перемещения ρ определится такой формулой

$$\rho = l \cdot \psi.$$

Таким образом мы находим новое положение b_1 шарнира b . Малые перемещения, конечно, выгоднее наносить в увеличенном масштабе и определять перемещения на особом чертеже. Для этого от некоторого полюса O (фиг. б) откладываем в выбранном масштабе перемещение Oa' узла a . Далее откладываем по величине и направлению изменение длины стержня ab и из конца

его восстанавливаем перпендикуляр в сторону, соответствующую направлению вращения бруска и на нем откладываем отрезок ρ . Повторяя такое построение последовательно для каждого стержня шарнирного многоугольника, мы получим нужную нам диаграмму перемещений. Положим нужно построить диаграмму перемещений для многоугольника, представленного на чертеже 299 (фиг. а). Изменения длин стержней $\delta l_1, \delta l_2, \dots$ и изменения углов $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ считаются найденными предварительным расчетом. Построения начинаем с неподвижного шарнира a . Предполагаем, что брусок ab не поворачивается, тогда точка b' на фигуре (b) получится, если мы от полюса O , с которым совпадает точка a' , отложим по направлению ab отрезок δ_1 . Для получения c' , откладываем от b' по направлению bc удлинение δ_2 и на перпендикуляре, восстановленном в конце этого отрезка, откладываем $\rho_2 = l_2 \psi_2 = l_2 \delta\theta_1$, ¹⁾. Таким образом получаем точку c' . Для получения d' , откладываем δ_3 , укорочение стержня cd , и далее $\rho_3 = l_3 (\delta\theta_2 + \delta\theta_3)$. Тем же путем получаем и точку e' . Мы видим, что вследствие произвольного допущения относительно сохранения стержнем ab первоначального направления, мы получили перемещение Oe' , не удовлетворяющее закреплению на правой опоре. Чтобы удовлетворить этому условию и получить перемещение, совпадающее по направлению с направлением скольжения подвижной опоры e , дадим всей системе поворот относительно шарнира a . Соответствующее перемещение шарнира e будет перпендикулярно направлению ae . Величину этого перемещения $e''O$ выберем так (фиг. b), чтобы геометрическая сумма $Oe' + e''O$ давала нам вектор $e''e'$ имеющий направление скольжения опоры e . Теперь остается на отрезке $e''O$ построить фигуру $Ob''c''d''e''$ геометрически подобную заданному шарнирному многоугольнику. Тогда отрезок, идущий от какой либо буквы с двумя значками к букве с одним значком даст нам перемещение соответствующего узла многоугольника.

Как частный случай только что рассмотренной задачи, рассмотрим пример, когда удлинения всех стержней равны нулю и перемещения обусловлены лишь изменениями углов между стержнями. Легко показать, что в этом случае построением одного веревочного многоугольника сейчас же получают проекции пе-

¹⁾ В нашем примере приняты $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ отрицательными, чему соответствует уменьшение углов $\theta_1, \theta_2, \dots$ и поворот стержней по часовой стрелке. Соответственно этому повороту отложим отрезки ρ_2, ρ_3, \dots

режений всех узлов многоугольника на заданное направление. Пусть задан многоугольник $abcdefg$ (черт. 300) и требуется найти проекции перемещений всех узлов на направление AB . Предположим, как и прежде, шарнир a неподвижным и стержень ab — неповорачивающимся. Пусть требуется найти перемещение шарнира f , лежащего в расстоянии l от узла b . Вследствие изменения угла θ , на величину $\delta\theta$, точка f переместится в направлении перпендикулярном bf на величину $l\delta\theta$. Если через x_1 обозначим проекцию расстояния l на направление перпендикулярное линии AB , то для проекции найденного перемещения точки f на направление AB получим значение $x_1 \delta\theta$. Точно также найдем, что проекция на AB перемещения точки f , получающегося вследствие изменения угла θ_2 на величину $\delta\theta_2$, будет равна $x_2 \delta\theta_2$ и т. д. Окончательно проекция δ_f искомого перемещения шарнира f представится так

$$\delta_f = \delta\theta_1 x_1 + \delta\theta_2 x_2 + \delta\theta x + \dots$$

Рассматривая $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ как фиктивные силы, приложенные в b, c, \dots и направленные параллельно AB , заключаем, что δ_f представляется моментом фиктивных сил $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ относительно точки f . Направления фиктивных сил будут определяться знаками приращений $\delta\theta$. Если мы для фиктивных сил построим веревочный многоугольник $b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1$ (фиг. б) с полюсным расстоянием единица, то расстояние от какой либо вершины этого многоугольника, до первой стороны, направленной перпендикулярно AB , будет давать, очевидно, проекцию на AB перемещения соответствующего узла. Получив таким образом проекции перемещений $\delta_c, \delta_d, \dots, \delta_g$, мы легко построим и диаграмму перемещений, соответствующую фигуре (б) предыдущего чертежа. При этом нужно иметь в виду, что все удлинения стержней обращаются в нуль и нам придется иметь дело лишь с отрезками ρ , направленными перпендикулярно соответствующим стержням. Начиная с точки O и проводя отрезки $\rho_2 \perp bc, \rho_3 \perp cd$ и т. д., получаем искомую диаграмму перемещений.

Заметим, что таким образом мы можем графическим путем получить все стрелки ρ для любого шарнирного многоугольника. Нужно только сначала предположить, что все удлинения стержней нули, и выполнить только что описанное построение.

Если стержни многоугольника расположены в одну горизонтальную линию, то удлинения стержней не будут влиять на прогибы шарниров. Прогибы эти будут зависеть лишь от поворота стержней, т. е. от величины $\delta\theta$. Построив для соответствующих фиктивных грузов веревочный многоугольник с полюсным расстоянием единица, мы тем самым находим линию прогибов. Для получения величины прогибов нужно только надлежащим образом провести замыкающую линию, от которой производится отсчет прогибов.

Это построение линии прогибов для шарнирно-соединенных стержней, расположенных на одной прямой, вполне соответствует известному построению упругой линии для изгибаемой балки. В последнем случае, как известно, приходится строить веревочный многоугольник для фиктивной нагрузки, причем на каждый элемент балки длиной δx приходится фиктивная нагрузка, равная

$$\frac{M \delta x}{EJ} = y'' \delta x.$$

Величина этой нагрузки есть не что иное, как относительный поворот двух поперечных сечений балки, выделяющих рассматриваемый элемент.

Остановимся здесь еще на одном практически важном вопросе, который легко решается, если нам известны для заданного шарнирного многоугольника все величины δl и $\delta\theta$. В дальнейшем нам придется решать такую задачу: по заданным изменениям длин δl и углов $\delta\theta$, найти изменение δL хорды af шарнирного многоугольника $abcdef$ (черт. 301). Будем считать стержень ab неповорачивающимся, шарнир a неподвижным и рассмотрим отдельно, как влияют на изменение длины хорды приращение углов $\delta\theta$, и как влияют удлинения стержней. Если угол θ_1 увеличится на величину $\delta\theta_1$, то при этом f переместится в направлении перпендикулярном bf на величину $m \delta\theta_1$. Проекция этого перемещения на направление хорды af равна $y_1 \delta\theta_1$, где y_1 есть расстояние рассматриваемого узла b до хорды af . Принимая во внимание изменение всех углов θ , найдем, что приращение хорды δL_1 , обусловленное поворотом стержней шарнирного многоугольника с n сторонами, представится так

$$\delta L_1 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \delta\theta_i \quad \dots \quad (a)$$

Если мы через φ_i будем называть угол наклона стержня i к хорде, то удлинение этого стержня δl_i будет, очевидно, сопровождаться увеличением хорды на $\delta l_i \cos \varphi_i$ ¹⁾. Приращение длины хорды, обусловленное удлинениями всех брусков, представится так

$$\delta L_2 = \sum_1^n \delta l_i \cos \varphi_i (b)$$

следовательно, для полного изменения длины хорды мы получаем

$$\delta L = \sum_1^{n-1} y_i \delta \theta_i + \sum_1^n \delta l_i \cos \varphi_i (c)$$

Первая сумма этой ф-лы легко может быть построена при помощи веревочного многоугольника, если принять во внимание, что она представляет собой сумму моментов фиктивных грузов $\delta \theta$, параллельных хорде af и приложенных в узлах шарнирного многоугольника относительно какой либо точки хорды.

§ 44. Вычисление изменений углов треугольника, по удлинениям его сторон.

Все предыдущие построения перемещений узлов шарнирного многоугольника предполагают, что нами заранее вычислены изменения углов между последовательными сторонами многоугольника. В тех случаях, когда ферма представляет простую треугольную решетку (черт. 302), изменение какого-либо угла θ сводится в вычислению изменений углов α_1 , α_2 и α_3 , треугольников, составляющих ферму. Все сводится таким образом к решению такой геометрической задачи: найти изменения углов треугольника, если на основании предварительного расчета уже определены удлинения его сторон. Мы воспользуемся тем, что здесь придется иметь дело с весьма малыми изменениями углов и длин, и применим построение Виллио. Пусть для треугольника ABC (черт. 303) известны удлинения всех сторон. Будем считать стержень AB не поворачивающимся и шарнир A неподвижным. Тогда при деформации точка B переместится в B^1 . Для получения точки C^1 придется выполнить построение, указанное в увеличенном масштабе на фигуре (b). Из фигуры (a) сейчас же находим ²⁾

$$\delta \alpha_1 = \frac{p_2}{l_2}; \quad \delta \alpha_2 = \frac{p_1}{l_1} (a)$$

1) На чертеже 301 все φ_i меньше 90° и потому $\cos \varphi_i$ положительны.

2) Малыми изменениями для стержней при этом пренебрегаем.

Измеряя, следовательно, на фигуре (b) отрезки ρ_1 и ρ_2 , мы получаем возможность при помощи ф-л (a) вычислить нужные нам изменения углов $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$. Приращение третьего угла найдется из условия

$$\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \delta\alpha_3 = 0 \quad (b)$$

Заметим здесь, что горизонтальные проекции отрезков ρ_2 и ρ_1 найдутся так

$$\begin{aligned} \rho_2 \sin \alpha_1 &= l_2 \sin \alpha_1 \delta\alpha_1 = h \delta\alpha_1 \\ \rho_1 \sin \alpha_2 &= l_1 \sin \alpha_2 \delta\alpha_2 = h \delta\alpha_2 \end{aligned}$$

где h — высота треугольника ABC .

Следовательно, если мы построим фигуру, подобную фигуре (b), но только вместо δl_1 , δl_2 и δl_3 отложим величины $\frac{\delta l_1}{h}$, $\frac{\delta l_2}{h}$, $\frac{\delta l_3}{h}$, (черт. 304), то горизонтальные проекции отрезков $C_2 C'$ и $C_1 C'$ непосредственно дадут нам величины $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$, в том масштабе, который мы выберем при построении для отвлеченных чисел $\frac{\delta l_1}{h}$. . . Пользуясь чертежом (304), мы легко составим и аналитические ф-лы для приращений углов $\delta\alpha_1$. . . В самом деле, проектируя точки C_1 , C_2 и C_3 на вертикальное направление, мы находим

$$\overline{O1} = \frac{\delta l_1}{h} \cdot \sin \alpha_2 = \frac{\delta l_1}{l_1}; \quad \overline{O2} = \frac{\delta l_2}{h} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{\delta l_2}{l_2}; \quad \overline{O3} = \frac{\delta l_3}{l_3} \quad (c)$$

Следовательно,

$$C_2 C_3 = \frac{\overline{23}}{\sin \alpha_1} = \left(\frac{\delta l_2}{l_2} - \frac{\delta l_3}{l_3} \right) \frac{1}{\sin \alpha_1};$$

$$C_1 C_3 = \frac{\overline{31}}{\sin \alpha_2} = \left(\frac{\delta l_1}{l_1} - \frac{\delta l_3}{l_3} \right) \frac{1}{\sin \alpha_2} \quad . . .$$

Принимая же во внимание, что сумма горизонтальных проекций отрезков $C_2 C_3$ и $C_3 C_1$ равна, как видно из чертежа, — $\delta\alpha_3$, получаем

$$\begin{aligned} \delta\alpha_3 &= - (C_2 C_3 \cos \alpha_1 + C_3 C_1 \cos \alpha_2) = \\ &= \left(\frac{\delta l_3}{l_3} - \frac{\delta l_2}{l_2} \right) \cotg \alpha_1 + \left(\frac{\delta l_3}{l_3} - \frac{\delta l_1}{l_1} \right) \cotg \alpha_2 \quad . . . \quad (d) \end{aligned}$$

Перестановкой значков подобные ф-лы получаются также для $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$.

В тех случаях когда удлинение является следствием только напряжений, мы, обозначая эти напряжения через p_1 , p_2 и p_3 ,

можем написать формулы для вычисления приращений углов в таком виде

$$\left. \begin{aligned} E \delta \alpha_3 &= (p_3 - p_2) \operatorname{ctg} \alpha_1 + (p_3 - p_1) \operatorname{ctg} \alpha_2 \\ E \delta \alpha_2 &= (p_2 - p_1) \operatorname{ctg} \alpha_3 + (p_2 - p_3) \operatorname{ctg} \alpha_1 \\ E \delta \alpha_1 &= (p_1 - p_3) \operatorname{ctg} \alpha_2 + (p_1 - p_2) \operatorname{ctg} \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Положим, например, что стороны треугольника, представляющая собой железные бруски, испытывают напряжения

$$p_1 = -141 \frac{kl}{\text{см}^2}; \quad p_2 = +463 \frac{kl}{\text{см}^2}; \quad p_3 = -17 \frac{kl}{\text{см}^2};$$

Котангенсы углов, выписанные на чертеже (305), равны

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = 0,496; \quad \operatorname{ctg} \alpha_2 = 1,079 \quad \operatorname{ctg} \alpha_3 = 0,295$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_1 (p_2 - p_3) &= 0,496 (463 + 17) = 238 \\ \operatorname{ctg} \alpha_2 (p_3 - p_1) &= 1,079 (-17 + 141) = 134 \\ \operatorname{ctg} \alpha_3 (p_1 - p_2) &= 0,295 (-141 - 463) = -178 \end{aligned}$$

и мы на основании ф-л (e) получаем

$$E \delta \alpha_1 = -134 - 178 = -312 \frac{kl}{\text{см}^2};$$

$$E \delta \alpha_2 = 178 + 238 = +416 \frac{kl}{\text{см}^2};$$

$$E \delta \alpha_3 = -238 + 134 = -104 \frac{kl}{\text{см}^2}$$

Имея возможность вычислять изменения углов треугольника, мы без затруднений сможем построить *линию прогиба* для фермы, составленной из треугольников. В качестве примера рассмотрим ферму, представленную на чертеже (306). На фигуре (a) написаны полученные на основании предварительного расчета напряжения в $\frac{klg}{\text{см}^2}$. На фигуре (b) выписаны соответствующие изменения углов $E \delta \alpha$, имеющих вершины в узлах нижнего пояса фермы.

Пользуясь этими данными, мы без затруднений можем построить диаграмму перемещений (фиг. c) для узлов нижнего пояса. рассматриваемого, как шарнирный многоугольник. Сначала, задаваясь величиной модуля (E положено равным $1,8 \cdot 10^6 \frac{kl}{\text{см}^2}$) вычисляем, по известным уже напряжениям, величины удлинений стержней нижнего пояса. Далее на основании значений $E \delta \alpha$ составляем величины $E \delta$, пропорцио-

нальные углы поворота стержней нижнего пояса. Мы предполагаем стержень 5 не поворачивающимся и шарнир f неподвижным. Тогда $E\psi_5 = 0$. Для стержня 4 получаем

$$E\psi_4 = E\delta_4 = 212 + 363 + 294 = 869 \frac{kl}{cm^2}$$

Точно также для стержня 3

$$E\psi_3 = E\psi_4 + \delta_3 = 869 + (301 + 439 + 426) = 2035 \frac{kl}{cm^2}$$

Далее тем же путем получаем

$$E\psi_2 = 3435 \frac{kl}{cm^2}; \quad E\psi_1 = 6531 \frac{kl}{cm^2};$$

$$E\psi_6 = 850 \frac{kl}{cm^2}; \quad E\psi_7 = 1754 \frac{kl}{cm^2};$$

$$E\psi_8 = 2433 \frac{kl}{cm^2}; \quad E\psi_9 = 3421 \frac{kl}{cm^2};$$

$$E\psi_{10} = 4943 \frac{kl}{cm^2}; \quad E\psi_{11} = 8389 \frac{kl}{cm^2}$$

Деля эти величины на E и умножая на длины соответствующих стержней, получаем отрезки ρ , нужные для построения диаграммы перемещений. Направления этих отрезков в рассматриваемом случае определяются тем, что все стержни, лежащие левее бруса 5 вращаются по часовой стрелке. Стержни, лежащие справа от того же бруса, вращаются против часовой стрелки. Построение диаграммы перемещений начнем с неподвижного узла f . Соответствующая точка f' будет совпадать с полюсом. Откладывая удлинение δ_5 стержня 5, получаем точку e' . Далее по известному правилу строим точки d' , c' , b' и a' . Переходя теперь к брусам, лежащим справа от стержня 5, строим тем же способом точки g' , h' , k' , l' , m' и n' . Чтобы удовлетворить условиям на опорах, нужно всей ферме дать поступательное перемещение $a' f'$, соответствующее неподвижности левой опоры и далее повернуть всю ферму около левого опорного шарнира a . Перемещения, соответствующие этому повороту, мы получим обычным приемом, построенным на вертикальном отрезке $a' n''$ фигуры геометрически подобной заданной ферме. Перенося теперь вертикальные составляющие найденных перемещений на вертикали, проходящие через узлы нижнего пояса, мы получим *многоугольник прогиба* $a_1 b_1 c_1 \dots n_1$. Из чертежа (фиг. с) видно, что в данном случае удлинения брусков, откладываемые при построении диаграммы, лишь в слабой степени влияют на прогиб. Величина прогиба определяется главным образом отрезками ρ . Если бы мы строили *линию прогиба* для верхнего пояса, то здесь все удлинения брусков придется, при построении диаграммы, откладывать по горизонтальному направлению и потому прогибы вполне определяются отрезками ρ .

Линию прогибов мы сможем при этом построить как веревочный многоугольник для фиктивных грузов δb .

§ 45. Линия прогибов. рассматриваемая, как веревочный многоугольник.

Мы видели уже (§ 43), что в случае прямого горизонтального пояса можно построить *линию прогиба*, как веревочный многоугольник. Подобное построение легко распространить и на более общий случай шарнирного многоугольника. Предварительно установим связь между ординатами η_1, η_2, \dots вершин веревочного многоугольника, построенного для системы параллельных сил P_1, P_2, \dots (черт. 307) и величинами этих сил. Ординаты η_1, η_2, \dots отсчитываемые от некоторой прямой ab , мы всегда можем рассматривать как величины, пропорциональные изгибающим моментам для соответствующей балки, нагруженной силами P_1, P_2, \dots . В таком случае величина

$$H(\eta_2 - \eta_1)$$

представит собой разность изгибающих моментов под грузами P_1 и P_2 . Если мы обозначим через λ_2 расстояние между грузами и через Q_1 — поперечную силу на протяжении λ_2 , то, очевидно,

$$H(\eta_2 - \eta_1) = Q_1 \lambda_2 \dots \dots \dots (a).$$

Точно также для ординат η_2 и η_3 найдем

$$H(\eta_3 - \eta_2) = Q_1 \lambda_3 \dots \dots \dots (b).$$

Припимая во внимание, что

$$Q_1 - Q_2 = P_2$$

мы получаем из (a) и (b) нужную нам формулу

$$P_2 = H \left\{ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} \right\} \dots \dots \dots (c),$$

которой можно будет воспользоваться при построении *линии прогиба*. Пусть a, b, c, \dots — шарнирный многоугольник и a_1, b_1, c_1, \dots соответствующая ему линия прогибов отсчитываемых от mn вниз (черт. 308). Пользуясь формулой (c) выясним, каковы должны быть фиктивные грузы P_1, P_2, \dots , для которых веревочный многоугольник совпадает с линией прогиба. Возьмем стержень bc . Прогибы, соответствующие концам стержня, обозначим через y_1 и y_2 . Разность ординат $y_2 - y_1$ зависит, как от изменения длины стержня, так и от его поворота. Обозначим

эти величины через δl_1 и через $\delta\beta_1$. Удлинению стержня на величину δl_1 при неизменности направления стержня соответствует уменьшение прогиба точки c по сравнению с прогибом точки b на величину $\delta l_1 \sin\beta_1$. Вследствие возрастания угла β_1 на величину $\delta\beta_1$, прогиб точки c , по сравнению с прогибом точки b , уменьшится на величину $l_1 \delta\beta_1 \cos\beta_1 = \lambda_1 \delta\beta_1$. Так как и в том и в другом случае мы имеем уменьшение прогиба точки c по отношению к прогибу точки b , то, следовательно,

$$y_2 - y_1 = -\delta l_1 \sin\beta_1 - \lambda_1 \delta\beta_1,$$

Откуда

$$\frac{y_2 - y_1}{\lambda_1} = -\frac{\delta l_1}{l_1} \operatorname{tg}\beta_1 - \delta\beta_1 \dots \dots \dots (d)$$

Считая угол β положительным, когда положительному изменению x , соответствует положительное приращение ординаты y шарнирного многоугольника и рассматривая брусок cd , мы прежним путем найдем

$$\frac{y_3 - y_2}{\lambda_2} = -\frac{\delta l_2}{l_2} \operatorname{tg}\beta_2 - \delta\beta_2 \dots \dots \dots (e)$$

Обращаясь теперь к формуле (с) и полагая в ней полюсное расстояние равным единице, мы при помощи (d) и (e) получим для фиктивного груза P_2 такое выражение

$$P_2 = -\frac{\delta l_2}{l_2} \operatorname{tg}\beta_2 - \delta\beta_2 + \frac{\delta l_1}{l_1} \operatorname{tg}\beta_1 + \delta\beta_1.$$

Принимая во внимание, что

$$\delta\beta_1 - \delta\beta_2 = \delta\theta_1 \quad 1),$$

мы получим для фиктивного груза P_2 окончательно такое выражение

$$P_2 = \delta\theta_1 - \frac{\delta l_2}{l_2} \operatorname{tg}\beta_2 + \frac{\delta l_1}{l_1} \operatorname{tg}\beta_1 \dots \dots \dots (f)$$

Тот же самый веревочный многоугольник мы получим, если все грузы P и полюсное расстояние умножим на модуль упругости E . Тогда, вводя обозначения для напряжений, получим для фиктивного груза P_m , приложенного в m -ом узле шарнирного многоугольника, такое выражение

$$P_m \sum \delta\theta_m - p_m \operatorname{tg}\beta_m + p_{m+1} \operatorname{tg}\beta_{m+1} \dots \dots \dots (g)$$

Если для вычисленных таким образом фиктивных грузов, имеющих измерение klg/cm^2 , построить веревочный многоугольник при пол-

1) Величины $\delta\beta_1$ и $\delta\beta_2$ положительны, если им соответствуют вращения стержней против часовой стрелки. Положительному $\delta\theta_1$ соответствует увеличение угла θ_1 .

ном расстоянии равно E , то он представит собой искомую *линию прогибов*. Прогибы нужно отсчитывать по вертикальному направлению от замыкающей линии, которая должна быть проведена так, чтобы были удовлетворены условия на опорах. Масштаб для прогибов при этом будет тот же, который принят при построении шарнирного многоугольника. Так как обычно приходится иметь дело с весьма малыми прогибами, то для ясности чертежа желательнее их получать в преувеличенном масштабе. Мы достигнем этой цели, если вместо полюсного расстояния E возьмем величину $\frac{E}{m}$. При этом все ординаты веревочного многоугольника увеличатся в m раз. Мы можем подобрать m таким образом, чтобы получить прогибы в натуральную величину.

Применим этот способ к построению прогибов для узлов нижнего пояса фермы, представленной на чертеже (306). Для этого предварительно вычислим величины $p_m \operatorname{tg} \beta_m$, входящие в правую часть формулы (g). Пользуясь величинами углов наклона стержней нижнего пояса и величинами напряжений, выписанными на фигуре (а) находим, идя от левой руки к правой,

$$p \operatorname{tg} \beta = -253, -210, -151, -98, -47, 0, +47, +98, +151, +219, +264 \text{ кл./см.}^2.$$

Точно также при помощи величин $E \delta a$, выписанных на фигуре b, находим для всех узлов нижнего пояса значения $E \delta b$. Идя от левой опоры к правой, получим такие величины

$$E \delta b = 3096, 1400, 1166, 869, 850, 904, 679, 988, 1522, 3446.$$

Теперь, на основании формулы (g), получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= 3096 + 253 - 210 = 3139 \text{ кл./см.}^2. \\ P_2 &= 1400 + 210 - 151 = 1459 \text{ " } \\ P_3 &= 1166 + 151 - 98 = 1219 \text{ " } \\ P_4 &= 869 + 98 - 47 = 920 \text{ " } \\ P_5 &= 850 + 47 + 0 = 897 \text{ " } \\ P_6 &= 904 - 0 + 47 = 951 \text{ " } \\ P_7 &= 679 - 47 + 98 = 730 \text{ " } \\ P_8 &= 988 - 98 + 151 = 1041 \text{ " } \\ P_9 &= 1522 - 151 + 219 = 1590 \text{ " } \\ P_{10} &= 3446 - 219 + 264 = 3491 \text{ " } \end{aligned}$$

Приложив эти грузы к нижним узлам фермы и построив для них веревочный многоугольник, получим искомую линию прогиба.

Замыкающая должна быть проведена так, чтобы прогибы на опорах получились равными нулю. Если чертёж фермы составлен в масштабе $1:n$ и полюсное расстояние при построении веревочного многоугольника принято равным $E:m$, то для получения действительных прогибов нужно отрезки, получаемые из чертежа, умножать на n и делить на m .

Намеченный здесь способ построения линии прогибов становится неприменимым в тех случаях, когда шарнирный многоугольник заключает в себе вертикально направленные стержни. $tg\beta$ для таких стержней обращается в бесконечность, а вместе с тем в бесконечность обращаются также и соответствующие фиктивные грузы, определяемые по формуле (g).

Если изменения длин стержней обусловлены не только напряжениями, но также и изменениями температуры, то к напряжениям p , входящим в формулу (g), нужно прибавлять величины $E\alpha t$, где α — коэффициент линейного расширения и t повышение температуры.

Получение прогибов путем построения веревочного многоугольника является более простым и наглядным способом, чем нахождение тех же величин при помощи диаграммы Виллио, но это построение требует некоторой предварительной работы по вычислению изменений углов треугольников, составляющих решетку фермы.

В тех случаях, где вычисленные изменения углов могут быть использованы для других расчетов ¹⁾, намеченный здесь прием построения линии прогибов является особенно выгодным.

§ 46. Иной прием вычисления фиктивных грузов.

В тех случаях, когда изменения углов в ферме не вычисляются для других каких-либо целей или когда требуется дать лишь приближенные величины для прогибов, выгодно получить для фиктивных грузов P выражения, заключающие лишь изменения длин стержней и не содержащая угловых изменений $\delta\theta$. Покажем, как эти выражения могут быть получены в простейшем случае, когда ферма не заключает брусьев вертикального направления. Положим, требуется найти путем построения веревочного многоугольника прогибы верхних и нижних узлов системы, предста-

¹⁾ Далее мы увидим, что по изменениям углов можно вычислить те дополнительные напряжения, которые возникают в фермах вследствие того, что стержни соединены в узлах не идеальными шарнирами а скреплены жестко при помощи заклепочных соединений.

введенной на чертеже 309. Пользуясь указанными на фигуре (а) обозначениями для стержней и углов наклона их к горизонту, составим выражения для фиктивного груза в каком-либо узле m нижнего пояса. Пусть фигура (b) представляет соответствующую линию прогиба, построенную как веревочный многоугольник при полюсном расстоянии, равном единице. Если y_{m-1} , y_m и y_{m+1} — прогибы для узлов $m-1$, m и $m+1$, то на основании формулы (2) предыдущего параграфа получаем для фиктивного груза I'_m выражение

$$I'_m = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_{m+1}} \dots \dots \dots (3).$$

В это выражение входят разности прогибов двух последовательных узлов и длины λ . Постараемся выразить эти величины в зависимости от удлинений брусков. Для решения этой чисто геометрической задачи воспользуемся приемом, который применял Максвелл, при вычислении перемещений (§ 35). Вычертим отдельно треугольник $m-1$, m , $m+1$ (фиг. с) и приложим к нему в верхних узлах вертикальные силы, равные

$$\frac{1}{\lambda_m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_{m+1}}.$$

В нижнем узле m приложена направленная вертикально вниз уравнивающая сила. Путем непосредственного разложения (фиг. d) сейчас же найдем усилия S_1 , S_2 , S_3 , возникающие в стержнях треугольника под действием приложенных нагрузок. Пользуясь подобием треугольников, входящих в фигуры (с) и (d), получаем

$$S_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \frac{\lambda_m}{\cos^2 \beta_m} : h_m,$$

откуда

$$S_1 = \frac{1}{h_m \cos^2 \beta_m}.$$

Точно также находим

$$S_2 = \frac{1}{h_m \cos^2 \beta_m} \quad S_3 = \frac{1}{h_m \cos^2 \beta_{m+1}}$$

Усилия S_1 , S_2 , S_3 и вызывающие их нагрузки представляют систему взаимно уравнивающихся сил. Работа этих сил на всяком возможном перемещении должна равняться нулю. В качестве возможных перемещений возьмем те действительные перемещения, которые соответствуют рассматриваемому треуголь-

нику в стержневой системе, представленной на фигуре (а). В таком случае работа внешних, приложенных к треугольнику сил, представится так

$$\frac{1}{\lambda_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{\lambda_{m+1}} (y_{m+1} - y_m) \dots \dots \dots (b).$$

Обозначая через $\delta 0_m$, δd_m и δd_{m+1} действительные удлинения сторон рассматриваемого треугольника, найдем для работы усилий S_1 , S_2 и S_3 на этих перемещениях выражение

$$- S_1 \delta 0_m - S_2 \delta d_m - S_3 \delta d_{m+1} \dots \dots \dots (c)$$

Итак, начало возможных перемещений в применении к силам, представленным на фигуре (с) и к действительным перемещениям, дает нам

$$\frac{-1}{\lambda_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{\lambda_{m+1}} (y_{m+1} - y_m) = S_1 \delta 0_m + S_2 \delta d_m + S_3 \delta d_{m+1}.$$

Принимая во внимание, что левая часть равенства представляет собой выражение для фиктивного груза P_m [формула (а)], и вставляя вместо S_1 , S_2 , S_3 найденные выше значения, получаем

$$P_m = \frac{-\frac{\delta 0_m}{\text{Cos} \varphi_m} + \frac{\delta d_m}{\text{Cos} \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\text{Cos} \varphi_{m+1}}}{\lambda_m} \dots \dots \dots (d).$$

Путем таких же рассуждений получаем для фиктивного груза P_k , приложенного в каком-либо узле k верхнего пояса (фиг. а), выражение

$$P_k = \frac{+\frac{\delta U_k}{\text{Cos} \varphi_k} - \frac{\delta d_k}{\text{Cos} \varphi_k} - \frac{\delta d_{k+1}}{\text{Cos} \varphi_{k+1}}}{\lambda_k} \dots \dots \dots (e).$$

Относительно косинусов, входящих в формулы (d) и (e), заметим, что для случая, представленного на чертеже (309), все они имеют положительное значение. Если бы мы имели расположение, указанное на чертеже (310), то, например, для $\text{Cos} \varphi_2$ и $\text{Cos} \varphi_1$, мы получили бы отрицательные величины. При построении веревочного многоугольника для фиктивных грузов нужно держаться порядка узлов в вести построение, как то показано на фигуре (b) [черт. 310].

Рассмотрим теперь систему со стойками. Предположим, раскосы имеют нисходящее направление (черт. 311) и требуется, путем построения веревочного многоугольника, найти прогибы узлов нижнего пояса. Выясним, как в этом случае фиктивный груз

$$P_m = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{y'_{m+1} - y_m}{\lambda_{m+1}}$$

приложенный в узле m , может быть выражен при помощи удлинений брусков системы. Эту геометрическую задачу, как и раньше, решаем, пользуясь началом возможных перемещений. Выделим часть системы, соответствующую трем последовательным нижним узлам (фиг. в) и приложим к ней в узлах $m-1$ и $m+1$ направленные вертикально вверх фиктивные силы

$$\frac{1}{\lambda_m} \text{ и } \frac{1}{\lambda_{m+1}}.$$

В узле m приложена действующая вертикально вниз уравновешивающая сила. Соответствующие этим силам усилия в стержнях S_1, S_2, \dots сейчас же могут быть найдены путем непосредственного разложения (фиг. с).

Из чертежа легко получаем для этих усилий выражения

$$S_1 = -\frac{1}{h_m \cos \beta_m}; \quad S_2 = \frac{1}{h_m \cos \gamma_{m+1}}; \quad S_3 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m};$$

$$S_4 = -\frac{h'_{m+1}}{h_m \cos \varphi_{m+1}}; \quad S_5 = \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1} \cdot h_m}; \quad S_6 = -\frac{1}{\lambda_m}.$$

Здесь через h'_{m+1} обозначен вертикальный отрезок между узлом $m+1$ и продолжением стержня O_m верхнего пояса (фиг. в). Применяя теперь к силам фигуры (б) и к действительным перемещениям начало возможных перемещений, получаем

$$\frac{y_m - y_{m+1}}{\lambda_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_{m+1}} = S_1 \delta o_m + S_2 \delta U_{m+1} + S_3 \delta d_m + S_4 \delta d_{m+1} + S_5 \delta h_m + S_6 \delta h_{m-1}.$$

Вставляя вместо S_1, S_2, \dots найденные выше значения, получим

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta o_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_m \cdot h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{\delta h_{m-1} \cdot h_m}{\lambda_m} \right\} \dots \dots \dots (f)$$

Подобным же образом могут быть составлены формулы для фиктивных грузов при ином расположении раскосов, а также в тех случаях, когда требуется найти прогибы узлов верхнего пояса.

Так, например, при исследовании прогиба нижнего пояса, для расположения раскосов, указанного на фигурах (а), (б) и (с) [черт. 312], выражения фиктивного груза P_m напишутся так:

$$\text{фиг. а) } P_m = \frac{1}{h_m} \left(-\frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} - \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta a_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} + \frac{\delta h_m \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} \right) \dots \dots \dots (g)$$

$$\text{фиг. б) } P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_m} + \delta h_m (tg \beta_m - tg \beta_{m+1}) - \delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \right\} \dots \dots \dots (h)$$

$$\text{фиг. с) } P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \delta h_m (tg \varphi_m + tg \varphi_{m+1}) \right\} \dots \dots \dots (k)$$

При определении прогибов узлов верхнего пояса фиктивный груз P_m для случаев, представленных на чертеже 313, найдется из таких формул .

$$\text{фиг. а) } P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_m \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} \right\} \dots \dots \dots (l)$$

$$\text{фиг. б) } P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} - \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_m} - \frac{\delta h_m \cdot h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \right\} \dots \dots \dots (m)$$

$$\text{фиг. с) } P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \delta h_m (tg \varphi_m + tg \varphi_{m+1}) \right\} \dots \dots \dots (n)$$

$$\text{фиг. д) } P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_{m-1} \cdot h_m}{\lambda_m} - \delta h_m (tg \gamma_m - tg \gamma_{m+1}) + \delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \right\} \dots \dots \dots (p)$$

Иногда требуется для предварительных расчетов лишь приближенное значение для прогибов. В таких случаях пренебрегают обыкновенно деформацией решетки. Формулы (d), (e) и (p) для фиктивных грузов при этом значительно упрощаются; в них остаются лишь члены, заключающие удлинения элементов поясов.

З а д а ч и.

155) *Определить прогибы узлов нижнего пояса мостовой фермы, представленной на чертеже (314).* В силу симметрии мы можем ограничиться лишь одной половиной фермы. Усилия в тоннах и площади поперечных сечений в $см^2$ (числа в скобках) показаны на левой половине фермы (фиг. а). Применим сначала способ, изложенный в § 45. Так как стержни нижнего пояса расположены горизонтально, то фиктивные грузы найдутся из ф-лы [см. ф-ла (g) § 45].

$$P_m = E\delta\sigma_m$$

Для вычисления $E\delta\theta$ воспользуемся ф-ами (e) § 44. Так как в нашем случае все треугольники равнобедренные с прямым углом при вершине, то в ф-лах (e) придется положить

$$ctg\alpha_1 = ctg\alpha_2 = 1; \quad ctg\alpha_3 = 0$$

Полученные на основании этих ф-л значения $E\delta\alpha$ выписаны на правой половине фермы. Пользуясь этими величинами, находим

$$E\delta\theta_1 = E\delta\theta_4 = 2835 \text{ кл/см}^2$$

$$E\delta\theta_2 = E\delta\theta_3 = 3741 \text{ кл/см}^2$$

Если мы в балке ab (фиг. б) приложим соответствующие фиктивные грузы и построим для них веревочный многоугольник с полюсным расстоянием равным $E = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кл/см}^2$ и проведем надлежащим образом замыкающую, то получим прогибы в том же масштабе, в каком начерчена ферма. Вместо графического определения прогибов, мы можем вычислить их аналитическим путем. Для этого нужно только составить в требуемом сечении изгибающий момент от фиктивной нагрузки, приложенной к балке ab , и этот момент разделить на полюсное расстояние E . Например, в узле 2 прогиб y_2 найдется так

$$y_2 = \frac{1}{1,8 \cdot 10^6} (6576 \cdot 800 - 1417 \cdot 400) = 2,29 \text{ см.}$$

Для узла 1 найдем

$$y_1 = \frac{1}{1,8 \cdot 10^6} (6576 \cdot 400) = 1,46 \text{ см.}$$

¹⁾ При исследовании прогибов ферм обыкновенно задаются величиной E меньшей, чем то получается для мостового железа из опытов на растяжение. Таким образом, учитывается увеличение прогибов, которое получается от того, что заклепки несколько сдвигут.

Та же задача может быть решена и иным путем, при помощи фиктивных грузов, выраженных через удлинения брусков (§ 46).

Для этого предварительно вычисляем удлинения всех брусков.

Удлинения эти в сантиметрах, умноженные на 180 и деленные на косинусы углов наклона стержней к горизонту, выписаны на левой половине фигуры (с). Пользуясь ими, мы при помощи ф-л (d) и (e) (§ 46) вычисляем соответствующие фиктивные грузы для узлов 1... 5.

$$P_1 = \frac{1}{200} (+24,0 + 22,7 - 27,2) = 0,0975;$$

$$P_2 = \frac{1}{200} (+27,4 + 27,2 - 18,0) = 0,1830,$$

$$P_3 = \frac{1}{200} (+25,3 + 18,0 - 22,7) = 0,1030.$$

$$P_4 = \frac{1}{200} (+28,8 + 22,7) = 0,2575;$$

$$P_5 = \frac{1}{200} \cdot 26,2 = 0,1310;$$

Эти фиктивные грузы имеют измерение отвлеченного числа и мы на многоугольнике сил их отложим в масштабе $1 = 50 \text{ мм}$. Полюсное расстояние подберем так, чтобы получить прогибы в натуральную величину. Если бы мы приняли $H = 1$, то получали бы прогибы меньше действительных в отношении $180 : 250$, т. е. мы преувеличили фиктивные грузы в 180 раз и нацртали ферму в масштабе $1 : 250$. Чтобы получить прогибы в натуральную величину нужно H уменьшить в отношении $180 : 250$ т. е. положить его равным $\frac{50 \cdot 180}{250} = 36 \text{ мм}$, что и взято на чертеже. Построив теперь веревочный многоугольник и проведя замыкающую так, чтобы на опорах прогибы получились равными нулю, мы найдем прогибы всех промежуточных шарниров фермы. Конечно, мы вместо построения веревочного многоугольника могли бы определить прогибы аналитическим путем, составляя изгибающий момент от фиктивной нагрузки и деля его на полюсное расстояние. Для середины пролета прогиб получится таким

$$f = \frac{1}{180} (0,7065 \cdot 1000 - 0,0975 \cdot 800 - 0,1830 \cdot 600 - 0,1030 \cdot 400 - 0,2575 \cdot 200) = 2,37 \text{ см.}$$

Если бы мы пренебрегли деформациями раскосов и приняли в расчет лишь удлинения стержней поясов, то имели бы для фиктивных грузов значения

$$P_1 = 0,1200; P_2 = 0,1370; P_3 = 0,1265;$$

$$P_4 = 0,1440; P_5 = 0,1310.$$

Соответственно этому получаем для середины пролета прогиб

$$f = \frac{1}{180} (0,5930 \cdot 1000 - 0,1200 \cdot 800 - 0,1370 \cdot 600 - 0,1265 \cdot 400 - 0,1440 \cdot 200) = 1,86 \text{ см.}$$

Пренебрежение деформацией раскосов приводит нас к ошибке в прогибе на 21,5%.

156) *Найти прогибы узлов нижнего пояса системы с параллельными поясами (черт. 315).* Для простоты предположим, что сечения подобраны так, что напряжения во всех стержнях при рассматриваемой симметричной нагрузке одинаковы и равны $\pm 900 \text{ кг/см}^2$.

Тогда при указанных на чертеже размерах удлинения и укорочения стержней поясов и стоек будут равны 1 мм.

Удлинение раскосов, деленное на косинус угла наклона к горизонту, будет равно 2 мм. Крайние панели нижнего пояса при вертикальных нагрузках не испытывают удлинений. Фиктивные грузы для узлов левой половины фермы найдутся при помощи ф-лы (f).

Для правой половины пользуемся ф-ой (g). Наконец, для среднего узла имеем ф-лу (h).

Применяя эту ф-лу к нашей ферме, найдем

$$P_s = \frac{1}{200} \{ +0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,1 \} = 0,004.$$

Пользуясь теперь ф-ами (f) и (g), находим для всех остальных узлов нижнего пояса,

$$P_m = \frac{1}{200} (+0,1 + 0,1 + 0,2 - 0,2 - 0,1 + 0,1) = 0,001.$$

Следовательно, прогиб среднего узла нижнего пояса фермы будет равен

$$f = 0,006 \cdot 1000 - 0,004 \cdot 500 = 4 \text{ см.}$$

К тому же результату мы пришли бы, если бы воспользовались приемом, изложенным в параграфе 45. Применяя ф-лы (e) (§ 44), мы находим для среднего узла нижнего пояса

$$E\delta_s = 7200 \text{ кг/см}^2.$$

Для прочих узлов получим

$$E\delta_m = 1800 \text{ кг/см}^2.$$

Составляя изгибающий момент по середине пролета фермы и деля его на полюсное расстояние E , найдем

$$f = \left(\frac{10800 \cdot 1000 - 7200 \cdot 500}{1,8 \cdot 10^6} \right) = 4 \text{ см.}$$

157) *Построить линию прогибов для узлов нижнего пояса консольной фермы (черт. 316).* Мы можем вычислить фиктивные грузы в узлах нижнего пояса при помощи ф-л (f), (f') и (g). Исключения составляют лишь узлы A и B, так как здесь оба соседние раскоса идут к вершине стойки. Соответствующий фиктивный груз может быть получен без всяких затруднений по ф-ле (h). Заметим, что этим способом выгодно пользоваться лишь в том случае, если в дальнейшем не поведется вычислять изменения углов. Если же угловые изменения должны

быть вычислены для других целей, например, для определения дополнительных напряжений, то тогда выгоднее, при определении прогибов, воспользоваться ф-ой (g) (§ 45). Найдя все фиктивные грузы и построив для них соответствующий веревочный многоугольник, мы должны будем для определения прогибов, провести надлежащим образом замыкающую. Если опоры не оседают, то замыкающая должна проходить так (фиг. б) чтобы прогибы на опорах равнялись нулю.

Когда прогибы узлов нижнего пояса найдены, то в фермах с стойками сейчас же могут быть найдены и прогибы соответствующих верхних узлов. К прогибам нижних узлов нужно будет прибавить сжатия соответствующих стоек. Если бы мы желали непосредственно определить прогибы верхних узлов, то нужно было бы или воспользоваться приемом параграфа 45, или же воспользоваться ф-ами (e), (m), (n), (p).

158) Построить линию прогибов для систем, представленных на чертеже 317. Фиктивные грузы для фермы, представленной на фигуре (а), вычисляем по ф-ле (f), и строим для них веревочный многоугольник. Чтобы провести замыкающую, вычислим на основании удлинений сторон треугольника ABC прогиб узла 1. Замыкающая должна быть проведена так, чтобы в точке A прогиб равнялся нулю, а в точке C — найденной предварительным расчетом величине y_1 . При определении прогибов для системы, представленной на фигуре (б), нужно построить веревочный многоугольник для фиктивных грузов P_1, \dots, P_7 . При вычислениях этих грузов по ф-ам (d) и (e) [§ 46], длину AB считаем неизменной. Прогибы придется отсчитывать от первой стороны веревочного многоугольника.

§ 47. Определение изменения длины хорды шарнирного многоугольника.

В некоторых частных случаях, например, при расчете трехшарнирных арок, вопрос о построении линии прогибов может быть разрешен лишь после предварительного решения задачи об изменении длины хорды шарнирного многоугольника. При построении диаграммы перемещений для шарнирного многоугольника (§ 43) мы дали такую общую формулу [ф-ла (c)] для выражения длины хорды:

$$\delta L = \sum_1^{n-1} y_i \delta \theta_i + \sum_1^n \cos \varphi_i \cdot \delta l_i \dots \dots \dots (a)$$

Здесь через φ_i обозначены углы наклона стержней многоугольника к хорде (черт. 318), через y_i — расстояние узла i до хорды, через δl_i — изменение длины стержня l_i . Иногда, как мы уже указывали, выгоднее не вычислять изменения углов $\delta \theta_i$ и выражать фиктивные грузы, нужные при построении линии прогибов, непосредственно через удлинения брусков. В таком случае, и изменение длины хорды выгодно предста-

вить в зависимости от уже вычисленных значений фактивных грузов. Воспользуемся для этого ф-ой (см. § 45, ф-ла *f*).

$$P_m = \delta Q_m - \frac{\delta l_m}{l_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\delta l_{m+1}}{l_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Из нее находим

$$\delta Q_m = P_m + \frac{\delta l_m}{l_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\delta l_{m+1}}{l_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Ф-ла (а) может быть теперь переписана в таком виде:

$$\delta L = \sum_1^{n-1} y_i P_i + \sum_1^{n-1} y_i \left(\frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg} \beta_i - \frac{\delta l_{i+1}}{l_{i+1}} \operatorname{tg} \beta_{i+1} \right) + \sum_1^n \operatorname{Cos}(\beta_i - \alpha) \delta l_i \dots (b).$$

Вторая и третья суммы, в правой части этой ф-лы зависят от удлинений брусков, причем каждому бруску *i* будут соответствовать такие три члена:

$$y_i \frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg} \beta_i - y_{i-1} \frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg} \beta_i + \delta l_i \operatorname{Cos}(\beta_i - \alpha).$$

Принимая во внимание, что

$$y_i = \eta_i \operatorname{Cos} \alpha$$

и, что

$$\eta_i - \eta_{i-1} = \lambda_i (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \alpha),$$

перепишем эти три члена в таком виде:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cos} \alpha \cdot \frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg} \beta_i \cdot \lambda_i (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \alpha) + \delta l_i \operatorname{Cos}(\beta_i - \alpha) = \\ & = \delta l_i \left[\frac{\operatorname{Sin} \beta_i \cdot \operatorname{Sin}(\beta_i - \alpha)}{\operatorname{Cos} \beta_i} + \operatorname{Cos}(\beta_i - \alpha) \right] = \frac{\delta l_i \cdot \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Cos} \beta_i}. \end{aligned}$$

После этого преобразования, ф-ла (b) переписется так:

$$\delta L = \operatorname{Cos} \alpha \left[\sum_1^{n-1} \eta_i P_i + \sum_1^n \frac{\delta l_i}{\operatorname{Cos} \beta_i} \right] \dots \dots \dots (c)$$

Когда фактивные грузы найдены каким-либо образом, то вычисление δL по ф-ле (c) может быть выполнено без всяких затруднений.

Задачи.

159) Построить линии кривых для узлов нижнего пояса фермы, представленной на чертеже (319). Пользуясь ф-ами (d) и (e) § 46, мы легко вычисляем фактивные грузы P_m и строим для них веревочный многоугольник. Замыкающая, от которой должен производиться отсчет прогибов, должна быть проведена так, чтобы были удовлетворены усло-

вия на опорах. На левой опоре, в нашем случае, прогиб равен нулю. На правой опоре перемещение шарнира B имеет заданное направление, следовательно, отношение между вертикальным и горизонтальным перемещениями определяется углом ψ . Горизонтальное перемещение равно, очевидно, приращению δL хорды AB и может быть вычислено по только что составленной ф-ле (с). Тогда для вертикального перемещения точки B будем иметь величину $\delta L \operatorname{tg} \psi$. По этим данным может быть проведена замыкающая, от которой нужно отсчитывать прогибы.

160) Построить линию прогибов для нижнего пояса фермы, представленной на чертеже (320). В этом случае изменение длины AB равно сумме удлинений брусков нижнего пояса. Вычислив его, находим вертикальное перемещение точки B .

161) Построить линию прогибов для узлов нижнего пояса трехшарнирной арки (черт. 321). На левой половине даны некоторые размеры фермы в сантиметрах, а на правой, увеличенные в 10000 раз, изменения длин стержней в миллиметрах. Удлинения эти вычислены для случая действия одного груза, приложенного в среднем шарнире. Для вычисления фиктивных грузов $P_1 \dots P_4$ пользуемся ф-ой (f) [§ 46]. Тогда, принимая во внимание косинусы углов наклона стержней, получаем

$$P_1 = \frac{1}{3810} (-175 - 600 - 600 + 477 - 400 + 201) = -0,29;$$

$$P_2 = \frac{1}{2690} (-372 - 633 - 477 + 300 - 201 + 77) = -0,49;$$

$$P_3 = \frac{1}{1890} (-529 - 663 - 300 - 104 - 77 - 11) = -0,89;$$

$$P_4 = \frac{1}{1410} (-473 - 616 + 104 - 601 + 11 - 53) = -1,15;$$

$$\sum_{m=1}^{10} \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} = -(577 + 600 + 633 + 663 + 616)2 = -6178;$$

$$P_1 y_1 = -0,29 \cdot 1440 = -417,6 \text{ mm}$$

$$P_2 y_2 = -0,49 \cdot 2560 = -1254 \text{ mm}$$

$$P_3 y_3 = -0,89 \cdot 3360 = -2990 \text{ mm}$$

$$P_4 y_4 = -1,15 \cdot 3840 = -4416 \text{ mm}$$

$$\sum_1^4 P_m y_m = -9078 \text{ mm.}$$

Чтобы получить фиктивный груз P_5 , соответствующий среднему шарниру, воспользуемся ф-ой для изменения длины хорды и напишем общее выражение для изменения расстояния между нижними опорными шарнирами

$$\delta L = 2 \sum_1^4 P_m y_m + P_5 y_5 + \sum_1^{10} \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m}.$$

Так как в нашем случае опорные шарниры предполагаются неподвижными, то $\delta L = 0$ и мы получаем

$$P_5 = - \frac{2 \sum_1^4 P_m y_m + \sum \frac{\delta U_m}{\cos \beta_m}}{y_4} = \frac{9078 + 6178}{4000} = + 6,08.$$

Пользуясь найденными значениями для фиктивных грузов, мы легко можем получить прогибы или графически, путем построения соответствующего веревочного многоугольника (фиг. б), или аналитическим путем, вычисляя изгибающие моменты от фиктивных грузов.

Имея прогибы нижнего пояса и зная изменение длин стоек, легко вычисляем также и прогибы узлов верхнего пояса.

162) Построить линию прогибов для узлов верхнего пояса трехшарнирной арки с затяжкой (черт. 322). Если предварительно вычислены изменения углов $\delta \theta_1, \delta \theta_2, \delta \theta_3$, то для получения $\delta \theta_4$ можно воспользоваться ф-ой (с) § 43. Полагая, что удлинения δL затяжки AB найдено предварительным расчетом, мы определим $\delta \theta_4$ из ур-ня

$$\delta L = \sum_1^3 y_m \delta \theta_m + \sum_5^7 y_m \delta \theta_m + y_4 \delta \theta_4 + \sum_1^8 \delta \theta_m \cos \beta_m.$$

Если бы мы пожелали найти прогибы, не определяя угловых изменений, то фиктивные грузы следовало бы вычислить на основании ф-л (d) и (e) [§ 46]. Для определения изменения длины хорды мы воспользовались бы в таком случае ф-ой (с) [§ 47]. Вторая сумма, в правой части этой ф-лы должна быть, в таком случае, распространена на все диагонали фермы, два крайние стержня верхнего пояса и два средних стержня нижнего пояса.

163) Найти изменение длины хорды AB для фермы с крайними вертикальными стойками (черт. 323), если фиктивные грузы для узлов верхнего пояса найдены предварительным расчетом. К шарнирному многоугольнику $AO \dots 6B$ мы не можем непосредственно приложить ф-лу (с) [§ 47], так как крайние стержни имеют вертикальное направление. Это затруднение может быть устранено введением дополнительных стержней, указанных на чертеже пунктиром. Дополнительные стержни считаем абсолютно жесткими и бруски AA_1 и BB_1 направляем по хорде AB . В таком случае, изменение расстояния A_1B_1 будет равняться искомому изменению расстояния AB .

К шарнирному многоугольнику $A_1O \dots 6B_1$ мы можем применить ф-лу (с) [§ 47], нужно только, к уже вычисленным грузам, помещенным в узлах 1, 2, \dots 5¹⁾, присоединить еще грузы P_0 и P_6 в крайних узлах. Грузы эти вычисляются прежним способом: нужно рассмотреть систему, представленную на чертеже (324) и в полученной таким

¹⁾ Для вычисления этих грузов нужно применить такой же прием, как при составлении ф-лы (f) § 46.

образом общей ф-ле [см. ф-лу (k)] для фиктивного груза нужно принять во внимание, что для нашего случая при вычислении $P_0 \delta U_m = \delta \bar{a}_m = 0$, так как присоединенные нами стержни нерастяжимы. Кроме того, $k_{m-1} = 0$. Намеченный здесь прием, основанный на введении в систему добавочных жестких стержней, может быть с выгодой использован при решении целого ряда других задач. Так, например, им можно воспользоваться в том случае, когда требуется построить линию прогиба для узлов шарнирного многоугольника, при чем фиктивные грузы выражены через угловые изменения $\delta\theta$ [§ 45]. Если в шарнирном многоугольнике имеются стержни, которые расположены по тому же направлению, по которому ищутся прогибы, то построение линии прогиба встречает затруднение, которое может быть устранено введением жестких стержней. Если нужно начертить линию вертикальных прогибов для шарнирного многоугольника (фиг. а), имеющего вертикальный брусок, то мы вставляем между соответствующими узлами m и $m-1$ абсолютно жесткие стержни mm_0 и $m-1-m_0$. Для удобства дальнейших вычислений, выберем углы наклона этих стержней так, как это указано на фигуре (b). Пользуясь общими ф-лами [§ 44] найдем, что вследствие удлинения δl_m стержня l_m угол треугольника (фиг. b) при вершине m_0 увеличится на величину $2 \frac{\delta l_m}{l_m}$. Два другие угла уменьшатся, и соответствующее приращение будет равно $-\frac{\delta l_m}{l_m}$. На основании этого заключаем, что фиктивный груз в вершине m_0 должен равняться $\delta\theta_{m_0} = -2 \frac{\delta l_m}{l_m}$. Что касается фиктивных грузов P_{m-1} и P_m , то при их вычислении нужно считаться с угловыми изменениями ¹⁾

$$\delta\theta_{m-1} + \delta \frac{\delta l_m}{l_m} \quad \text{и} \quad \delta\theta_m + \frac{\delta l_m}{l_m}.$$

При построении веревочного многоугольника нужно руководствоваться таким порядком грузов:

$$P_{m-1}, \quad P_{m_0} \quad \text{и} \quad P_m.$$

164) *Определить при помощи дополнительных жестких стержней линию прогиба фермы, представленной на чертеже 326. Чтобы избежать предварительного определения удлинения хорды 0—8 (задача 159), мы введем дополнительные шарниры 1, 3, 5, 7 и дополнительные нерастяжимые стержни, намеченные на чертеже пунктиром. Угловые изменения для шарнирного многоугольника 0 1 2 3 4 5 6 7 8 легко*

¹⁾ Изменения $\delta\theta_{m-1}$ и $\delta\theta_m$ относятся к первоначальному шарнирному многоугольнику с вертикальным бруском.

найдутся по изменениям углов фермы и углов треугольников, образованных дополнительными стержнями. Так как стороны этого шарнирного многоугольника абсолютно не растяжимы, то фиктивные грузы, как видно из ф-лы (1) [§ 45], определяются угловыми изменениями и не зависят от направления, по которому ищется прогиб. Мы выберем направление, перпендикулярное к плоскости скольжения правой опоры. Для этого направления прогибы на опорах нули, и мы без затруднений находим нужную нам замыкающую. Когда перемещения по известному направлению найдены, то в случае многоугольника с жесткими сторонами сейчас же можно найти и полные перемещения узлов [§ 43], а, следовательно, и горизонтальные прогибы фермы.

ГЛАВА V.

Статически неопределимые плоские фермы.

§ 48. Выбор лишних неизвестных.

Когда плоская ферма с n узлами заключает в себе более чем $2n$ стержней, считая в том числе и опорные бруски, то число уравнений, которое статика дает для определения усилий в стержнях будет меньше, чем число неизвестных. Задача об определении стержневых усилий является, таким образом, с точки зрения статики неопределенной. Мы можем подобрать в этом случае сколько угодно различных систем усилий, удовлетворяющих условиям равновесия всех узлов фермы. Возьмем, например, ферму с одним лишним стержнем (черт. 327, фиг. а). Выбрасывая стержень ab и заменяя его действие на остальную систему двумя неизвестными пока силами S , мы приходим к статически определенной системе (фиг. б), которая легко может быть рассчитана одним из известных нам приемов. Стержневые усилия в этой системе будут зависеть как от внешних нагрузок, так и от сил, представляющих усилие в *лишнем* стержне. Меняя эти силы, мы будем получать все новые усилия в стержнях фермы, удовлетворяющие условиям равновесия всех узлов.

Однако задача остается неопределенной лишь до тех пор, пока мы не принимаем во внимание деформации системы. Если же принять в расчет, что бруски фермы под действием возникающих в них усилий изменяют свою длину, и что эти изменения в статически неопределенных системах не являются совершенно независимыми, то мы сможем на основании условий деформации составить дополнительные уравнения, которые совместно с уравнениями статики вполне определят усилия во всех брусках системы. Обратимся к нашему примеру. Под действием внешних сил и усилий S система несколько деформируется, изменяется длина брусков, расстояние между узлами. В частности изменяется также и расстояние между узлами a и b (фиг. б), к которым приложены силы

S . Так как в заданной нам системе (фиг. а) между этими узлами расположен брусок ab , то, очевидно, что из всех возможных, с точки зрения статики, значений усилий S нужно выбрать такое, при котором изменение расстояния между узлами a и b как раз равняется удлинению

$$\delta l = \frac{Sl}{EF}$$

лишнего бруска ab . Это дополнительное условие совместно с уравнениями статики даст возможность найти усилия во всех брусках системы. Подобные же дополнительные уравнения, основанные на рассмотрении деформаций системы, могут быть составлены и в более сложных случаях, когда приходится иметь дело с фермами, заключающими не один, а несколько лишних стержней. При решении этих задач мы будем пользоваться теми общими приемами, которые были изложены в курсе сопротивления материалов ¹⁾. Мы будем применять способ *Максвелла-Мора*, основанный на начале возможных перемещений. Будем пользоваться началом *наименьшей работы* и теоремой о *взаимности перемещений*.

Для решения вопросов, связанных с перемещениями узлов, будем пользоваться приемами, изложенными в предыдущей главе. Приступая к расчету системы с лишними брусками приходится прежде всего выяснить вопрос, является ли данная ферма геометрически неизменяемой, так как только жесткие системы могут найти практическое приложение. Подвижные системы на практике не пригодны, и их мы исключим из нашего рассмотрения. Например, система, представленная на чертеже 328, имеет один лишний стержень, но не обладает свойствами геометрической неизменяемости: две жесткие части, заштрихованные на чертеже, могут перемещаться одна относительно другой вследствие перекашивания четырехугольника $abcd$.

Такая система, очевидно, не может иметь практического приложения. То же самое нужно сказать относительно системы, представленной на чертеже 329. Система эта представляет собою ферму *простейшего* типа, прикрепленную к земле четырьмя вертикальными опорными стержнями. Один стержень лишний, но система подвижная, она может совершать горизонтальные перемещения.

¹⁾ Курс сопротивления материалов, глава XIV.

Система представленная на чертеже 330, также будет геометрически изменяемой.

Здесь мы имеем тот исключительный случай, когда все опорные стержни пересекаются в одной точке O и равновесие возможно лишь тогда, если равнодействующая внешних сил проходит через точку пересечения опорных стержней. В противном случае ферма получит значительные перемещения.

При решении вопроса о том, какие стержни системы принимать за лишние, следует выбирать эти стержни так, чтобы по их устранении получалась жесткая статически определенная система по возможности более простого вида.

Такую систему мы в дальнейшем будем называть *главной системой* или *основной системой*, а соответствующие стержни *необходимыми стержнями*. В ферме, представленной на чертеже 327 за *лишний* стержень можно принять стержень ab или стержень cd . Остальные стержни являются необходимыми. При устранении одного из этих стержней ферма становится геометрически изменяемой.

В случае двухшарнирной арки, представленной на чертеже 331, мы имеем систему с одним *лишним* стержнем. Принимая за *лишний* какой-либо брусок фермы, например, стержень ab (фиг а), мы, выбрасывая его, получаем статически определенную жесткую систему—трехшарнирную арку с средним шарниром C . Расчет фермы будет проще, если за *лишний* взять один из опорных стержней. Устраняя закрепление, препятствующее правой опоре совершать горизонтальные перемещения, мы приходим к простой балочной системе, (фиг. б), которую и следует в данном случае принять за *главную систему*.

При расчете системы, представленной на чертеже 332, нельзя брать за *лишнюю* неизвестную какой либо раскос или стержень верхнего пояса, так как при удалении одного из этих стержней получается геометрически изменяемая система. Если мы удалим, например, стержень de то получим систему, составленную из двух жестких частей, соединенных с опорами и между собой тремя шарнирами $a b$ и c , лежащими на одной прямой. Такая ферма не будет жесткой. Малым удлинениям участков ac и cb будут соответствовать значительные перемещения шарнира c . За *лишний* стержень в данном случае проще всего принять один из опорных стержней.

Задачи.

165) *Определить число лишних неизвестных и наметить лишние бруски в фермах, представленных на чертеже (333).* Система, представленная на фигуре (а), является фермой простейшего типа с одним лишним опорным стержнем. За лишнюю неизвестную проще всего брать среднюю опорную реакцию. Выбрасывая среднюю опору, мы получаем *главную систему* в виде фермы простейшего типа, опертой по концам. Если бы мы за лишний стержень приняли правую опору, то *главная система* представилась бы в виде консольной балочной фермы. Заметим, что нельзя принимать за лишний брусок то закрепление левой неподвижной опоры, которое препятствует этой опоре перемещаться в горизонтальном направлении, так как при этом мы получили бы подвижную систему: все три опоры допускали бы горизонтальное перемещение фермы. За лишний брусок можно было бы, конечно, принять один из брусков фермы, но тогда бы мы пришли к *главной системе* более сложного вида, к консольно-балочной системе или к двум балочным фермам опертым по концам.

Фермы, представленные на фигурах (b) и (c) имеют по два *лишних* бруска, так как здесь мы имеем системы простейшего типа, прикрепленные к фундаменту пятью опорными стержнями. За *лишние* бруски выгоднее всего принять те, которые соответствуют средним опорным закреплениям. Устраняя средние опоры, приходим к *главным системам* простейшего типа, опертым по концам.

166) *Наметить лишние бруски в фермах, представленных на чертеже 334.* Легко видеть, что фермы, представленные на фигурах (а) и (b) обращаются в системы простейшего типа, если выбросить один из брусков подкрепляющего шпренгеля или подкрепляющей цепи. За *лишний брусок*, и в том и в другом случае, выгодно взять брусок *ab*.

Система, представленная на фигуре (c), состоит из двухшарнирной арки, усиленной цепью. Эта система включает два *лишних* бруска. Мы обратим ее в статически определимую, если выбросим одно из звеньев цепи и устраним то опорное закрепление арки, которое препятствует одной из опор совершать горизонтальные перемещения.

Можно притти к *главной системе* и иными путями. Можно, например, устранить одно из опорных закреплений и один из стержней арки, тогда приходим к цепи, подкрепленной двумя жесткими балками, связанными шарниром.

167) *Наметить лишние бруски в системах, представленных на чертеже 335.* Система, представленная на фигуре (а), является простейшей фермой, прикрепленной к фундаменту четырьмя опорными стержнями. Наиболее простой вид будет иметь *главная система*, если мы за *лишний брусок* примем опорный стержень *ab* или *cd*. И в том и в другом случае, мы приходим к ферме простейшего типа, опертой в двух точках. Заметим, что брусок *ce* нельзя принять за *лишний*, так как с его устранением мы приходим к жесткой ферме, прикрепленной к фундаменту тремя брусками, пересекающимися в одной точке *a*.

Такая система, как мы знаем (§ 11), не обладает жесткостью. Подобное замечание относится вообще ко всем стойкам и раскосам системы (а).

Система, представленная на фигуре (b), обращается в простейшую ферму с опертыми концами, если мы устроим опорные бруски 1, 2, 3 и 4. Эти бруски и следует принять за *лишние*.

168) *Показать, что в серповидной двухшарнирной арке, представленной на чертеже 336, бруски ab и cd не могут быть приняты за лишние.* В самом деле, если мы за *лишний* брусок примем стержень ab , то по удалении его получим систему, составленную из двух жестких частей, соединенных между собой фиктивным шарниром C . В нашем случае, шарнир этот располагается на прямой AB и вся система получается не жесткой. Она будет обладать такой же подвижностью, как представленная на фигуре (b) система, составленная из двух брусков, лежащих на одной прямой. То же замечание относится и к бруску cd . Если мы за *лишний* примем другой какой-либо брусок, то *главная система* представится в виде трехшарнирной арки. Проще всего, в данном случае, за *лишнее* закрепление принять то, которое препятствует горизонтальным перемещениям одной из опор арки. Устраняя это закрепление, получаем *главную систему* простейшего типа.

169) *Показать, что двухпролетная симметричная арочная система, представленная на чертеже 337, имеет один лишний стержень и что за лишний стержень нельзя принимать то закрепление, которое препятствует горизонтальным перемещениям опоры B .* Наша система имеет шесть опорных стержней. Если два из них заменить стержнями, указанными на чертеже пунктиром, то мы получим ферму простейшего типа, прикрепленную к фундаменту четырьмя опорными стержнями. Следовательно, система заключает в себе один *лишний* стержень.

Если мы устроим закрепление, препятствующее горизонтальным перемещениям опоры B , то тогда реактивные силы, возникающие в шарнирах D , E и B при действии сил на часть DBE , будут пересекаться в одной точке O . Жесткая часть DBE окажется в таких условиях, как если бы она была прикреплена к земле тремя брусками, пересекающимися в одной точке. Такое прикрепление, как мы знаем, является не жестким. Устранение выбранного нами закрепления в опоре B приводит к подвижной системе. Следовательно, это закрепление является *необходимым*.

§ 49. Способ Максвелля-Мора.

Сейчас было показано, что расчет статически неопределимых систем требует предварительного составления дополнительных ур-ий, основанных на рассмотрении деформации системы. Так, например, в случае системы с одним *лишним* бруском мы составляем одно дополнительное ур-ие, принимая во внимание то обстоя-

тельство, что удлинение *лишнего* бруска под действием возникающего в нем усилия должно равняться изменению расстояния между узлами, которые *лишний* брусок соединяет. Подобные соображения применяются также и в тех случаях, когда приходится иметь дело с системами, заключающими в себе несколько лишних брусков. Для решения вопросов геометрического характера, связанных с составлением дополнительных ур-ий, мы воспользуемся приемом Максвелла для определения перемещений (§ 38). Такой путь расчета статически неопределенных систем впервые был намечен Максвеллом еще в 1864 году, но широкое применение в технике этот прием нашел, главным образом, благодаря трудам немецкого инженера Мора ¹⁾. Ход расчета поясним на простейшем примере. Пусть нам дана ферма с одним лишним бруском (черт. 388), и требуется найти усилия, возникающие в стержнях системы под действием заданных нагрузок P_1, P_2, \dots . За лишний стержень примем правую опорную стойку CB , усилие в которой обозначим через X (фиг. *a*). Устраняя лишний брусок, мы приходим к *главной системе*, представляющей собою ферму *простейшего* типа (фиг. *b*). Усилия в стержнях этой фермы, вызываемые силами P_1, P_2, \dots , мы легко находим одним из ранее изложенных способов; например, способом непосредственного разложения. В дальнейшем эти усилия будем называть буквою S_0 . Величину неизвестного нам усилия в лишнем бруске найдем из того условия, что удлинение этого бруска под действием сил X должно равняться изменению расстояния между узлами B и C заданной нам фермы в ее действительном состоянии ²⁾. Пусть δL обозначает удлинение лишнего бруска и δl — удлинение любого другого бруска нашей фермы (фиг. *a*). Тогда на основании ф-лы Максвелла [§ 38, ф-ла (*b*)], находим

$$\delta L = - \sum S' \delta l \dots \dots \dots (a)$$

Здесь буква S' обозначает усилия в *необходимых* стержнях системы при действии на нее двух прямо противоположных сил единица, приложенных в узлах B и C (фиг. *c*). Входящие в ур-ие (*a*)

¹⁾ См. Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger. Zeitschr. d. Archit. u. Ing. Vereines. Hannover 1874 стр. 223. Здесь дано решение задачи для случая одной лишней неизвестной. Обобщение на случай нескольких лишних неизвестных см. Beiträge zur Theorie des Fachwerks, Zeitschr. d. Archit. u. Ing. Vereines, Hannover, 1874 г., стр. 509 и 1875 г., стр. 17. См. также Otto Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete d. technischen Mechanik, Berlin, 1906.

²⁾ Т. е. при действии заданных нагрузок и сил X .

удлинения брусьев фермы найдем, применяя закон Гука. Удлинение лишнего бруска, вызванное усилием X , будет равно

$$\delta L = X \frac{L}{EF_0} = X r_0 \dots \dots \dots (b)$$

Усилия в необходимых брусьях заданной нам фермы мы получим, если в главной системе (фиг. *b*), кроме сил P_1, P_2, \dots приложим силы X , заменяющие устраненный лишний брусок. Полное усилие S в каком-либо бруске составит из двух частей, усилия S_0 , вызываемого заданными нагрузками, и усилия $S' X$, вызываемого силами X . Следовательно,

$$S = S_0 + S' X \dots \dots \dots (c)$$

Удлинение какого-либо из необходимых брусьев представится так:

$$\delta l = (S_0 + S' X) \frac{l}{EF} = (S_0 + S' X) r \dots \dots \dots (d)$$

Величины r_0 и r мы вводим для сокращения письма. Они характеризуются растяжимость *лишнего* и *необходимых* брусьев. На основании ф-л (b) и (d) ур-не (a) переписывается в таком виде:

$$X r_0 = - \sum S' (S_0 + S' X) r \dots \dots \dots (e)$$

откуда

$$X = - \frac{\sum S' S_0 r_0}{\sum S'^2 r + r_0} \dots \dots \dots (f)$$

Здесь суммирование должно быть распространено на все *необходимые* бруски системы.

Ур-не (e) может быть написано сразу, если мы применим начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре (c) и к действительным перемещениям заданной фермы (фиг. *a*). В самом деле, в случае, представленном на фигуре (c), мы имеем лишь усилия S' в необходимых брусьях и силы единица, действующие по линии *BC*. Соответствующие этим силам перемещения в заданной ферме определяются формулами (d) и (b). Так как усилия S' и силы, равные единице, представляют собой системы сил, взаимно уравновешивающихся, то работа этой системы сил на всяком возможном перемещении будет равняться нулю. Мы примем за возможные перемещения те малые перемещения, которые совершают узлы заданной системы при переходе от ненагруженного состояния в состояние, соответствующему действительным

нагрузкам. Приравнивая нулю работу сил, соответствующих фигуре (с), на перемещениях, соответствующих фигуре (а), получаем ур-ие

$$-1 \cdot X r_0 - \Sigma S' (S_0 + S' X) r = 0,$$

совпадающее с ур-ием (е).

Заметим, что к тому же ур-ию (е), мы пришли бы, если бы применили *начало наименьшей работы*¹⁾. Потенциальная энергия системы (а) составит из энергии растяжения *лишнего* и *необходимых* брусков и выразится такой формулой

$$\begin{aligned} V &= \frac{X^2 L}{2EF_0} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{(S_0 + S' X)^2 l}{EF} = \\ &= \frac{1}{2} X^2 r_0 + \frac{1}{2} \Sigma (S_0 + S' X)^2 r. \end{aligned}$$

Составляя производную от V по X и приравнивая эту производную нулю, придем к прежнему ур-ию (е).

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда *лишней* неизвестной является опорная реакция. Предположим, требуется рассчитать ферму с параллельными поясами, лежащую на трех опорах [черт. 339, фиг. (а)]. Проще всего в этом случае принять за *лишний* опорный стержень, соответствующий средней опоре. Устраняя его приходим к *главной системе*, представляющей собой ферму простейшего типа (фиг. б). Мы легко можем найти усилия S_0 , возникающие в главной системе под действием внешних нагрузок $P_1, P_2 \dots$ и усилия S' , возникающие в той же системе под действием силы единица, приложенной вместо устраненного бруска (фиг. с). Обозначая через X среднюю опорную реакцию²⁾, представим действительное усилие в каком-либо стержне заданной системы (фиг. а) так

$$S = S_0 - S' X.$$

Применяя теперь начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре (с), и к действительным перемещениям заданной нам фермы (фиг. а), получаем ур-ие

$$1 \cdot \delta - \Sigma S' (S_0 - S' X) r = 0 \dots (g).$$

¹⁾ Курс сопротивления материалов. III изд., стр. 273.

²⁾ За положительное направление реакции, мы приняли направление вверх.

Здесь через δ обозначено опускание средней опорной точки C фермы по отношению к прямой AB , соединяющей две крайние опорные точки. Перемещение это *соответствует* обобщенной силе, составленной из силы единичца, приложенной в C , и реакций, приложенных в A и B (фиг. с). Во многих случаях осадкой опор пренебрегают, тогда ур-ие (g) переписывается в более простом виде.

$$\Sigma S''(S_0 - S'X)r = 0,$$

откуда

$$X = \frac{\Sigma S_0 S' r}{\Sigma S'^2 r} \dots \dots \dots (h)$$

Рассмотрим здесь, на простейших примерах, еще одно обстоятельство, которое оказывает влияние на усилия в стержнях статически неопределимых ферм, именно вопрос о влиянии изменения температуры. Мы знаем, что число *необходимых* брусков достаточно для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Этими брусками вполне определяется геометрическое очертание фермы, и если мы между двумя какими-либо узлами *главной системы* пожелаем вставить дополнительный, *лишний брусок*, то длина его должна в точности соответствовать расстоянию между узлами, иначе введение такого бруска в систему будет сопровождаться появлением усилий в стержнях фермы. Пусть, например, длина вставляемого бруска больше нежели расстояние между соответствующими узлами. Тогда при сборке придется лишний брусок установить на место в сжатом состоянии. Такой предварительно сжатый брусок будет, очевидно, стремиться раздвинуть те узлы, между которыми он закреплен и вызовет при этом усилия в других брусках системы.

Подобное явление мы будем иметь при изменении температуры стержней статически неопределимой системы. Если какой-либо стержень системы, который может быть принят за *активный*, нагреем, то он, удлиняясь, будет при этом раздвигать соответствующие узлы и вызовет усилия в других стержнях системы. Эти *температурные* усилия мы можем найти, пользуясь тем же приемом Максвелла-Мора. Обратимся к примеру, представленному на чертеже 338.

Предположим, что бруски фермы изменяют свою длину не только под действием нагрузок $P_1, P_2 \dots$, но и вследствие изменения температуры. Пусть t_0 обозначает повышение температуры *лишнего* бруска и t — повышение температуры какого либо *необхо-*

дного бруска. Тогда для удлинений брусков, соответствующих действительному состоянию системы, будем иметь выражения

$$\delta L = Xr_0 + \alpha Lt_0, \quad \delta l = (S_0 + S'X)r + \alpha tl.$$

Применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре (с) (черт. 338), и к действительным перемещениям, получаем уравнение

$$-1(Xr_0 + \alpha Lt_0) - \sum S'[(S_0 + S'X)r + \alpha tl] = 0,$$

отсюда

$$X = -\frac{\sum S'_0 S_0 r}{\sum S'^2 r + r_0} - \frac{\alpha Lt_0 + \sum S' \alpha tl}{\sum S'^2 r + r_0} \dots (k)$$

Второй член в полученной формуле определяет влияние изменения температуры на величину усилия X в лишнем бруске. Вставляя найденное значение X в общую формулу (с), мы можем найти усилия во всех необходимых брусках системы.

Из приведенных примеров видно, что расчет систем с одним лишним бруском по способу Максвелла-Мора сводится к определению усилий S_0 и S' в стержнях главной системы для нагрузок, указанных на фигурах (b) и (с). Когда усилия S_0 и S' найдены, усилие X в лишнем бруске вычисляется по одной из составленных выше формул.

Намеченный здесь способ расчета легко может быть распространен на системы с несколькими *лишними* брусками, независимо от того, будут ли *лишние* бруски представлять собой опорные стержни или стержни фермы.

В качестве более сложного примера рассмотрим трехпролетную систему, представленную на чертеже 340. Система эта составлена из трех ферм простейшего типа, соединенных в одну ферму с *необходимым* числом стержней. Эта ферма прикреплена к фундаменту при помощи двух неподвижных и двух подвижных опор, что соответствует шести опорным стержням. Из этого следует, что наша система включает в себе три *лишних* бруска. При выборе *лишних* брусков нужно стремиться к тому, чтобы получить *главную систему*, по возможности, более простого вида. Мы можем, например, за лишние принять две промежуточные опоры и то закрепление правой опоры, которое препятствует ее горизонтальным перемещениям. Тогда, устраняя лишние бруски и заменяя их соответствующими усилиями, мы приходим к *главной системе*, представляющей собой простую базочную ферму (черт. 341). Дру-

гой простой вид *главной системы* мы получим, если примем за лишние соединительные бруски ab и cd (черт. 340) и то закрепление, которое препятствует горизонтальным перемещениям правой опоры. Устраняя эти бруски и заменяя действие их соответствующими силами, придем к *главной системе*, составленной из трех балочных ферм простейшего типа (черт. 342). Расчет начинаем с определения усилий S_0 вызываемых в *главной системе* заданными нагрузками P_1, P_2, \dots . Далее изучаем роль неизвестных сил X, Y и Z . Для этого устраняем эти силы и внешние нагрузки и рассматриваем три состояния *главной системы*, когда поочередно вместо каждой *лишней* неизвестной приложены силы единица (черт. 343). Усилия в стержнях *главной системы* для случая $X=1$ (фиг. а) обозначим через S' . Соответствующие опорные реакции будут

$$A_1 = -1 \frac{h}{l_1}; \quad B_1 = 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) \\ C_1 = -1 \frac{h}{l}; \quad D_1 = 0$$

Для случая, представленного на фигуре (b), обозначим усилия в стержнях через S'' . Соответствующие реакции имеют такие значения

$$A_2 = 0; \quad B_2 = -1 \frac{h}{l}; \quad C_2 = 1 \left(\frac{h}{l} + \frac{h}{l_1} \right); \quad D_2 = -1 \frac{h}{l_1}$$

В случае, представленном на фигуре (c), обозначим усилия через S''' . Опорные реакции будут иметь значения

$$A_3 = 1 \frac{l}{l_1}; \quad B_3 = -1 \frac{l}{l_1}; \quad C_3 = -1 \frac{l}{l_1}; \quad D_3 = 1 \frac{l}{l_1}$$

На основании этих расчетов получаем для усилий в стержнях заданной нам фермы (черт. 340) такое общее выражение

$$S = S_0 + S'X + S''Y + S'''Z \quad (p)$$

Соответствующее удлинение представится так

$$\delta l = r (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)$$

Для удлинений лишних брусков ab и cd получим выражения

$$\delta L_1 = r_1 X; \quad \delta L_2 = r_2 Y$$

Предположим для упрощения, что крайние опоры заданной нам системы (черт. 340) совершенно неподвижны, и промежуточные опоры под действием приходящихся на них давлений, не

оседают. Тогда применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигурам (а), (б) и (с) (черт. 343) и к действительным перемещениям, получаем такие три уравнения.

$$\begin{aligned} -1r_1 X - \Sigma S'r (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z) &= 0 \\ -1r_2 Y - \Sigma S''r (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z) &= 0 \quad (b) \\ -\Sigma S'''r (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z) &= 0 \end{aligned}$$

Первые два из этих уравнений выражают то условие, что удлинения лишних брусков равны изменению расстояния между соответствующими узлами. Третье уравнение является следствием неподвижности крайних опор заданной нам фермы¹⁾. В полученную систему уравнений совершенно не вошли опорные реакции, найденные выше для фиктивных случаев нагрузки (черт. 343). Произошло это потому, что соответствующие им перемещения действительной фермы (черт. 340), на основании сделанного выше предположения равны нулю.

Выясним теперь, как повлияют на усилия в брусках изменения температуры стержней и перемещения опор фермы, которые получаются под действием заданных нагрузок $P_1, P_2 \dots$ (черт. 340). Пусть t обозначает повышение температуры какого-либо стержня главной системы, t_1 и t_2 — повышение температуры лишних брусков ab и cd .

Направленные вниз вертикальные перемещения опор²⁾ A, B, C и D для действительного состояния (черт. 340) обозначим соответственно через $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ и δ_d , и увеличение расстояния между крайними опорами через δ_n . Тогда, удлинение какого-либо бруска главной системы представится так

$$\delta l = r (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z) + \alpha l t.$$

Работа опорных реакций, соответствующих фигуре (а) [черт. 343], на действительных перемещениях опор, представится так

$$T_1 = + \delta_a \frac{h}{l_1} - \delta_b \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) + \delta_c \frac{h}{l}$$

¹⁾ Конечно, те же уравнения мы получили бы, если бы сразу воспользовались формулой Максвелла (§ 38, формула (б)).

²⁾ На практике обыкновенно весьма трудно определить действительные перемещения опор и потому при расчетах задаются для этих перемещений произвольными величинами, чтобы таким путем примерно оценить, какую роль вообще может играть в рассматриваемом случае осадка опор. Если роль осадки велика, то формулу следует применять лишь при условии надежного устройства опор.

Точно также для случаев, представленных на фигурах (b) и (c) [черт. 343], получим

$$\begin{aligned} T_2 &= + \delta_b \frac{h}{l} - \delta_c \left(\frac{h}{l} + \frac{h}{l_1} \right) + \delta_d \frac{h}{l_1} \\ T_3 &= - I \delta_h - \delta_a \frac{l}{l_1} + \delta_b \frac{l}{l_1} + \delta_c \frac{l}{l_1} + \delta_d \frac{l}{l_1} \end{aligned}$$

Составляя теперь выражения для работы сил, соответствующих фигурам (a), (b) и (c), на действительных перемещениях и приравнявая эти выражения нулю, получим такие уравнения для определения лишних неизвестных

$$\left. \begin{aligned} T_1 - Xr_1 - at_1 L_1 - \Sigma S' r (S_0 + S' X + S'' Y + S''' Z + atl) &= 0 \\ T_2 - Yr_2 - at_2 L_2 - \Sigma S'' r (S_0 + S' X + S'' Y + S''' Z + atl) &= 0 \\ T_3 - \Sigma S''' r (S_0 + S' X + ZS'' Y + S''' Z + atl) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (m)$$

Знаки суммы распространяются на все *необходимые* бруски системы. Таким образом, и в этом более сложном случае расчет статически неопределимой системы привелся к решению элементарной задачи, к расчету *главной системы*. Определение усилий S_0 , S' , S'' и S''' может быть выполнено одним из ранее изложенных приемов расчета статически определимых систем (глава II). Когда S_0 , S' , S'' и S''' найдены, мы определяем лишние неизвестные из уравнений (l) или (m). При этом размеры брусков, изменения температуры и осадки опор предполагаются заданными. Вставляя найденные таким образом значения X , Y и Z в формулу (p), получаем усилия во всех прочих брусках системы.

Задачи.

170) Найти усилия во всех брусках статически неопределимой системы, представленной на чертеже (344). За лишний брусек примем тягу AD . Устранив ее, получим *главную систему* в виде фермы простейшего типа (фиг. b). Пусть S_0 обозначает усилия, возникающие в стержнях этой фермы под действием нагрузок $P_1, P_2 \dots$. Теперь отдельно изучаем влияние лишнего бруска. Отбрасываем заданные нагрузки и вместо стержня AD прикладываем силу единичца (фиг. c). Пусть S' обозначает усилия в брусках для этого случая нагрузки. Тогда удлинение какого-либо стержня заданной фермы под действием грузов $P_1, P_2 \dots$ (фиг. a) будет равно

$$\delta l = r(S_0 + S'X).$$

Применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре (с), и к действительным перемещениям (фиг. а), получаем

$$-1Xr_0 - \Sigma S'r(S_0 + S'X) = 0,$$

откуда

$$X = -\frac{\Sigma S'S_0r}{\Sigma S'^2r + r_0}.$$

Рассмотрим теперь, какие напряжения возникнут в стержнях системы при изменении температуры. Если через X_1 обозначить соответствующее усилие в лишнем бруске и t_0 —повышение температуры, то для удлинения этого бруска получим выражение

$$\delta L = X_1r_0 + at_0L.$$

Удлинение какого-либо необходимого бруска представится так:

$$\delta l = rS'X_1 + atl.$$

Применяя начало возможных перемещений к перемещениям, вызванным изменениями температуры, и к усилиям, соответствующим фигуре (с), получим

$$-1(X_1r_0 + at_0L) - \Sigma S'(rS'X_1 + atl) = 0;$$

откуда

$$X_1 = -\frac{at_0L + \Sigma S'atl}{\Sigma S'^2r + r_0}.$$

Предположим теперь, что тяга AD , которую мы принимали за *лишний брусок*, изготовлена короче расстояния между узлами A и D на величину e . Тогда при сборке придется предварительно растянуть тягу на e , и потом только вставить ее на место. Присоединенная в растянутом состоянии к шарнирам A и D тяга будет стремиться сблизить эти шарниры и вызовет усилия в стержнях фермы. Найдем эти усилия, пользуясь способом Максвелла Мора. Если мы через X_2 обозначим усилие в тяге, то сближение шарниров A и D представится так:

$$\delta L = e - X_2r_0.$$

Удлинения необходимых брусков системы найдутся, по такой ф-ле:

$$\delta l = S'X_2r.$$

Ф-ла Максвелла [§ 38, ф-ла b] дает нам

$$e - X_2r_0 = \Sigma S'^2X_2r,$$

отсюда находим

$$X_2 = \frac{e}{\Sigma S'^2r + r_0}.$$

Тот же результат мы могли бы получить из приведенной выше ф-лы, оценивающей влияние температуры. В самом деле, установка укороченного стержня вызовет, очевидно, такие же усилия в прочих

брусках системы, как и понижение температуры стержня. Нужно только подобрать понижение температуры так, чтобы

$$- \alpha t_0 l = e.$$

171) *Определить усилия в брусках балочной фермы, усиленной цепью (черт. 345).* За лишний брусек примем среднее звено цепи (фиг. а). Устраняя этот стержень, мы получим ферму простейшего типа. Усилия S_0 вызываемые в этой ферме нагрузками P_1, P_2 , найдем одним из известных нам приемов расчета простейших систем. После этого изучаем влияние устранившего стержня. Прикладывая вместо этого стержня две равные и прямо противоположные силы единица (фиг. б), определяем соответствующие этим силам усилия S' . При этом, для определения усилий в звеньях цепи и соответствующих стойках, рассматриваем цепь, как веревочный многоугольник. Тогда, проводя из полюса лучи, параллельные звеньям цепи и выбирав полусное расстояние равным единице силы, получим из чертежа все усилия в звеньях цепи и в стойках. После этого остается только рассчитать простейшую ферму с параллельными поясами, на которую будут действовать только что найденные усилия в поддерживающих стойках. Действительные усилия, вызываемые в заданной нам ферме нагрузками $P_1, P_2 \dots$ представляются так:

$$S = S_0 + S' X.$$

Допуская кроме того изменения температуры и применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре (б), и к действительным перемещениям, получаем такое уравнение:

$$- 1(Xr_0 + \alpha t_0 L) - \Sigma S' [r(S_0 + S' X) + \alpha t l] = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\Sigma S' S_0 r + \Sigma S' \alpha t l + \alpha t_0 L}{\Sigma S'^2 r + r_0}.$$

172) *Определить усилия в стержнях трехпролетной консольно-арочной системы (черт. 346).* Легко видеть, что устранением одного опорного стержня мы обращаем заданную систему в статически определенную. Примем за лишнее то закрепление, которое препятствует изменению расстояния между опорами A и D . Соответствующее неизвестное усилие обозначим через X (фиг. а). Устраняя это закрепление, получаем статически определенную консольно-балочную систему, для которой легко находятся усилия S_0 , вызываемые заданными нагрузками $P_1, P_2 \dots$. Теперь выясняем влияние лишнего закрепления. Прикладывая вместо лишнего неизвестных X силы, равные единице (фиг. б), находим вызываемые этими силами опорные реакции и усилия S' в стержнях. Пусть $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ и δ_d вертикальные осадки опор, получающиеся при действительном состоянии системы (фиг. а), и δ_h — увеличение расстояния между опорами A и D . Тогда работа опорных реакций состояния (б) на действительных перемещениях представится так:

$$T = \frac{2h}{l_1} (-\delta_a + \delta_b + \delta_c - \delta_d) - 1 \delta_h.$$

Применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре (b), и к действительным перемещениям, получим уравнение:

$$T - \Sigma S'(S_0 + S'X)r = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\Sigma S' S_0 r}{\Sigma S'^2 r} + \frac{T}{\Sigma S'^2 r}.$$

Если нужно оценить также влияние изменения температуры, то к полученной ф-ле нужно прибавить член

$$- \frac{\Sigma S' \alpha t l}{\Sigma S'^2 r}.$$

173) Рассчитать фермы, представленные на чертеже (347). Обе системы имеют по два лишних бруска. За лишние неизвестные проще всего принять усилия в двух звеньях подкрепляющих цепей (фиг. а) и (фиг. b). Устраняя эти бруски получаем системы простейшего типа.

§ 50. Теорема о взаимности перемещений.

Применяя теорему о взаимности перемещений, мы всегда сравниваем два напряженные состояния системы, которые в дальнейшем будем называть состояниями I и II. Каждому из этих состояний соответствует свое распределение внешних нагрузок, а, следовательно, и свои узловые перемещения. Теорема гласит: работа сил I-го состояния на соответствующих им перемещениях II-го состояния равна работе сил II-го состояния на соответствующих перемещениях I-го состояния. Здесь мы силы и соответствующие им перемещения понимаем в обобщенном смысле¹⁾. Иногда это будут отдельные сосредоточенные силы, в других же случаях группам сил, например, на практике часто встречаются две разные и прямо противоположные силы, пара сил, группа, составленная из силы и соответствующих ей опорных реакций и т. д.

Высказанная теорема может быть доказана в самом общем виде) и применима во всех тех случаях, где имеет место принцип сложения действия сил. Пользуясь началом возможных перемещений, легко доказать ее применимость к стержневым системам. Возьмем сначала простейший случай, когда каждому напряженному состоянию соответствует лишь одна сила²⁾ (черт. 348). Перемещения узлов

¹⁾ Курс сопротивления материалов. III изд., стр. 261.

²⁾ См. Курс сопротивления материалов. III изд., стр. 279.

³⁾ Строго говоря и в I-м и во II-м состоянии мы имеем группу, составленную из трех сил: заданной нагрузки в двух реакциях. Мы для простоты предполагаем, что опоры абсолютно не податливы и трения в подвижной опоре нет. Тогда реакции не совершают никакой работы и в уравнение не войдут.

в направлении приложенных к ним сил условимся обозначать буквой δ с двумя значками. Первый значек будет указывать узел, к которому перемещение относится; а второй значек — силу, которой это перемещение вызвано. Следовательно, δ_{ab} будет обозначать перемещение узла A в направлении силы P_a , вызванное силой P_b , δ_{ba} — будет обозначать перемещение узла B в направлении силы P_b , вызванное силой P_a . Произведем теперь расчет фермы для обоих состояний и обозначим через S_a и S_b усилия в стержнях, соответствующие силам P_a и P_b . Тогда удлинения брусков будут равняться rS_a и rS_b . Перемещения узлов могут быть найдены одним из наложенных ранее способов. Так как усилия S_a и сила P_a с ее реакциями представляют систему сил взаимно уравновешивающихся, то их работа на всяком возможном перемещении системы должна равняться нулю. Если за возможные перемещения принять перемещения, соответствующие II-му состоянию, то мы получим такое уравнение

$$P_a \cdot \delta_{ab} - \sum S_a \cdot S_b r = 0 \dots \dots \dots (a)$$

Применяя начало возможных перемещений к силам II-го состояния и к перемещениям I-го состояния, получим

$$P_b \cdot \delta_{ba} - \sum S_b \cdot S_a r = 0 \dots \dots \dots (b)$$

Сравнивая (a) и (b), находим

$$P_a \cdot \delta_{ab} = P_b \cdot \delta_{ba} \dots \dots \dots (c)$$

Этот результат представляет собой частный случай теоремы о взаимности перемещений, доказанный Максвеллом. Из формулы (c) сейчас же следует, что если $P_a = P_b$, то $\delta_{ab} = \delta_{ba}$, т. е., когда имеются две равные силы P_a и P_b , то сила P_a вызывает такое перемещение узла B в направлении P_b , какое перемещение сила P_b вызывает в узле A в направлении P_a .

Понимая силы в обобщенном смысле, мы сейчас же можем применить результат (c) к случаю, представленному на черт. (349). Здесь же мы в I-м состоянии имеем обобщенную силу, составленную из двух равных и прямо противоположных сил P_a . Во II-м состоянии обобщенная сила представляет собой группу трех сил, силы P_b и соответствующих ей реакций. Перемеще-

нием соответствующим силам P_a будет сближение точек A . Обобщенной силе P_b будет соответствовать перемещение, представляющее уменьшение расстояния h точки B от линии AA . Если

$$P_a = P_b,$$

то на основании теоремы о взаимности перемещений заключаем, что подъем точки B , вызванный силами P_a , равен увеличению расстояния между шарнирами A при действии силы P_b . В случае, представленном на чертеже (350), мы для I-го состояния имеем обобщенную силу P_a прежнего типа. Во II-м состоянии обобщенная сила составлена из двух равных и прямо противоположных пар сил M_b . Соответствующим перемещением является изменение угла φ . Если мы обозначим через δ_{ab} уменьшение расстояния AA под действием пар сил M_b и через $\delta\varphi_a$ — уменьшение угла φ под действием сил P_a , то на основании (с) имеем

$$P_a \cdot \delta_{ab} = M_b \cdot \delta\varphi_a.$$

Обратимся теперь к более общему случаю, когда на систему действует целый ряд сил. Предположим I-му состоянию соответствуют силы P, Q, R, \dots . Во II-м состоянии силы тех же типов имеют значения P_1, Q_1, R_1, \dots . Обозначим через S и S_1 усилия в стержнях для первого и второго состояния. Через p, q, r, \dots и p_1, q_1, r_1, \dots — перемещения, соответствующие силам I-го и II-го состояний. Применяя начало возможных перемещений к усилиям I-го состояния и перемещениям II-го состояния, находим

$$Pp_1 + Qq_1 + Rr_1 + \dots - \sum S S_1 r = 0.$$

Точно также для сил II-го состояния и перемещений I-го состояния начало возможных перемещений дает нам

$$P_1 p + Q_1 q + R_1 r + \dots - \sum S_1 S r = 0,$$

На основании этого заключаем

$$Pp_1 + Qq_1 + Rr_1 + \dots = P_1 p + Q_1 q + R_1 r \dots (d)$$

Результат этот представляет собой высказанную выше в общем виде теорему о взаимности перемещений.

Пользуясь этой теоремой и наложенными ранее (глава IV) приемами построения перемещений, мы легко можем решить рас-

смотренные нами в предыдущем параграфе задачи, относящиеся к расчету статически неопределенных систем

Возьмем в качестве простейшего примера ферму с одним лишним брусом (черт. 351). За лишний стержень примем тягу AD . Тогда *главная система* представит собой простейшую ферму, прикрепленную в B и C . За первое состояние всегда будем принимать действительное состояние *главной системы*, когда на нее действуют заданные нагрузки и силы, заменяющие уstraенные лишние бруски.

В рассматриваемом случае I-е состояние представлено на фигуре (а). На главную ферму действуют силы P_1, P_2, \dots и лишняя неизвестная X . II-е состояние представлено на фигуре (б). Внешние силы здесь уstraены, а вместо лишней неизвестной приложена сила единица. Для этого второго состояния одним из известных нам приемов находим перемещение δ_a узла A по направлению силы единица и вертикальные прогибы $\delta_1, \delta_2, \dots$ точек приложения сил P_1, P_2, \dots . Применим теперь к этим двум состояниям теорему о взаимности перемещений. При таком способе решения задачи внутренние усилия в стержнях главной фермы, как это видно из уравнения (d), исключаются. Нам придется иметь дело лишь с внешними силами, к которым присоединяется и сила X , заменяющая действие отброшенного бруска. Составляя работу внешних сил I-го состояния на соответствующих перемещениях второго состояния и приравнявая ее работе сил II-го состояния. (Во II-м состоянии придется иметь дело лишь с силой единица. Соответствующие этой силе опорные реакции в уравнение работы не войдут, так как опоры B и C предполагаются неподвижными) на перемещениях I-го состояния, получим такое уравнение:

$$X \cdot \delta_a + \sum P_m \delta_m = -1 \cdot \frac{Xl}{EF} = -Xr_0.$$

Здесь принято во внимание, что силе единица II-го состояния соответствующим перемещением в I-м состоянии будет удлинение бруска AD . Полученное уравнение дает нам

$$X = - \frac{\sum P_m \delta_m}{\delta_a + r_0}.$$

Полученный вид решения для X особенно выгоден в тех случаях, когда нужно изучить влияние отдельных грузов P на величину лишней неизвестной. Здесь сразу видно, что влияние груза P_m

пропорционально прогибу δ_m . Этим обстоятельством мы дальше воспользуемся при расчете ферм, подвергающихся действию подвижной нагрузки, когда приходится строить линии влияния.

Применим теперь теорему о взаимности перемещений к более сложной задаче, к расчету трехпролетной системы (черт. 342), который был нами выполнен приемом Максвелла-Мора. За первое состояние мы будем каждый раз принимать действительное состояние главной системы (черт. 342), когда на нее действуют заданные нагрузки P_1, P_2, \dots и силы X, Y, Z заменяющие действия отброшенных *лишних* брусьев. За II-е состояние будем принимать поочередно каждое из фиктивных состояний, представленных на чертеже (343). Для этих трех состояний должны быть найдены узловые перемещения одним из известных нам способов, например путем построения диаграммы Виллио. Для состояния, представленного на фигуре (а), обозначим через δ_{xx}, δ_{yx} и δ_{zx} перемещения, соответствующие силам X, Y и Z , т. е. сближения соответствующих узлов системы. Через δ_{mx} будем обозначать перемещение, соответствующее силе P_m . Для состояний, представленных на фигурах (b) и (c), будем пользоваться для перемещений обозначениями $\delta_{xy}, \delta_{yy}, \delta_{zy}, \delta_{my}$ и $\delta_{xz}, \delta_{yz}, \delta_{zx}, \delta_{mz}$.

Первый значек при букве обозначает, какой силе перемещение *соответствует*¹⁾, а второй — какой силой это перемещение вызвано. Применяя теперь теорему о взаимности перемещений и выбирая за I-е состояние действительное состояние системы, а за II-е поочередно каждое из фиктивных состояний, мы получим такую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum P_m \delta_{mx} + X\delta_{xx} + Y\delta_{yx} + Z\delta_{zx} &= -1 \cdot \frac{XJ_1}{EF_1} = -Xr_1 \\ \sum P_m \delta_{my} + X\delta_{xy} + Y\delta_{yy} + Z\delta_{zy} &= -1 \cdot \frac{YJ_2}{EF_2} = -Yr_2 \\ \sum P_m \delta_{mz} + X\delta_{xz} + Y\delta_{yz} + Z\delta_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (e)$$

Уравнения эти соответствуют системе уравнений (b), полученной путем применения способа Максвелла-Мора (§ 49). Таким образом задача сводится к решению трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

¹⁾ Соответствие между силой и перемещением мы понимаем в обобщенном смысле.

Коэффициенты δ при этих неизвестных должны быть получены путем построения диаграмм перемещений для состояний, представленных на чертеже (343).

Мы здесь не приняли во внимание влияние осадок опор. Если эти осадки даны, то для оценки влияния их на неизвестные X , Y и Z нужно только к правым частям уравнений (e) присоединить работу T реакций соответствующего фиктивного случая, на заданных перемещениях опор. Выражения для T были уже нами составлены (§ 49) и их можно целиком использовать здесь.

Для оценки влияния температуры будем попрежнему пользоваться способом Максвелла-Мора. Напряжения эти, как мы видели (§ 49), приходится алгебраически суммировать с напряжениями, вызываемыми внешними нагрузками и напряжениями, получающимися от осадки опор. Мы уже отмечали, что полученная нами система ур-ий (e) соответствует ур-иям (l) (§ 49), найденным способом Максвелла-Мора. Сравнивая эти две системы, находим

$$\delta_{xx} = \Sigma S'^2 r; \quad \delta_{yx} = \Sigma S' S'' r; \quad \delta_{zx} = \Sigma S' S''' r; \quad \dots \dots (f).$$

и т. д.

Этими равенствами выгодно пользоваться в тех случаях, когда разыскание перемещений δ_{xx} , δ_{yx} , ... почему-либо является неудобным. Заменяя тогда эти перемещения соответствующими суммами, перепишем систему ур-ий (e) в таком виде:

$$\begin{aligned} \Sigma P_m \delta_{mx} + X \Sigma S'^2 r + Y \Sigma S' S'' r + Z \Sigma S' S''' r &= -X r_1 \\ \Sigma P_m \delta_{my} + X \Sigma S'' S' r + Y \Sigma S'' r + Z \Sigma S'' S''' r &= -Y r_2 \quad (e)' \\ \Sigma P_m \delta_{mz} + X \Sigma S''' S' r + Y \Sigma S''' S'' r + Z \Sigma S''' r &= 0 \end{aligned}$$

Подобным же образом может быть преобразована и система ур-ий (m) (§ 49).

§ 51. Применение теоремы о взаимности перемещений к построению линий влияния.

Применение теоремы о взаимности перемещений является особенно выгодным в том случае, когда мы изучаем влияние на систему подвижной нагрузки. При помощи этой теоремы легко могут быть построены соответствующие линии влияния. Особенно простым получается решение в случае систем с одним лишним бруском. Возьмем, например, двухпролетную неразрезную ферму простейшего типа (терт. 352). Предположим что подвижная

нагрузка передается нижним узлам и построим линию влияния для средней опорной реакции, которую примем за *линию неизвестную*. За I-е состояние примем тот случай (фиг. а), когда на систему действует груз единица в нижнем узле m и средняя опорная реакция X . Во II-м состоянии (фиг. б) средняя опора и внешняя нагрузка устранены. В узле C приложена сила единица, направленная вертикально вниз. Для II-го состояния находим вертикальные прогибы δ_m нижних узлов и прогиб δ_c опорного узла C . Вопрос этот проще всего решается построением линии прогиба, как веревочного многоугольника для фиктивных грузов, определяемых по ф-ам (d) и (e) (§ 46). Если мы ищем приближенное решение задачи, то при этом можно пренебречь деформацией решетки и принять в расчет лишь деформацию поясов. В таком случае в ф-лах (d) и (e) придется сохранить в числителе лишь первый член и фиктивные грузы представляются так:

$$P_m = \frac{M_m l_m}{r_m^2 \cdot EF_m}; \quad P_k = \frac{M_k l_k}{r_k^2 \cdot EF_k}$$

здесь M_m и M_k — изгибающие моменты для простой балки AB , вызываемые в сечениях m и k грузом единица, приложенным в C . l_m и l_k — длины элементов поясов, F_m и F_k соответствующие площади поперечных сечений, r_m и r_k — расстояния, указанные на фигуре (б). Построив веревочную кривую для фиктивных грузов P_m и P_k и найдя таким образом прогибы δ_m узлов нижнего пояса (фиг. в), мы тем самым получаем линию влияния для искомой средней опорной реакции. В самом деле, применяя теорему о взаимности перемещений в I-му и II-му состояниям, мы приходим к такому ур-ию ¹⁾

$$1 \cdot \delta_m - X \delta_c = 0,$$

Откуда

$$X = 1 \cdot \frac{\delta_m}{\delta_c}$$

Следовательно, ординаты линии прогиба пропорциональны ординатам искомой линии влияния для средней опорной реакции. Для перехода к числам нужно только ввести множитель $\frac{1}{\delta_c}$ ²⁾.

¹⁾ Мы предполагаем опоры не оседающими.

²⁾ Заметим, что в выражение для X входит отношение прогибов $\delta_m : \delta_c$ и потому мы при построении прогибов можем вместо грузов P_m принять всл-вным им пропорциональные.

Построив линию влияния для лишней неизвестной X , мы теперь легко можем начертить линии влияния и для других величин.

Возьмем, например, левую опорную реакцию A . Рассматривая нашу систему как ферму, опертую по концам в A и B (фиг. а), мы найдем искомую опорную реакцию как разность реакций, вызываемых силой единица, приложенной в узле m , и силой X — в опорном узле C . Соответственно этому ординаты искомой линии влияния получатся как разности ординат линии влияния для A , как для реакции балки, опертой в A и B , и ординат линии влияния для X , уменьшенных в отношении $\frac{l_2}{l_1 + l_2}$. Вид искомой площади влияния указан штриховкой на фигуре (d). Здесь для упрощения построения линия acb нанесена без изменения ординат. Прямая bd проведена через вершину c , так как при расположении груза единица в узле C , левая реакция A равна нулю. При этом на левой опорной вертикали прямая bd отсекает вместо отрезка единица, как то следовало бы для линии влияния реакции A простой балки AB , некоторый отрезок ad , равный n . Следовательно, для перехода к числам нужно ординаты заштрихованной площади влияния множить на величину $\frac{1}{n}$.

Для построения линии влияния момента в каком-либо узле m , нужно только из ординат соответствующей линии влияния для простой балки AB вычесть ординаты линии влияния для момента, вызываемого в сечении m средней опорной реакцией. Легко видеть, что эти последние ординаты получаются из ординат линии acb умножением их на $x_m \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}$. Общий вид площади влияния указан штриховкой на фигуре (e). Здесь для упрощения построения опять таки ординаты линии acb оставлены без изменения. Прямая bd проведена через вершину c , так как при расположении груза в узле C , момент в m , очевидно, обращается в нуль. При таком построении на левой вертикали получается некоторый отрезок n , вместо отрезка x_m , который мы должны были бы иметь, если бы строили bd , как линию влияния для момента в сечении m простой балки AB . Для перехода к числам мы должны, следовательно, ординаты площади влияния, заштрихованной на фигуре (e), множить на величину $\frac{x_m}{n}$. Построенной линией влияния момента можно воспользоваться для определения усилий в стержне верхнего пояса, противоположащем рассматриваемому узлу m : Усилия эти будут по-

лучаться умножением величины момента на $-\frac{1}{r_m}$. Подобным же образом могут быть построены линии влияния для усилий в стержнях нижнего пояса нашей фермы.

Чтобы построить линию влияния для усилия S в раскосе (фиг. а), примем во внимание, что ординаты этой линии влияния получатся как разности ординат линии влияния для усилия в раскосе балочной фермы, опертой в A и B и линии влияния для усилия, вызываемого в том же раскосе реакцией X . Вид соответствующей площади влияния представлен на фигуре (f). Здесь для упрощения построения линия acb оставлена без изменения и прямая bd проведена через точку c . В таком случае на левой опорной вертикали вместо отрезка (фиг. а), мы получим отрезок h и для перехода к числам нужно будет, следовательно, ординаты заштрихованной моментной площади множить на величину

$$\frac{a}{h_m} \cdot \frac{1}{n}$$

Если подвижная нагрузка передается верхним узлам фермы, то при построении линии влияния для средней опорной реакции придется начертить линию прогиба для узлов верхнего пояса при помощи фиктивных грузов P_k, P_m и, кроме того, определить прогиб δ_c опорного шарнира C . Точка c , соответствующая прогибу δ_c не будет теперь лежать на линии прогибов (фиг. б). Но при построении рассмотренных выше линий влияния придется проводить, как и раньше, прямую bd через точку c .

Вопрос о напряжениях, возникающих в рассматриваемой ферме, вследствие изменения температуры стержней и вследствие неточности в расположении опор может быть разрешен способом Максвелла-Мора. Эти напряжения совершенно не зависят от подвижной нагрузки.

Когда приходится иметь дело с системами, имеющими несколько лишних брусков, то, применяя теорему о взаимности перемещений, мы получим систему ур-ий аналогичных системам (e) предыдущего параграфа. При построении линий влияния нам придется вместо грузов P_m иметь дело лишь с одним грузом, равным единице, и потому суммы $\sum P_m \delta_{mx}, \sum P_m \delta_{my}, \dots$ заменятся членами $1 \cdot \delta_{mx}, 1 \cdot \delta_{my}, \dots$. Решая эту систему

линейных ур-ий, мы представим лишь неизвестные в таком виде:

$$X = \alpha_1 \delta_{mx} + \alpha_2 \delta_{my} + \dots$$

$$Y = \beta_1 \delta_{mx} + \beta_2 \delta_{my} + \dots$$

Следовательно, линии влияния для линейных неизвестных мы получим, комбинируя линии прогибов для состояний $X=1$, $Y=1$, . . . так как из этих линий прогибов сейчас же находятся величины δ_{mx} , δ_{my} , . . . для любого узла m системы. Что же касается коэффициентов α , β , . . ., то они, как легко видеть, совершенно не зависят от расположения нагрузки.

В качестве примера рассмотрим случай неразрезной трехпролетной фермы (черт. 354). Здесь мы имеем два линейных бруска. За линейные неизвестные примем крайние опорные реакции. Устраняя их, приходим к *главной системе*, консольной ферме простейшего типа опертой в A и B . Применяя теорему о взаимности перемещений, мы будем сравнивать действительное состояние системы, представленное на фигуре (а), с каждым из фиктивных состояний, представленных на фигурах (b) и (d). Для каждого фиктивного состояния строим по известным правилам многоугольник прогиба для нижних узлов фермы, на которые передается нагрузка. Из соответствующих чертежей, фиг. (с) и фиг. (е) получаем нужные нам величины δ_{xx} , δ_{mx} , δ_{yy} , δ_{my} , δ_{yx} и δ_{xy} . Тогда по теореме о взаимности перемещений получаем такие два ур-ия для определения линейных неизвестных¹⁾.

$$X \cdot \delta_{xx} + Y \cdot \delta_{yx} = 1 \cdot \delta_{mx}$$

$$X \cdot \delta_{xy} + Y \cdot \delta_{yy} = 1 \cdot \delta_{my}$$

Откуда находим

$$X = \alpha_1 \delta_{mx} + \alpha_2 \delta_{my}; \quad Y = \beta_1 \delta_{mx} + \beta_2 \delta_{my};$$

где α_1 , α_2 , β_1 и β_2 известные числа, не зависящие от положения подвижной нагрузки. Имея эти числа и пользуясь ординатами δ_{mx} и δ_{my} кривых прогибов (фиг. с и фиг. е), мы простым пе-

¹⁾ Мы предполагаем опоры неоседающими и потому работа сил фиктивного состояния на перемещениях действительного состояния обращается в нуль.

решением находим ординаты линий влияния для лишних неизвестных X и Y . Вид линии влияния для левой опорной реакции представлен на фигуре (f). При помощи этой линии легко строим линии влияния для всех брусьев левого пролета фермы.

Чтобы построить линию влияния для изгибающего момента, соответствующего узлу m , примем во внимание, что пока груз единица располагается справа от этого узла, искомый момент получается умножением левой опорной реакции X на x_m . Мы можем, следовательно, пользоваться кривой, представленной на фигуре (f), умножая ординаты этой кривой на x_m . При расположении груза слева от m придется из момента левой реакции вычитать момент груза единица. Следовательно, искомый изгибающий момент получится умножением на x_m ординат, заключенных между пунктирной линией ef и кривой левой опорной реакции. Имея линию влияния для момента в узле m , мы сейчас же можем построить линию влияния для усилия в противоположащем стержне верхнего пояса.

При построении линии влияния для перерезывающей силы в какой-либо панели левого пролета, заметим, что перерезывающая сила, при расположении груза справа от рассматриваемой панели, равна левой реакции. При расположении груза единица слева от той же панели нужно для получения перерезывающей силы из левой реакции вычесть груз, равный единице. Линия влияния для перерезывающей силы, соответствующей сечению pq , представлена на фигуре (g).

Чтобы получить линию влияния для усилия S в раскосе, применим способ Риттера. Проводя сечение pq (фиг. а), заключаем, что пока груз единица находится справа от узла m , искомое усилие S получается умножением левой реакции на коэффициент $\frac{a}{h}$, где a —расстояние точки O пересечения соответствующих стержней поясов от левой опоры и h —расстояние O от оси рассматриваемого раскоса. На фигуре (h) для упрощения кривая $eabd$ оставлена без изменения, следовательно при расчетах должен быть введен множитель $\frac{a}{h}$. При расположении груза слева от разрезанной панели усилие S , определяемое способом Риттера, получится путем алгебраического суммирования усилия, вызываемого левой реакцией и усилия, соответствующего грузу единица. На фигуре (h) соответствующие ординаты заключены между

кривой левой опорной реакции и прямой oef , идущей через точку o . Эти ординаты также должны помножаться на отношение $\frac{a}{h}$.

Обратимся теперь к среднему пролету нашей фермы. При построении относящихся к этому пролету линий влияния полезно начертить предварительно линии влияния для опорных моментов, соответствующих узлам A и B . При расположении груза единицы справа от опоры A момент M_A получится умножением левой опорной реакции X на длину l_1 . Ординаты нужной нам линии влияния получатся умножением на l_1 ординат линии влияния для X . С переходом груза единицы на левую сторону от опоры A придется при составлении M_A из момента левой реакции вычитать момент груза единицы. На фигуре (к) это вычитание осуществлено проведением прямой ae . Так как для упрощения построения фигуры (к), кривая для реакции X оставлена без изменения, то при переходе к вычислениям нужно ординаты заштрихованной моментной площади множить на длину l_1 . Подобным же образом может быть построена и линия влияния для опорного момента M_B .

Пользуясь этими кривыми мы сейчас же можем построить линию влияния для перерезывающей силы в любом сечении среднего пролета. В самом деле, перерезывающая сила Q для какого-либо сечения среднего пролета неразрезной балки представляется такой формулой ¹⁾

$$Q = Q_0 + \frac{M_B - M_A}{l_2} \dots \dots \dots (a).$$

Здесь через Q_0 обозначена та перерезывающая сила, которая получается, если рассматривать средний пролет, как самостоятельную балочную ферму, опертую по концам. Суммируя ординаты линии влияния для Q_0 с ординатами, соответствующими второму члену в правой части формулы (а), получаем площадь влияния, представленную на фигуре (l). Так как на среднем пролете наша ферма имеет параллельные пояса, то из полученной площади влияния для Q сейчас же можно найти усилие в соответствующем раскосе фермы.

¹⁾ См. Курс сопротивления материалов. Теорема о трех моментах.

Для получения усилий в поясах стропил предварительно линия влияния для моментов в сечениях, соответствующих узлам среднего пролета. Это построение мы выполним проще всего, если будем последовательно располагать груз единицу в каждом из узлов и вычертим для всех этих положений груза соответствующие эпюры изгибающих моментов. Построение для одного из положений груза представлено на чертеже (355). Пользуясь линиями влияния для M_A и M_B фиг. (б), мы для каждого положения груза сейчас же найдем оборотные моменты, представленные ординатами y_1 и y_2 .

Проведением линии ab мы вычитаем из ординат эпюры моментов ACB , соответствующей простой балке AB , влияние опорных моментов и получаем таким образом заштрихованную на чертеже нужную нам моментную площадь, из которой могут быть найдены ординаты в месте приложения груза для всех линий влияния M . Передвигая последовательно груз единица во все узлы, мы сможем по точкам построить линии влияния для моментов во всех соответствующих сечениях. При помощи этих линий сейчас же могут быть найдены усилия в поясах фермы.

Задачи.

174) Построить линии влияния для стержневой двучленирной арки, представленной на чертеже 356. Здесь мы имеем дело с системой, имеющей один лишний брусок. За лишнюю неизвестную удобнее всего принять распор арки H . Тогда применяя теорему о взаимности перемещений, мы за второе состояние будем брать тот случай, когда внешних сил нет, и вместо распора действуют две равные и прямо противоположные силы единица (фиг. в). Для этого второго состояния найдем перемещения узлов, что можно сделать общим способом Вилли. Но в данном случае, когда приходится строить линии влияния для вертикальных грузов, проще всего получить прогибы верхних узлов фермы, на которые передается подвижная нагрузка, путем построения веревочного многоугольника для фиктивных грузов P_m и P_k . Величины этих грузов определяются общими ф-ами (d) и (e) [§ 46]. В предварительных расчетах, когда приходится определять лишь приближенное значение распора, обыкновенно при разыскании перемещений пренебрегают деформацией решетки и принимают в расчет лишь пояса фермы. В таком случае, ф-лы для фиктивных грузов P_m и P_k представляется в таком простом виде:

$$P_m = - \frac{\delta O_m}{r_m}; \quad P_k = \frac{\delta U_k}{r_k},$$

где через r_m и r_k обозначены расстояния от узлов m и k до противолежащего стержня. Обозначая через y_m и y_k ординаты, соответствующие узлам m и k , мы легко получаем выражения, для удлинений брусков верхнего и нижнего поясов при действии сил $H = -1$

$$\delta O_m = -\frac{1 \cdot y_m}{r_m} \cdot \frac{l_m}{EF_m}; \quad \delta U_k = \frac{1 \cdot y_k}{r_k} \cdot \frac{l_k}{EF_k}.$$

На основании этого получаем

$$P_m = \frac{1 \cdot y_m}{r_m^2} \cdot \frac{l_m}{EF_m}; \quad P_k = \frac{1 \cdot y_k}{r_k^2} \cdot \frac{l_k}{EF_k}.$$

При расчетах, обыкновенно, множат эти фиктивные грузы, имеющие измерение отвлеченного числа, на величину EF_c , где F_c — некоторое среднее значение площади поперечного сечения поясов. Если мы для полученных таким образом фиктивных грузов

$$P'_m = \frac{1 \cdot y_m l_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}; \quad P'_k = \frac{1 \cdot y_k l_k}{r_k^2} \cdot \frac{F_c}{F_k},$$

построим веревочный многоугольник, с полюсным расстоянием EF_c , то получим неискаженную линию прогибов верхнего пояса. Прогибы получатся в том же масштабе, в каком вычерчена ферма. Уменьшая полюсное расстояние в m раз, мы во столько же раз увеличиваем прогибы и, следовательно, можем так подобрать m , чтобы получать прогибы в натуральную величину. При этом построении нам не понадобятся фиктивные грузы для крайних узлов o и n , и прогибы δ_k придется отсчитывать от замыкающей, которая должна быть проведена так, чтобы перемещения на опорах получились равными сжатие соответствующих опорных стоек (фиг. с).

Пренебрегая этими малыми перемещениями, мы можем получать нужные нам прогибы вычислительным путем, составляя изгибающий момент от фиктивных грузов P'_m и P'_k для простой балки AB и деля этот момент на полюсное расстояние EF_c .

Имея линию прогибов верхнего пояса, мы можем теперь определить распор H для любого положения груза единица по ф-ле

$$H = 1 \cdot \frac{\delta_k}{\delta_h},$$

где через δ_h обозначено увеличение расстояния между опорными шарнирами для второго состояния фермы (фиг. б). Для разыскания δ_h можно применить способ, намеченный в § 47, но мы проще получим нужный результат, если примем во внимание, что

$$1 \cdot \delta_h = \Sigma S^2 r.$$

Равенство это может быть написано на основании ф-лы Максвелля [ф-ла (b), § 38] *). Здесь через S' обозначены усилия в брусках для состояния $H = -1$ и через r — растяжимость брусков. Принимая в расчет только деформацию поясов и пользуясь общей ф-ой

$$S' = + \frac{y_m}{r_m},$$

где m принимает все значения от 0 до n , знак — относится к стержням верхнего пояса и + — к стержням нижнего пояса, получаем

$$\delta_h = \frac{1}{EF_c} \sum \left(\frac{y_m^2 l_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} \right).$$

Вычислив таким образом величину δ_h , мы можем теперь из линии прогибов (фиг. с) получить линию влияния для распора H . Нужно только все ординаты линии прогибов помножить на $\frac{1}{\delta_h}$. Имея линию влияния для H , мы легко строим линию влияния для момента M_m в любом узле m . Момент этот представится так:

$$M_m = M_{om} - H \cdot y_m = y_m \left(\frac{M_{om}}{y_m} - H \right).$$

Здесь через M_{om} обозначен соответствующий момент для простой балки, опертой в A и B . Искомая линия влияния для M_m получится, если мы построим линию $\frac{M_{om}}{y_m}$, вычтем из нее ординаты линии H и введем множитель y_m . Соответствующая площадь влияния заштрихована на фигуре (d). При переходе к числам ординаты заштрихованной площади, измеряемые в масштабе, принятом для отвлеченных чисел, нужно будет множить на длину y_m . Имея линии влияния для M_m , легко вычисляем усилия в поясах.

Построим теперь линию влияния для усилия S в каком-либо раскосе (фиг. b). Применяя способ Риттера, находим для этого усилия выражение

$$S = \frac{M_{oi}}{r_i} - \frac{Hy_i}{r_i} = \frac{y_i}{r_i} \left(\frac{r_i}{y_i} S_0 - H \right).$$

Здесь через S_0 обозначено усилие для соответствующего раскоса в простой балочной ферме. Составляя разность ординат линии $\frac{r_i}{y_i} S_0$ и линии H и вводя множитель $\frac{y_i}{r_i}$, получаем ординаты искомой линии влияния. Соответствующая моментная площадь представлена на фи-

*) К тому же результату нас приводит также применение теоремы Клейрона. См. „Курс сопротивления материалов“.

гуре (е). При переходе к числам ординаты заштрихованной площади придется множить на коэффициент $\frac{y_i}{r_i}$. В тех случаях, когда точка пересечения i располагается неудобно, мы можем пойти нужные нам для построения линии влияния числа

$$\frac{x_i}{y_i} \quad \text{и} \quad \frac{y_i}{r_i}$$

путем определения усилий в рассматриваемом раскосе для случаев $A=1$ и $H=-1$. Обозначая соответствующие усилия через

$$(S)_{A=1} \quad \text{и} \quad (S)_{H=-1}$$

и применяя способ Риттера, находим

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{(S)_{A=1}}{(S)_{H=-1}}; \quad \frac{y_i}{r_i} = (S)_{H=1}$$

В тех случаях, когда требуется принять во внимание дополнительные усилия, возникающие от равномерного нагревания системы на t^0 , мы получим соответствующее возрастание распора по ф-ле

$$H_t = \frac{\alpha t l}{\delta_k}$$

где величина $\alpha t l$ представляет увеличение пролета при нагревании в случае свободного расширения фермы и δ_k имеет прежнее значение.

175) *Рассчитать двухшарнирные арочные системы, представленные на чертежах (357), (358) и (359).* За лишнюю неизвестную во всех случаях, выгодно выбрать распор H . Для построения линии влияния H нужно предварительно начертить линию прогиба соответствующего пояса фермы для $H=-1$. В случае предварительных расчетов пренебрегаем деформацией решетки, тогда для серповидной фермы (черт. 357) фиктивные грузы найдутся во таких же ф-ам, как и в предыдущей задаче. Исключение составляют нижние узлы, ближайшие к опорным шарнирам. Чтобы составить, например, выражение для фиктивного груза P_2 , соответствующего шарниру 2, мы пользуемся общей ф-лой (д) [§ 46]. Вставляя в эту ф-лу вместо удлинения диагонали, расположенной слева от рассматриваемого узла, удлинение соответствующего элемента нижнего пояса и пренебрегая удлинением другой диагонали, получим на основании обозначений, указанных на фигуре (b),

$$P_2 = \frac{1}{y_1 - y_2} \left(\frac{y_2 \cdot l_2}{r_2 \cos \beta_2} \cdot EF_2 + \frac{y_1}{r_1 \cos \alpha_1} \cdot \frac{l_1}{EF_1} \right),$$

откуда

$$EF_c P_2 = \frac{y_1 l_1}{r_1^2} \cdot \frac{F_c}{F_1} + \frac{y_2 l_2}{r_2^2} \cdot \frac{F_c}{F_2}$$

Если принять сечения верхнего и нижнего поясов постоянными во длине, то возможно дальнейшее упрощение в выражениях для фиктивных грузов.

В случае арочной фермы с вертикальными стойками (черт. 358) мы, пренебрегая деформацией решетки, получим для верхнего и нижнего поясов одинаковые кривые прогибов для нагрузки $H = 1$. Для фиктивного груза P_m пользуемся общей ф-ой (f) [§ 46], которая в данном случае представится так:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left(-\frac{z_0 m}{\cos^2 \beta_m} + \frac{z_0 m+1}{\cos^2 \beta_{m+1}} \right) = \frac{1}{h_m^2} \left(\frac{y_{0m} l_m}{EF_{0m} \cos^2 \beta_m} + \frac{y_{0m} l_{m+1}}{EF_{0m+1} \cos^2 \beta_{m+1}} \right).$$

Здесь через y_{0m} и y_{0m} обозначены ординаты верхнего и нижнего узлов, соответствующих грузу P_m . Для среднего нижнего узла фермы выражение для фиктивного груза, на основании ф-лы (h) [§ 46], напишется так:

$$P_m = \frac{y_{0m}}{h_m} \left(\frac{l_m}{EF_{0m} \cos^2 \beta_m} + \frac{l_{m+1}}{EF_{0m+1} \cos^2 \beta_{m+1}} \right).$$

В случае равенства панелей и постоянств площадей поперечных сечений поясов возможны дальнейшие упрощения выражений для фиктивных грузов.

В случае арочной фермы приблизительно постоянной высоты h , можно в общей формуле

$$P_m = \frac{y_m l_m}{r_m^2 EF_m}$$

положить $r_m = h$ и $F_m = F_c$, тогда

$$EF_c P_m = \frac{y_m l_m}{h^2}$$

176) Найти ординаты линии влияния для H в случае фермы, представленной на чертеже 360. Считая поперечные сечения поясов постоянными и пренебрегая углами наклона стержней нижнего пояса к горизонту, мы на основании ф-лы, полученной для чертежа (358), будем иметь

$$P'_m = \frac{EF_c \cdot P_m}{\lambda} = \frac{y_{0m} + y_m}{h_m^2}.$$

Пользуясь размерами, указанными на чертеже, получим:

$$P'_1 = \frac{3,0 + 0,9}{2,1^2} = 0,88; \quad P'_2 = \frac{3,0 + 1,6}{1,4^2} = 2,55; \quad P'_3 = \frac{3,0 + 2,1}{0,9^2} = 6,3;$$

$$P'_4 = \frac{3,0 + 2,4}{0,6^2} = 15,0; \quad P'_5 = \frac{2 \cdot 2,5}{0,5^2} = 20,0.$$

Изгибающие моменты, вызываемые в балке AB фиктивными грузами P'_1, P'_2, \dots будут иметь для узловых сечений значения:

$$M_1 = 69,06 \text{ tn}, \quad M_2 = 136,36 \text{ tn}, \quad M_3 = 198,96 \text{ tn}, \quad M_4 = 248,96 \text{ tn}, \\ M_5 = 268,96 \text{ tn}.$$

Для получения прогибов в метрах, нужно найденные изгибающие моменты разделить на величину $\frac{EF \cdot tn}{\lambda}$.

Чтобы получить ординаты H линии, нужно найденные таким образом прогибы разделить на величину δ_h , определяемую по ф-ле

$$\delta_h = \frac{1}{EF_c} \sum \frac{y_m^2 l_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$$

Для рассматриваемого случая

$$\frac{\delta_h \cdot EF_c}{\lambda} = \sum \frac{y_m^2}{r_m^2} = \infty 2 \left[\frac{3,0^2 + 0,9^2}{2,1^2} + \frac{3,0^2 + 1,6^2}{1,4^2} + \frac{3,0^2 + 2,1^2}{0,9^2} + \frac{3,0^2 + 2,4^2}{0,6^2} \right] + \frac{2 \cdot 2,5^2}{0,5^2} = 183,4 \text{ tn.}$$

Деля на это число найденные выше значения изгибающих моментов от фиктивных грузов, получим такие ординаты для H линии:

$$H_1 = 0,38; \quad H_2 = 0,74; \quad H_3 = 1,09; \quad H_4 = 1,36; \quad H_5 = 1,47.$$

177) Построить линии влияния для стержневой арки с затяжкой (черт. 361). За лишнюю неизвестную примем усилие H в затяжке AB . В таком случае, принимая за II-ое состояние то, которое представлено на фигуре (б), и пользуясь теоремой о взаимности перемещений, получаем:

$$1 \cdot \delta_m - H \delta_h = 1 \cdot \frac{Hl}{EF},$$

откуда

$$H = \frac{1 \cdot \delta_m}{\delta_h + \frac{l}{EF}}.$$

Здесь величины δ_m и δ_h находятся так, как это было разъяснено в предыдущих задачах *). Через F обозначена площадь сечения затяжки. Температурных напряжений в этой ферме при равномерном нагревании всех стержней не получится, но если температура затяжки отличается от температуры прочих частей на t^0 , то при этом возникает распор, определяемый ф-ой

$$H_t = \mp \frac{\alpha l t}{\delta_h}.$$

178) Построить H линию для арки, усиленной жесткой балкой (черт. 362). За лишнюю неизвестную принимаем горизонтальную проекцию H усилий в элементах шарнирной арки. Если из полюса O провести лучи, параллельные звеньям арки, то на вертикали, отстоящей на расстоянии K от O , эти лучи отсекут отрезки, равные усилиям

*) Удлиненным подвесок мы при этом пренебрегаем.

в подвесках. Длины лучей представят усилия в соответствующих элементах шарнирной арки. Таким образом, все силы, действующие на подкрепляющую балочную ферму, будут известны. Для построения линии влияния H воспользуемся теоремой о взаимности перемещений. За второе состояние примем то, когда $H = -1$, и для этого второго состояния построим линию прогибов как веревочный многоугольник для фиктивных грузов P_m и P_k . Пренебрегая деформацией решетки и применяя для определений усилий в поясах способ Риттера, найдем для фиктивных грузов такие выражения:

$$P_m = \frac{y_m \lambda}{h^2 E F_0}; \quad P_k = \frac{y_k \lambda}{h^2 E F_u}$$

Здесь сечения верхнего и нижнего поясов приняты постоянными и соответственно равными F_0 и F_u . Для удобства вычисления мы помножим полученные выше значения фиктивных грузов на постоянную величину

$$\frac{E F_0 h^2}{\lambda}$$

и будем пользоваться фиктивными грузами

$$P'_m = \frac{E F_0 h^2}{\lambda} P_m = y_m; \quad P'_k = \frac{E F_0 h^2}{\lambda} P_k = y_k \frac{F_0}{F_u}$$

В дальнейших вычислениях примем для нашего численного примера $\frac{F_0}{F_u} = 0,37$. Кроме того, фиктивные грузы верхних узлов распределим между соседними нижними узлами. В таком случае для тех значений ординат, которые указаны на чертеже, мы легко находим, что, например, фиктивный груз P_4 определится ф-ой

$$P_4 = y_4 + \frac{1}{2} 0,37 (y_3 + y_5) = 4,18 \text{ tn. mt.}$$

Подобным образом находятся фиктивные грузы и для других узлов. Мы получим

$$P_2 = 2,14; \quad P_4 = 4,18; \quad P_6 = 5,80; \quad P_8 = 6,95; \quad P_{10} = 7,64; \quad P_{12} = 7,88.$$

Соответствующие этим грузам изгибающие моменты в узлах балки AB будут иметь значения

$$M_2 = 3,125 \cdot 30,7; \quad M_4 = 3,125 \cdot 59,2; \quad M_6 = 3,125 \cdot 83,5; \quad M_8 = 3,125 \cdot 102,0; \\ M_{10} = 3,125 \cdot 113,6; \quad M_{12} = 3,125 \cdot 117,5.$$

Деля эти моменты на величину $\frac{E F_0 h^2}{\lambda}$, мы будем получать в метрах прогибы соответствующих узлов. Для получения ординат H линии нужно прогибы фермы разделить на величину δ_h , представляющую сближение шарниров C и D в случае $H = -1$. При вычислении δ_h будем пользоваться общей ф-ой

$$\delta_h = \Sigma \frac{S^2 l}{E F},$$

при чем суммирование распространим лишь на стержни поясов балочной фермы и на элементы арки. Деформацией подвесок и решетки фермы будем пренебрегать. В таком случае

$$\frac{EF_0 h^2}{\lambda} \cdot \delta_h = \Sigma y_m^2 + 0,37 \Sigma y_k^2 + \frac{l_b \cdot h^2}{\lambda} \cdot \frac{F'_0}{F_b} \dots (a)$$

Первый и второй члены в правой части равенства соответствуют верхнему и нижнему поясу фермы. Третий член относится к стержням арки. В нем через F_b обозначено постоянное сечение этих стержней и через l_b — длина CD . При составлении третьего члена мы пренебрегли наклоном стержней арки. Усилия S' для всех этих стержней приняли равными единице и длину равной λ . Вставляя в выражение (a) размеры, указанные на чертеже и полагая $F'_0 : F_b = 0,40$ получим $\frac{EF_0}{\lambda} \delta_h = 2 \cdot (1,87^2 + 3,40^2 + 4,59^2 + 5,44^2 + 5,95^2) + 6,12^2 + 0,37 \cdot 2(1,44^2 + 2,80^2 + 3,82^2 + 4,50^2 + 4,84^2) + \frac{33,5 \cdot 1,2^2}{3,125} \cdot 0,40 \approx 296 \text{ tn} \cdot \text{m}^2$.

Деля на эту величину найденные выше значения изгибающих моментов от фиктивной нагрузки, получим такие значения ординат H линии

$$H_2 = \frac{3,125 \cdot 30,7}{296} = 0,32; \quad H_4 = 0,62; \quad H_6 = 0,88; \quad H_8 = 1,08; \\ H_{10} = 1,20; \quad H_{12} = 1,24.$$

179) Построить H линии для систем, представленных на чертеже (363).

Для предварительного расчета можно пренебречь деформацией решетки фермы и подвесок. Вертикальные прогибы узлов для случая $H = -1$ проще всего получить путем построения линии прогиба, как веревочного многоугольника. При этом фиктивные грузы получатся пропорциональными ординатам y_m и y_k .

180) Построить линии влияния для элементов фермы, составленной из цепи, усиленной жесткой балкой (черт. 364). При сооружении подобных систем обыкновенно производят сцепку подкрепляющей жесткой фермы только тогда, когда вес частей этой фермы уже передается на цепь моста. Поэтому при расчете фермы придется считаться лишь с усилиями, вызываемыми подвижной нагрузкой и с температурными напряжениями. Расчет на подвижную нагрузку удобнее всего начать с построения линии влияния для горизонтальной составляющей H усилий в звеньях цепи. За второе состояние выбираем случай $H = -1$. Усилия в стержнях для этого состояния могут быть легко найдены графическим путем. Можно легко составить и соответствующие аналитические выражения: усилие в каком-либо звене цепи, наклоненном к горизонту под углом α_k будет, очевидно, равняться

$$\frac{H}{\cos \alpha_k}$$

Для усилия в подвеске легко составим выражение

$$H(\operatorname{tg} \alpha_k - \operatorname{tg} \alpha_{k+1}).$$

При составлении усилий в поясах подкрепляющей фермы заметим, что изгибающие моменты для узлов m и k , представляются ф-ами ¹⁾.

$$M_m = M_{om} - Hy_m = y_m \left(\frac{M_{om}}{y_m} - H \right);$$

$$M_k = M_{ok} - Hy_k = y_k \left(\frac{M_{ok}}{y_k} - H \right), \dots \dots \dots (a)$$

где M_{om} и M_{ok} — соответствующие значения момента для простой балки AB . Пользуясь сечениями pq и rs , находим, что для состояния $H = -1$ усилия в элементах нижнего и верхнего поясов будут представляться так:

$$S_u = + \frac{1 \cdot y_k}{h}; \quad S_o = - \frac{1 \cdot y_m}{h}.$$

Соответственно для фактивных грузов получим выражения

$$P_m = \frac{y_m \lambda}{h^2 EF_m}; \quad P_k = \frac{y_k \lambda}{h^2 EF_k}.$$

Составляя изгибающие моменты от этих грузов для простой балки AB найдем нужную нам линию прогибов для состояния $H = -1$. Орднаты искомой H линии найдутся делением найденных прогибов на величину δ_h , представляющую сближение опорных точек K и s во втором состоянии, когда предполагается, что эти точки свободно могут перемещаться по горизонтальному направлению. При вычислении δ_h мы воспользуемся общей ф-ой

$$\delta_h = \Sigma S'^2 r,$$

где S' обозначает усилия в стержнях для состояния $H = -1$ и r характеризует растяжимость стержней. Применяя эту ф-лу к нашему случаю и пренебрегая деформацией подвесок и решетки фермы, получим

$$\delta_h = \Sigma \frac{y_m^2}{h^2} \frac{\lambda}{EF_m} + \Sigma \frac{y_k^2 \lambda}{h^2 EF_k} + \frac{1}{F_b} \left(\Sigma \frac{\lambda}{\cos^2 \alpha_r} + \frac{l}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{l_2}{\cos \alpha_2} \right).$$

Третий член этого выражения соответствует удлинению звеньев цепи CD и удерживающих цепей длины l_1 и l_2 (фиг. а). Через F_b обо-

¹⁾ Соответствующие сечения pq и rs проведены через узлы m и k . Внешними силами для левой отсеченной части подкрепляющей фермы будут: 1) вертикальная сила, действующая по AC и равная реакции простой балки; 2) горизонтальная сила H , приложенная в C и 3) усилие в разрезанном звене цепи.

значена площадь поперечного сечения цепи. Когда линия прогибов построена и величина δ_k вычислена, мы сейчас же можем начертить H линию. После чего можно построить линии влияния для моментов M_m и M_k [фиг. (b) и (c)]. На основании ф-л (a) заключаем, что для этого нужно из ординат линии $\frac{M_{om}}{u_m}$ и $\frac{M_{ok}}{y_k}$ вычесть ординаты H линии.

При переходе к числам нужно будет ординаты полученной таким образом площади влияния, заштрихованной на фигурах (b) и (c), множить на величины y_m и y_k . Имея линию влияния для моментов сейчас же можно получить усилия от подвижной нагрузки в соответствующих стержнях поясов.

Чтобы построить линию влияния для поперечной силы в сечении pq воспользуемся ф-ой

$$Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha (Q_0 \operatorname{ctg} \alpha - H),$$

где Q_0 — перерезывающая сила для простой балки и α — угол наклона перерезанного звена цепи. Соответствующая моментная площадь заштрихована на фигуре (d). При переходе к числам ординаты должны быть умножены на $\operatorname{tg} \alpha$. Построенной линией можно воспользоваться для получения усилий в соответствующих раскосах. Намеченный здесь ход расчета применим также в случае шарнирной арки, усиленной сверху жесткой балкой (черт. 365).

181). Построить линии влияния для стержней трехшарнирного моста, представленного на чертеже 366. Так как все опоры предполагаются подвижными и могут свободно перемещаться по горизонтальному направлению, то горизонтальная проекция H усилий в элементах S_1, \dots, S_6 при вертикальной нагрузке остается постоянной. Ее мы примем за лишнюю неизвестную и построим для нее линию влияния, применяя теорему о взаимности перемещений и выбрав за второе состояние тот случай, когда внешней нагрузки нет и $H = -1$.

Построив для этого состояния линии прогибов и разделив величины прогибов δ_m на величину δ_h , определяемую ф-ой

$$\delta_h = \sum S'^2 r,$$

получим ординаты искомой H линии. Фиктивные грузы, нужные для построения линии прогибов определяются для каждого из пролетов такими ф-ами

$$P_m = \frac{y_m \cdot l_m}{r_m^2 EF_m}; \quad P_k = \frac{y_k \cdot l_k}{r_k^2 EF_k}.$$

Имея линию влияния для H , мы можем построить линию влияния для изгибающих моментов M_m и M_k , которыми определяются усилия в поясах. При этом воспользуемся ф-ами

$$M_m = M_{om} - H y_m; \quad M_k = M_{ok} - H y_k$$

При построении линии влияния для усилия S в каком-либо раскосе, воспользуемся ф-ой

$$S = S_0 + \frac{H \cdot y_i}{r_i}$$

где S_0 — усилие в том же раскосе для простой балочной фермы.

182) Построить линию влияния для стержней трехпролетного консольно-арочного моста (черт. 367). За лишнюю неизвестную принимаем распор H . На протяжении среднего пролета линия влияния для H начертится так же, как и в случае двухшарнирной арки. Консолям арки будут соответствовать прямолинейные участки линии влияния, так как для состояния $H = -1$ усилия в элементах консолей равны нулю, консоли не деформируются. Эти прямолинейные участки являются продолжениями крайних сторон линии H (фиг. б)¹⁾, построенной для среднего пролета. Участки линии влияния для H на протяжении соединительных балочек будут также прямолинейны. Линия влияния для момента M_m в каком-либо узле m может быть построена на основании ф-лы

$$M_m = M_{om} - H y_m = (y_m \frac{M_{om}}{y_m} - H).$$

Соответствующая площадь влияния заштрихована на фигуре (б). Ординаты этой площади нужно множить на величину y_m .

183) Построить линию влияния для усилия в одной из диагоналей средней панели фермы, представленной на чертеже (368). За лишнюю неизвестную примем искомое усилие S в одной из средних диагоналей и применим теорему о взаимности перемещений. Соответствующее второе состояние системы представлено на фигуре (б). Обозначая для этого состояния через δ_m прогибы узлов нижнего пояса фермы, на который передается подвижная нагрузка, и через δ_h сближение точек приложения сил единица, получим ур-ие

$$1 \cdot \delta_m + S \cdot \delta_h = -1 \cdot S r$$

где r определяет растяжимость диагонали. Для искомого усилия получаем выражение

$$S = -\frac{1 \cdot \delta_m}{\delta_h + r}$$

Усилия S пропорциональны δ_m , и мы получим очертание искомой линии влияния, если представим себе деформированное состояние фермы для второго состояния. Вид деформации (фиг. с) получается легко, так как искажается лишь средний прямоугольник $abcd$.

Линия $acdb$, соответствующая прогибу нижнего пояса, определяет собой линию влияния для S при передаче нагрузки на нижние узлы

¹⁾ При построении многоугольника прогибов, как веревочного многоугольника, крайними фиктивными грузами будут грузы, линии действия которых совпадают с опорными стойками A и B .

фермы. Прогиб верхнего пояса отличается от прогиба нижнего, благодаря сжатию стоек в средней панели. Соответствующее очертание линии прогиба верхнего пояса представлено на фигуре (с) линией a_1, c_1, d_1, b_1 . Для получения значений прогиба δ_m проще всего построить линию прогиба соответствующего пояса фермы, как веревочный многоугольник для фиктивных грузов. Для нижнего пояса найдем на основании ф-л (f) и (h) [§ 46]

$$P_2 = \frac{1}{h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} + \frac{\delta c \cdot h}{\lambda} \right); \quad P_3 = \frac{1}{h} \left(-\delta b + \frac{\delta e}{\cos \varphi} - \frac{\delta a \cdot h}{\lambda} \right);$$

$$P_1 = P_4 = 0.$$

Соответствующая линия прогиба представлена на фигуре (d). Для верхнего пояса, на основании ф-л (l) и (n) [§ 46], получаем

$$P_{1'} = \frac{\delta a}{\lambda}; \quad P_{2'} = \frac{1}{h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} - \frac{\delta a h}{\lambda} + \frac{\delta c h}{\lambda} \right);$$

$$P_{3'} = \frac{1}{h} \left(-\delta b + \frac{\delta e}{\cos \varphi} - \frac{2\delta c h}{\lambda} \right); \quad P_{4'} = \frac{\delta c}{\lambda}.$$

Линия прогиба представлена на фигуре (e).

Чтобы получить ординаты линии влияния для S , нужно найденные нами прогибы разделить на $\delta_h + r$, где δ_h может быть определена по прежней ф-ле

$$\delta_h = \Sigma S_i^2 r.$$

Легко убедиться*), что ординаты получаемой таким образом линии влияния, в случае передачи нагрузки на нижние узлы, вдвое меньше ординат той линии влияния, которая получается для S при отсутствии перекрестной диагонали. В самом деле, прогиб δ_2 , соответствующий узлу 2 и определяемый как изгибающий момент от фиктивных грузов P_2 и P_3 для балки ab будет равен

$$\delta_2 = -\frac{2\lambda}{\delta h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} + \frac{\delta c h}{\lambda} \right).$$

Следовательно, прямая ac (фиг. d) будет отсекает на правой опорной вертикали отрезок

$$-\frac{\lambda}{h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} + \frac{\delta c h}{\lambda} \right).$$

Деля это на величину

$$\delta_h + r = \frac{\lambda}{l} \left(-2 \frac{\delta c h}{\lambda} - 2\delta b + \frac{2\delta e \cdot l}{\lambda} \right),$$

получим

$$\frac{1}{2 \sin \varphi},$$

*) Мы предполагаем одинаковыми сечения поясов b и d , а также сечения стоек a и c .

т. е. половину того, что получается при отсутствии перекрестной диагонали.

Когда приходится рассчитывать систему с большим числом перекрестных диагоналей (черт. 369), мы, для предварительного подбора сечений, произведем расчет в предположении существования сначала одной, а потом другой системы раскосов. Взяв полусумму получающихся при этих расчетах усилий, мы по ней подберем сечения. Полученную таким образом ферму рассчитываем теперь как систему с лишними брусками. За лишние примем усилия X, Y, Z, \dots в диагоналях одного направления (фиг. а). Величины этих усилий найдем способом Максвелла-Мора. Общая ф-ла для усилия в каком-либо стержне

$$S = S_0 + S'X + S''Y + S'''Z + \dots$$

в данном случае значительно упрощается, так как усилие в какой-либо диагонали вызывает напряжения лишь в стержнях соответствующей панели (фиг. б, фиг. с). Поэтому, в ур—ия для определения X, Y, Z будут входить не более как, по три неизвестных.

Если мы будем сравнивать действительное состояние системы (фиг. а) с состоянием $X=1$ (фиг. б), то нам придется иметь дело с удлинениями брусков первой панели. Удлинения эти, вообще говоря, будут зависеть от сил Y и Z . Поэтому, соответствующее ур—ие напишется так:

$$\Sigma S''(S_0 + S'X + S''Y)r + 1 \cdot Xr_1 = 0.$$

Удлинения брусков второй панели зависят, вообще говоря, от X, Y и Z . поэтому ур—ие, получающееся при сравнении действительного состояния с состоянием $Y=1$ (фиг. с), будет заключать три неизвестных и напишется так:

$$\Sigma S'''(S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r + 1 \cdot Yr_2 = 0.$$

По три неизвестных будут заключать и все прочие ур—ия, кроме последнего, в которое войдут усилия в лишних диагоналях только двух последних панелей. Таким образом, расчет системы сводится к решению системы пяти ур—ий:

$$\Sigma S'S_0r + (\Sigma S''^2r + r_1)X + \Sigma S'S''rY = 0.$$

$$\Sigma S''S_0r + \Sigma S'S''rX + (\Sigma S'''^2r + r_2)Y + \Sigma S''S'''rZ = 0.$$

.....

из которых первое и последнее заключают по две неизвестных и остальные—по три неизвестных. Решение этих ур—ий проще всего получить путем последовательных приближений. Мы воспользуемся тем обстоятельством, что члены, имеющие своими коэффициентами суммы вида $\Sigma S'S''r, \Sigma S''S'''r$, имеют сравнительно малое значение, и заменим в них лишние неизвестные X, Y, Z, \dots теми приближенными значениями S_1, S_2, S_3, \dots этих усилий, которыми мы пользовались при

предварительном подборе сечений. Тогда для получения следующего приближения мы получим уравнения:

$$\begin{aligned} \Sigma S_0 r + \Sigma (S''^2 r + r_1) X + \Sigma S' S'' r S_2 &= 0 \\ \Sigma S'' S_0 r + \Sigma S' S'' r S_1 + (\Sigma S''^2 r + r_2) Y + \Sigma S' S'' r S_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

каждое из которых заключает лишь одну неизвестную. Найдя отсюда приближенные значения неизвестных, мы можем тем же путем, вычислить следующее приближение и т. д.

§ 52. Упрощения, получаемые путем надлежащего выбора лишних неизвестных.

Расчет статически неопределимых систем сводится, как мы видели, в решении системы линейных уравнений, число которых соответствует числу лишних неизвестных. Это решение не встречает, конечно, каких-либо принципиальных затруднений, но для практических приложений обыкновенно является выгодным так преобразовать эту систему, чтобы в каждое уравнение входила лишь одна лишняя неизвестная. Таким путем не только упрощается решение уравнений, но также устраняется то накопление погрешностей, которое связано с последовательным исключением неизвестных при решении системы уравнений. Положим, что мы рассчитываем систему с лишними опорными реакциями и опоры устроены при этом так, что допускают перемещения лишь в направлении перпендикулярном реакциям. Применяя теорему о взаимности перемещений, мы получим в этом случае такую систему уравнений для определения лишних неизвестных

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_m \delta_{mx} + X \delta_{xx} + Y \delta_{yx} + Z \delta_{zx} + \dots &= 0 \\ \Sigma P_m \delta_{my} + X \delta_{xy} + Y \delta_{yy} + Z \delta_{zy} + \dots &= 0 \\ \Sigma P_m \delta_{mz} + X \delta_{xz} + Y \delta_{yz} + Z \delta_{zz} + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (a)$$

Буквой δ мы обозначаем перемещения узлов системы, соответствующие фиктивным состояниям $X = 1; Y = 1, \dots$. При этом первый значек у буквы δ обозначает, какой силе перемещение соответствует, а второй значек указывает, какого типа сила это перемещение вызвала. И силы, и соответствующие им перемещения мы, как и раньше, понимаем в обобщенном смысле. Иногда это будут отдельные силы, иногда пары сил или другие какие-либо группы

сил. Оказывается, что мы всегда можем выбрать лишние неизвестные таким образом, что в уравнениях (а) пропадут все члены с неизвестными, заключающие букву δ с разными значками. Тогда для лишних неизвестных получатся такие простые выражения

$$X = - \frac{\sum P_m \delta_{mx}}{\delta_{xx}} ; \quad Y = - \frac{\sum P_m \delta_{my}}{\delta_{yy}} ;$$

$$Z = - \frac{\sum P_m \delta_{mz}}{\delta_{zz}} \dots \dots \dots (b)$$

Путь, которым нужно при этом идти, выясним на простых примерах.

Возьмем случай двух лишних неизвестных. Тогда уравнения (а) напишутся так

$$\begin{aligned} \sum P \delta_{mx} + X \delta_{xx} + Y \delta_{yx} &= 0 \\ \sum P \delta_{my} + X \delta_{xy} + Y \delta_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Чтобы получить простые выражения (b), нужно выбрать лишние неизвестные таким образом, чтобы

$$\delta_{yx} = \delta_{xy} = 0,$$

т. е., чтобы одна из сил не вызвала перемещения, соответствующего другой силе. Если обе силы приложены в одной точке, то выбор надлежащего направления этих сил может быть выполнен без всяких затруднений. Возьмем, например, случай двухпролетной арочной системы (черт. 370). Здесь мы имеем две лишние опорные реакции. За лишние примем две составляющие реакции *A*. Одну из составляющих, которую мы обозначим через *X*, направим горизонтально. Тогда другая составляющая *Y* должна быть направлена так, чтобы перемещение, которое получает точка *A* под действием горизонтальной силы *X*, было направлено перпендикулярно *Y*. В таком случае будет соблюдено условие

$$\delta_{yx} = \delta_{xy} = 0$$

Для определения величин *X* и *Y* поступаем так. Сначала устраняем левую опору и вместо нее прикладываем горизонтальную силу, равную единице (фиг. b). Для этого состояния нахо-

¹⁾ Первые задачи этого рода были разрешены Krohn'ом Zeitschr. f. Baukunde 1880 г. и Mohr'ом—Zeitschr. d. Archit. u. Ingenieur Ver. Hannover 1881 г. См. также Maller-Breslau Centralblatt der Bauverwaltung 1889 г.

дем, путем построения диаграммы Видю, перемещения всех узлов. Пусть aa_1 представляет найденное таким образом перемещение шарнира a , и mm_1 перемещение какого-либо шарнира m . Тогда проекции этих перемещений на направление силы X и силы, приложенной в шарнире m , дадут нам величины δ_{xx} и δ_{mx} . Теперь приложим в шарнире a силу единица, перпендикулярную к найденному выше перемещению aa_1 (фиг. с) и найдем перемещения узлов для этого нового состояния. На основании теоремы о взаимности перемещений заключаем, что перемещение $a'a'_1$ должно иметь направление перпендикулярное к X , и его проекция на направление составляющей Y даст нам величину δ_{yy} . Проекция получающегося при этом перемещения mm_1 на направление силы, приложенной в узле m , даст нам величину δ_{my} . Когда все эти величины найдены, то искомое значение лишних неизвестных определится так

$$X = -\frac{\sum P_m \delta_{mx}}{\delta_{xx}} ; \quad Y = -\frac{\sum P_m \delta_{my}}{\delta_{yy}} .$$

Следовательно, перемещения узлов фермы для случаев $X=1$, $Y=1$ вполне определяют линии влияния для этих величин. Пользуясь значениями δ_{xx} и δ_{yy} , мы легко можем найти величины реакций X_t и Y_t , которые возникают при повышении температуры системы на t градусов. Для этого устраним закрепление в опоре A . Тогда при расположении опорных шарниров на одной прямой повышение температуры на t градусов будет сопровождаться перемещением шарнира A по линии, соединяющей опоры на величину at . В действительности опора A неподвижна. Следовательно, повышение температуры сопровождается появлением реактивных сил X_t и Y_t , которые и уничтожают найденное выше перемещение от температурного расширения. Обозначая через φ угол, составляемый перемещением aa_1 с вертикалью (фиг. б), мы найдем для вертикальной и горизонтальной составляющей перемещений, вызываемого силой X_t , выражения

$$x = \delta_{xx} X_t ; \quad y = \delta_{xx} ctg \varphi X_t .$$

Точно также для силы Y_t найдем

$$x_i = 0 ; \quad y_i = -Y_t \cdot \frac{\delta_{yy}}{\sin \varphi}$$

Из условий неподвижности опоры A получаем

$$\delta_{xx} X_t = att; \delta_{xx} ctg \varphi X_t = Y_t \frac{\delta_{yy}}{\sin \varphi}$$

откуда

$$X_t = \frac{att}{\delta_{xx}}; Y_t = \frac{att \cdot \cos \varphi}{\delta_{yy}}$$

На рассмотренном примере мы показали, как можно надлежащим выбором направлений для составляющих X и Y достигнуть того, что уравнения, служащие для определения лишних неизвестных, будут заключать каждое лишь по одной неизвестной. Той же цели можно достигнуть и иными путями. Можно, например, за лишние неизвестные принять силы, входящие в выражения реактивных усилий разных опорных узлов, но в таком случае эти узлы придется соединить дополнительными связями, при помощи которых задача опять сведется к силам, приложенным в одной точке. Например, в рассмотренном нами примере можно выделить вертикальное реактивное усилие, действующее в B и горизонтальную составляющую реакции A (черт. 371). В таком случае вводим дополнительные нерастяжимые бруски AD , DF , FE и EB . Горизонтальное перемещение шарнира D и вертикальное перемещение E обеспечим особыми направляющими.

Прикладывая в точке F какую либо силу, мы тем самым прилагаем некоторую вертикальную силу, действующую на нашу систему в узле B , и горизонтальную силу в A . Соотношение между этими силами будет определяться направлением силы, приложенной в F . При надлежащем выборе величины и направления этой силы, мы сможем ею осуществить оба выделенные нами реактивные усилия, имеющие место в действительной ферме. Две составляющие X и Y этой силы и примем за лишние неизвестные. Направление силы X выбираем произвольно. По этому направлению прикладываем силу единица и находим одним из известных нам способов соответствующие перемещения узлов системы, в том числе и перемещение FF_1 шарнира F . Перемещение этого шарнира в направлении приложенной нами силы даст величину δ_{xx} . Направление составляющей Y выбираем перпендикулярно к FF_1 . Вызываемое ею перемещение шарнира F должно, по теореме о взаимности перемещений, получиться перпендикулярным к выбранному направлению X . Дальнейший ход расчета остается таким же, как и в выше разобранным случае. Когда приходится рассчитывать системы с тремя лишними реактивными усилиями, мы всегда мо-

жем эти усилия привести к силе и паре сил, приложенных к одному жесткому элементу. Точку приложения реактивной силы мы можем выбрать так, чтобы она оставалась неподвижной при приложении пары. Тогда соответствующее уравнение, составленное на основании теоремы о взаимности перемещений, будет заключать в себе одну лишнюю неизвестную—реактивную пару. Чтобы два другие уравнения также заключали лишь по одной неизвестной, мы выберем направления составляющих реактивной силы так, как это было показано на предыдущих примерах.

Возьмем в качестве примера случай арки без шарниров (черт. 372). Неизвестные реактивные усилия, соответствующие усилиям опорных стержней левого конца арки, мы можем заменить силой и парой, приложенными к абсолютно жесткому треугольнику AOB , заштрихованному на чертеже (фиг. в). Положение пары выбираем произвольно. Для выбора точки O , где должны быть приложены составляющие X и Y реактивной силы, мы предварительно исследуем деформацию системы под действием пары. Для этого отбрасываем силы X , Y и Z и прикладываем к жесткому треугольнику пару сил с моментом, равным единице. Для этого случая мы без затруднения можем найти усилия во всех брусках системы и можем построить диаграмму перемещений. По перемещениям точек A и B находим мгновенный центр, относительно которого поворачивается жесткий треугольник, и этот центр примем за точку O , в которой должны быть приложены силы X и Y . Направление силы X может быть выбрано произвольно. Тогда сила Y должна быть направлена перпендикулярно к перемещению точки O , вызываемому силой X . Применяя теперь теорему о взаимности перемещений и выбирая за второе состояние последовательно случаи $X=1$, $Y=1$, $Z=\frac{1}{a}$, получим три уравнения, каждое из которых будет заключать лишь по одной неизвестной. Таким же путем мы могли бы исследовать и более сложные системы с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными, но в этих случаях нам пришлось бы вместо одного жесткого треугольника AOB , ввести соответственно систему, составленную из двух, трех и т. д. треугольников, связанных шарнирами. Надлежащим выбором точек приложения сил на этих жестких элементах и надлежащим расположением соединительных шарниров, можно достигнуть того, что в каждое из уравнений, составленных на основании теоремы о взаимности перемещений, войдет лишь одна лишняя не-

известная ¹⁾. Путь этот, предполагающий что искомыми усилия передаются на рассматриваемую систему при посредстве особой системы абсолютно жестких стержней, является при большом числе лишних неизвестных весьма сложным. В этих случаях выгоднее сначала написать ур-ия, выбрав за лишние неизвестные отдельные реактивные силы, приложенные в опорных точках фермы, и потом уже полученную таким образом систему линейных ур-ий преобразовать с помощью линейной подстановки так, чтобы в каждом ур-ии осталась лишь одна неизвестная. Подобное преобразование, как мы дальше увидим, будет равносильно введению, вместо отдельных сил, обобщенных сил представляющих собой группы сил, находящихся между собой в известном соотношении ²⁾.

Обозначим через A, B, C, \dots реактивные усилия заданной нам фермы, которые мы примем за лишние неизвестные. Тогда на основании теоремы о взаимности перемещений мы сможем составить систему линейных ур-ий такого вида

$$\begin{aligned} \sum P_m \delta_{ma} + A\delta_{aa} + B\delta_{ba} + C\delta_{ca} + \dots &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (c)$$

Чтобы получить систему ур-ий, заключающих лишь по одной неизвестной, мы введем вместо A, B, C новые переменные X, Y, Z связанные со старыми так

$$\begin{aligned} A &= a_{ax} X + a_{ay} Y + a_{az} Z + \dots \dots \dots \\ B &= a_{bx} X + a_{by} Y + a_{bz} Z + \dots \dots \dots \\ C &= a_{cx} X + a_{cy} Y + a_{cz} Z + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (d)$$

Эти новые переменные представляют собой обобщенные силы, тип которых легко выясняется при помощи ур-ий (d). Если в этих ур-иях положить

$$X = 1; Y = Z = \dots = 0$$

то получим

$$A = 1 \cdot a_{ax}; B = 1 \cdot a_{bx}; C = 1 \cdot a_{cx} \dots \dots \dots$$

¹⁾ Несколько примеров этого рода рассмотрено в курсе Müller-Breslau Графическая статика т. II стр. 141.
²⁾ Прием этот разработал S. Müller. См. Centralblatt der Bauv. 1907 г. стр. 23 и 253. Дальнейшие исследования, относящиеся к решению системы линейных ур-ий, получающихся при расчете статически неопределимых ферм см. A. Hertwig, Zeitschrift für Bauwesen 1910 г. стр. 110. Pirlet, Der Eisenbau, 1910 г. стр. 331. 1914 г. стр. 61. 1915 г. стр. 167.

Т. е. при таком выборе коэффициентов α перемещения системы для $X=1$; $Y=1$; $Z=1$. . . будут нам давать линии влияния для обобщенных сил X , Y , Z . . .

Множителями при этом будут величины

$$\frac{1}{\delta_{xx}}, \frac{1}{\delta_{yy}}, \frac{1}{\delta_{zz}}.$$

Если мы возьмем систему с n лишними неизвестными, то число коэффициентов α будет равно n^2 . Число же ур-ий вида

$$\begin{aligned} \delta_{xy} &= \delta_{yx} = 0 \\ \delta_{xz} &= \delta_{zx} = 0 \end{aligned} \dots \dots (f)$$

будет равняться $\frac{1}{2} n (n - 1)$. Мы можем, следовательно, выбрать сколько угодно различных систем значений α , удовлетворяющих условиям (f). Остановимся на таких значениях α , при которых дальнейшее решение задачи получалось бы, по возможности, проще. Прежде всего ясно, что типы обобщенных сил X , Y , Z , . . . вполне определяются соотношениями между коэффициентами α , и мы можем в каждой из этих сил один из коэффициентов принять равным единице. Положим в дальнейшем

$$\alpha_{ax} = \alpha_{by} = \alpha_{cz} = \dots \dots = 1.$$

Что касается остальных $n (n - 1)$ коэффициентов, то, как мы сейчас видели, половина их может быть выбрана совершенно произвольно и тогда другая половина должна быть подобрана так, чтобы удовлетворялись условия (f). Для дальнейшего выгодно в обобщенной силе X приравнять нулю все коэффициенты кроме α_{ax} . В обобщенной силе Y приравнять нулю все α , кроме α_{ay} и α_{by} . Для силы Z приравняем нулю все α , кроме α_{az} , α_{bz} и α_{cz} и т. д.

Тогда система (b) переписывается так:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 \cdot X + \alpha_{ay} Y + \alpha_{az} Z + \dots \\ B &= 0 + 1 \cdot Y + \alpha_{bz} Z + \dots \\ C &= 0 + 0 + 1 \cdot Z + \dots \end{aligned} \right\} \dots (g)$$

Следовательно обобщенная сила X составит из одной силы типа A . Обобщенная сила Y представляет собой группу двух сил

A и B , соотношение между которыми определится коэффициентом α_{ay} : Сила Z представит собой группу, составленную из трех сил и т. д.

Для определения коэффициентов α , отличных от нуля, пользуемся условиями (f). Первое из этих условий в общем виде напишется так:

$$\begin{aligned} & \alpha_{ax} \delta_{ay} + \alpha_{bx} \delta_{by} + \alpha_{cx} \delta_{cy} + \dots = \\ & = \alpha_{ay} \delta_{ax} + \alpha_{by} \delta_{bx} + \alpha_{cy} \delta_{cx} + \dots = 0 \end{aligned}$$

При сделанном нами выборе коэффициентов α , получаем

$$\delta_{ay} = \alpha_{ay} \delta_{ax} + 1 \cdot \delta_{bx} = 0,$$

откуда

$$\alpha_{ay} = - \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}} \dots \dots \dots (h)$$

Таким образом мы вполне определили обобщенную силу Y , и выяснили, что эта сила не вызывает перемещения, соответствующего силе A . Для вычисления коэффициентов α_{az} и α_{bz} , определяющих обобщенную силу Z , обратимся к следующим ур-ням системы (f).

Составляя ур-ие

$$\delta_{zy} = \delta_{yz} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} & \alpha_{az} \delta_{ay} + \alpha_{bz} \delta_{by} + \alpha_{cz} \delta_{cy} + \dots = \\ & = \alpha_{ay} \delta_{az} + \alpha_{by} \delta_{bz} + \alpha_{cy} \delta_{cz} + \dots = 0, \end{aligned}$$

откуда при сделанном выборе коэффициентов α , и принимая во внимание, что $\delta_{ay} = 0$, получаем

$$\alpha_{bz} = - \frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}} \dots \dots \dots (k) \quad \alpha_{ay} \delta_{az} + \alpha_{by} \delta_{bz} = 0.$$

Ур-ие $\delta_{xz} = \delta_{zx} = 0$, дает нам

$$\alpha_{ax} \delta_{az} = \alpha_{az} \delta_{ax} + \alpha_{bx} \delta_{bx} + \alpha_{cx} \delta_{cx} = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha_{ax} = - \frac{\delta_{cx}}{\delta_{ax}} + \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}} \cdot \frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}} \dots \dots \dots (l) \quad \delta_{az} = \delta_{bz} = 0.$$

Таким образом мы определили обобщенную силу Z и нашли, что она не вызывает перемещений в направлении сил A и B . Этим путем мы идем и при составлении дальнейших сил. Например, для следующей обобщенной силы U мы получим такие ур-ния для определения коэффициентов α_{au} , α_{bu} , α_{cu}

$$\begin{aligned} \delta_{uz} = 0 &= \alpha_{cu} \delta_{cz} + 1 \cdot \delta_{dz} = 0 \\ \delta_{uy} = 0 &= \alpha_{bu} \delta_{by} + \alpha_{cu} \delta_{cy} + 1 \cdot \delta_{dy} = 0 \\ \delta_{ux} = 0 &= \alpha_{au} \delta_{ax} + \alpha_{bu} \delta_{bx} + \alpha_{cu} \delta_{cx} + 1 \cdot \delta_{dx} = 0 \end{aligned} \quad (m)$$

Кроме того из условий

$$\delta_{xu} = \delta_{yu} = \delta_{zu} = 0$$

находим

$$\alpha_{au} = \alpha_{bu} = \alpha_{cu} = 0.$$

Т. е. обобщенная сила U не вызывает перемещений, соответствующих силам A , B и C .

Покажем теперь, как намеченным здесь путем могут быть последовательно построены линии влияния для обобщенных сил X , Y , Z , U в пятипролетной балочной ферме (черт. 373). За лишние неизвестные примем сначала реакции A , B , C и D промежуточных опор (фиг. а). Тогда обобщенная сила X представится одной силой, приложенной в опорной точке A . Приложив здесь груз единица и построив для этого случая нагрузки линию прогиба фермы, опертой в E и F (фиг. б), мы получаем линию влияния для обобщенной силы X . Для перехода к числам нужно будет ординаты этой линии делить на $\delta_{ax} = \delta_{ax}$. Измеряя ординаты δ_{bx} и δ_{cx} этой линии, мы при помощи (h) находим α_{ay} и таким образом определяем вторую обобщенную силу Y . Нагрузке $Y=1$ будет соответствовать вертикальная сила единица, приложенная в узле B и прямо противоположная ей сила, равная α_{ay} , приложенная в узле A . Построив линию прогибов фермы для случая действия этих двух сил, мы получаем таким образом линию влияния для обобщенной силы Y (фиг. с). Если построение сделано правильно, то прогиб δ_{ay} должен получиться равным нулю. При переходе к числам нужно будет ординаты построенной линии делить на $\delta_{by} = \delta_{by}$. Измеряя ординаты δ_{by} и δ_{cy} , мы на основании (k) вычисляем величину α_{bx} . Далее, имея ординаты δ_{ax} , δ_{bx} и δ_{cx} линии влияния для X , мы при помощи ф-лы (l) вычислим α_{ax} . Таким образом, определится обобщенная сила

$Z=1$, состоящая из силы единица, приложенной в C противоположной по направлению силы α_{bx} , приложенной в B и силы α_{az} , приложенной в A . Построив для этих сил линию прогибов фермы, опертой в E и F , получим линию влияния для обобщенной силы Z . Ординаты этой линии придется делить на $\delta_{zz} = \delta_{cz}$. Построенные линии влияния для X , Y и Z дают нам возможность определять следующую обобщенную силу U . В самом деле, на основании ф-л (m) получаем

$$\alpha_{cu} = -\frac{\delta dx}{\delta cx}; \quad \alpha_{bu} = -\frac{\delta dy}{\delta bu} - \alpha_{cu} \cdot \frac{\delta cy}{\delta by};$$

$$\alpha_{au} = -\frac{\delta dx}{\delta ax} - \alpha_{cu} \frac{\delta cx}{\delta ax} - \alpha_{bu} \frac{\delta bx}{\delta ax}.$$

Заметим, что все коэффициенты α , имеющие первым значком букву a , находятся из линии влияния X , если ее загружать так, как это для каждого коэффициента показано выше фигуры (b). Коэффициенты с первым значком b , находятся путем надлежащего нагружения линии влияния Y и т. д.

При замеченном способе составления обобщенных сил, каждая последующая обобщенная сила не вызывает перемещений, соответствующих всем ранее введенным силам. Сила Y не вызывает перемещения соответствующего силе X ($\delta_{ay} = 0$). Сила Z не вызывает перемещений, соответствующих силам X и Y ($\delta_{az} = \delta_{bz} = 0$) и т. д.

На основании этого можно дать такой способ последовательного составления обобщенных сил. Сила $Y=1$ составит из силы единица, приложенной в B и такой силы приложенной в A , при которой прогиб этой точки равен нулю. Следовательно, группу сил $Y=1$ мы найдем, рассматривая ферму опертую в трех точках E , F и A . Сила единица, приложенная в B и реакция A , вызванная этой силой в двухпролетной системе EAF , дадут нам группу сил $Y=1$. Точно также группа сил $Z=1$ составит из силы единица, приложенной в C и таких двух сил, приложенных в A и B , при которых прогибы этих точек равны нулю. Эти силы мы найдем, рассматривая ферму, опертую в четырех точках E , A , B , F и определяя реакции в A и B . Определение группы сил $U=1$ сведется к разысканию реакций A , B и C балки опертой в E , A , B , C и F и т. д.

Все предыдущие выводы построены на предположении, что величинами A , B , C ... представляют собою реактивные силы, для

которых соответствующие перемещения системы равны нулю. Все результаты легко распространяются и на тот случай, если лишние неизвестные представляют собой усилия в стержнях. Возьмем, например, двухшарнирную арку с повышенной затяжкой (черт. 374). За одну лишнюю неизвестную примем распор арки X . Второй неизвестной будет усилие Y в затяжке. Чтобы привести задачу к тому виду, который предполагался во всех предыдущих выводах, мы произведем разрез затяжки двумя бесконечно близкими сечениями mn и $m_1 n_1$, (фиг. б). К этим сечениям приложим силы Y , заменяющие усилие в затяжке. Так как сечения mn и $m_1 n_1$ взяты бесконечно близкими друг другу, то сближение между точками приложения сил Y в действительной ферме равно нулю, и ур-ия, которые мы сможем составить на основании теоремы о взаимности перемещений для определения X и Y будут иметь такой же вид, как и ур-ия (с).

Задачи.

184) Выбрать в трехпролетных системах, представленных на чертеже (375), лишние неизвестные так, чтобы каждое из соответствующих им ур-ий заключало лишь одну неизвестную. Система представленная на фигуре (а) имеет две лишние неизвестных. Мы отбрасываем опоры A и C и соединяем соответствующие опорные узлы при помощи дополнительных нерастяжимых брусков с некоторой точкой F . Надлежащим выбором силы приложенной в F , мы можем при помощи направляющих, устроенных в E и G , сразу осуществить опорные реакции A и C . Составляющие X и Y этой силы мы и примем за лишние неизвестные. Направление силы X выберем произвольно. Тогда силу Y придется направить перпендикулярно к тому перемещению точки F , которое получается под действием силы X .

Система, представленная на фигуре (с), заключает в себе три лишние неизвестных. Мы отбросим опоры A и C и соединим соответствующие опорные узлы с жестким треугольником AFE (фиг. d).

Реактивные силы A и C могут быть приведены к силе и паре, приложенным к жесткому треугольнику. Положение пары ZZ мы выберем произвольно и для случая действия только этой пары построим перемещения узлов фермы, а также найдем перемещения вершин A и E жесткого треугольника. По этим перемещениям находим мгновенный центр J , около которого происходит соответствующий поворот треугольника. Эту точку примем за точку приложения силы, представленной составляющими X и Y . Направление составляющей X выберем произвольно. Тогда направление Y определится также, как и в предыдущем примере.

185) Выбрать лишние неизвестные для фермы, представленной на чертеже 376. Для этой системы с двумя лишними неизвестными

выгодно за неизвестные взять не вертикальные реакции A и B , а группы сил, составленные из этих реакций так: обобщенная сила X составляется из двух равных вертикальных сил, приложенных в A и B и направленных вверх. Обобщенная сила Y составляется из двух равных вертикальных сил, направленных прямо в противоположные стороны. Нагрузки, соответствующие случаям $X = -1$ и $Y = -1$ представлены на фигурах (b) и (c).

В таком случае для опорных реакций получим выражения

$$\begin{aligned} A &= X + Y \\ B &= X - Y \end{aligned} \quad (a)$$

Так как мы ведем дело с симметричной фермой, то работа обобщенной силы X на перемещениях вызванных силой Y , очевидно, будет равняться нулю, и каждое из ур-ий, составленных на основании теоремы о взаимности перемещений, будет заключать лишь одну неизвестную. Применяя теорему о взаимности перемещений к действительному состоянию системы (фиг. a) и каждому из фиктивных состояний (фиг. b и фиг. c), мы получим ур-ия

$$\begin{aligned} -X \delta_{yx} + 1 \cdot \delta_{yx} &= 0, \\ -Y \delta_{yy} + 1 \cdot \delta_{yx} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$X = 1 \cdot \frac{\delta_{yx}}{\delta_{xx}}; \quad Y = 1 \cdot \frac{\delta_{yx}}{\delta_{yy}}.$$

Следовательно, линии прогибов для состояний, представленных на фигурах (b) и (c), дадут нам линии влияния для искомых линий неизвестных. Величины δ_{xx} и δ_{yy} найдутся из того условия, что $1 \cdot \delta_{xx}$ и $1 \cdot \delta_{yy}$ представляют собой работу сил, указанных на фигурах (b) и (c), на вызванных этими силами перемещениях. Следовательно, δ_{xx} сумма прогибов точек A и B для состояния (b), и δ_{yy} сумма прогибов тех же точек для состояния (c). По найденным значениям X и Y сейчас же определяем реакции A и B при помощи ф-л (a).

186) Разрешить вопрос о наилучшем выборе линии неизвестных в случае несимметричной фермы, представленной на чертеже 377. Следуя изложенному выше общему способу, мы примем для опорных реакций A и B такие выражения (см. ф-лы (g))

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot X + \alpha_{ay} \cdot Y \\ B &= 0 + 1 \cdot Y. \end{aligned}$$

Соответствующие состояния $X = -1$ и $Y = -1$ представлены на фигурах (b) и (c). Построив линию прогибов для состояния $X = -1$, найдем на основании ф-лы (h),

$$\alpha_{ay} = - \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}}$$

Линии прогибов для состояний, представленных на фигурах (b) и (c) будут служить линиями влияния для обобщенных сил X и Y .

187) *Выбрать наимыгоднейшим образом линии неизвестныя для трехпролетной арочной системы (черт. 378). Идя общим путем, мы выбираем типы обобщенных сил на основании ур-ий:*

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot X + a_{ay} Y + a_{az} Z, \\ B &= 0 + 1 \cdot Y + a_{bz} Z, \\ C &= 0 + 0 + 1 \cdot Z. \end{aligned}$$

Величины a_{ay} , a_{az} и a_{bz} найдутся при помощи ф-л (h), (k) и (e).

В данном случае можно, воспользоавшись также симметрией, сразу выбрать такие типы обобщенных сил, чтобы каждая из сил не вызывала перемещений, соответствующих другим силам. За обобщенную силу X примем две равные и прямо противоположные горизонтальные силы, соответствующие распору арок. Находим перемещения δ_{ax} и δ_{bx} для случая $X = -1$ (фиг. b). Обобщенную силу $Y = -1$ составим из трех сил, как то показаво на фигуре (c). Соотношение между горизонтальной и вертикальными силами подобрано так, что точка A остается неподвижной. Следовательно, сила Y не вызывает перемещений, соответствующих силе X . Обобщенная сила $Z = -1$ составляется так, как это указано на фигуре (d). Легко видеть, что при этом точка A остается неподвижной и прогибы точек B и C равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно силы X и Y не совершают никакой работы на перемещениях, вызываемых силой Z . Ур-ия, которые можно написать на основании теоремы о взаимности перемещений, будут заключать при таком выборе обобщенных сил лишь по одной неизвестной.

188) *Выбрать линии неизвестныя в случае арки с заданными пятнами (черт. 379). Чтобы прийти к ур-иям, заключающим лишь по одной неизвестной, мы могли бы, выбрав за линии известные усилия, соответствующие левой плоскости закрепления, поступить так, как это было объяснено ранее (черт. 372). Покажем здесь иной путь решения задачи, особенно выгодный в случае симметричных арок. Разрежем арку сечением mn (фиг. a), и рассмотрим каждую половину арки отдельно. На фигуре (b) эти половины для ясности чертежа несколько раздвинуты. Концы разрезанных брусков, как для левой так и правой половины арки представим себе шарнирно связанными с жесткими элементами, заштрихованными на чертеже. Тогда для каждой половины арки система усилий, соответствующих перерезанным стержням, может быть заменена эквивалентной ей системой сил X , Y , Z , приложенных к жесткому элементу. Пары сил X мы можем расположить совершенно произвольно и для них найдем перемещения всех узлов каждой половины фермы, а также перемещения присоединенных к ним жестких элементов. Пусть точки (I) и (II) представляют собой мгновенные центры, соответствующие этим перемещениям жестких элементов. Углы поворота τ_1 и τ_2 этих элементов найдутся по ф-лам*

$$\tau_1 = \sum \frac{S_1^2 l}{EF}; \quad \tau_2 = \sum \frac{S_2^2 l}{EF},$$

где S_i обозначает усилия в стержнях, вызываемые парами сил X , и суммирование распространяется на все стержни соответствующей половины фермы ¹⁾. На линии, соединяющей центры (I) и (II), мы определяем точку (I, II) из условия

$$a_1 \tau_1 = a_2 \tau_2.$$

Точка эта совершает одно и то же перемещение независимо от того, считаем ли мы ее принадлежащей левому или правому жесткому элементу. В этой точке мы, не внося в систему никаких изменений, могли бы оба жесткие элемента соединить шарниром. Точку (I, II) мы примем за точку приложения сил Y и Z . Тогда, очевидно, пары сил X не будут вызывать перемещений, соответствующих силам Y и Z . Направление одной из сил, например силы Y , мы можем выбрать произвольным, тогда силы Z должны быть направлены перпендикулярно к перемещению ²⁾. Взаимному силам Y . При таком выборе лишних неизвестных, каждое из уравнений, составляемых на основании теоремы о взаимности перемещений, будет заключать лишь одну неизвестную.

189) Получая симметричным в предыдущей задаче способом, рассмотреть симметричную арку с заданными кривыми (черт. 380). Заданные неизвестные примем моменты X и силы Y и Z в ключе арки ³⁾. Из условий симметрии заключаем, что точка (I, II), в которой должны быть приложены силы Y и Z , расположится на оси симметрии mn . Из тех же условий симметрии заключаем, что две равные и прямо противоположные горизонтальные силы Y , приложенные к двум половинам арки в сечении mn , не вызовут по этому сечению вертикального смещения одной половины арки относительно другой. Следовательно, направляя силы Z вертикально, мы достигнем того, что эти силы не будут совершать работы на перемещениях, вызываемых силами Y . Для окончательного определения тех обобщенных сил X , Y и Z , которые мы выбираем за лишние неизвестные, остается теперь лишь найти положение точки (I, II) на оси симметрии mn . Выясним для этого предварительно, какие перемещения вызывают пары сил X . Так как мы имеем дело с симметричной фермой, то при этом можем ограничиться рассмотрением лишь одной половины, например, левой. Прикладывая к этой половине пару сил $X = -1$, мы без затруднения найдем усилия S_i , вызываемые этой парой в стержнях фермы. После этого, вертикальные прогибы верхних узлов фермы могут быть найдены путем построения веревочного многоугольника для фиктивных грузов, определяемых по ф-ле (I) (см. стр. 39).

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left(-\frac{\partial O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\partial U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\partial d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\partial d'_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\partial h_m \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\partial h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} \right) \dots \dots (a)$$

¹⁾ Считаю в том числе и части разрезанных стержней.

²⁾ Перемещением явится относительное смещение точек приложения сил Y . До деформации эти точки совпадают с точкой (I, II).

³⁾ Сечение mn пройдет через ось средней стойки.

При составлении фиктивного груза в опорной точке C придется считаться лишь с деформацией стойки h_0 , соответственно чему в ф-ле (а) останется лишь последний член, и мы получим

$$P_c = \frac{\partial h_0}{\partial \alpha}$$

Соответствующий многоугольник прогиба представлен на чертеже (381). Первая сторона C_1C_2 веревочного многоугольника взята горизонтальной. От этой прямой придется отсчитывать вертикальные прогибы узлов O , — 10. По вертикальным прогибам мы легко построим полные перемещения, если воспользуемся диаграммой перемещений для шарнирного многоугольника (§ 43). Построение начинаем с неподвижной точки C . Перемещение узла O обусловлено удлинением δO_0 стержня CO и вращением его. Откладываем отрезок δO_0 по направлению стержня и восстанавливаем в конце его перпендикуляр, получим в пересечении этого перпендикуляра с горизонтальной линией, идущей через O_1 точку, определяющую перемещение узла O . От этой точки откладываем по направлению $O—1$ отрезок δO_1 и в конце его проводим перпендикуляр до пересечения с горизонтальной линией, идущей через 1_1 . Таким образом получаем перемещение узла 1 . Это построение продолжаем до тех пор, пока не получим последней точки 10_2 , определяющей перемещение $C_2—10_2$ узла 10 . Нужный нам мгновенный центр (I) будет лежать, очевидно, на перпендикуляре, опущенном из узла 10 на направление $C_2—10_2$. Расстояние a этой точки от узла 10 мы получим, если величину найденного выше перемещения узла 10 разделим на угол поворота сечения m под действием пары сил $X = -1$. Величину α этого угла найдем по ф-ле

$$\alpha = \sum \frac{S_i^2 l}{EI} \dots \dots \dots (б)$$

где суммирование должно быть распространено на все стержни полуарки. Разыскав мгновенный центр (I), мы сейчас же получаем на оси симметрии арки точку (I, II), к которой должны быть приложены силы Y и Z .

Так как при сделанном выборе лишних неизвестных в каждое из уравнений, составляемых на основании теоремы о взаимности перемещений, войдет лишь одна неизвестная, то линии прогибов для нагрузок $X = -1$; $Y = -1$, $Z = -1$ дадут нам очертания соответствующих линий влияния [фиг. (b), (c), (d) черт. 380]. При переходе к числам воспользуемся формулами:

$$X = 1 \cdot \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}}; \quad Y = 1 \cdot \frac{\delta_{my}}{\delta_{yy}}; \quad Z = 1 \cdot \frac{\delta_{mz}}{\delta_{zz}}$$

Здесь δ_{mx} , δ_{my} , δ_{mz} прогибы узла m под действием сил $X = -1$, $Y = -1$, $Z = -1$.

Величина δ_{xx} — есть перемещение, соответствующее обобщенной силе X и вызываемое силами $X = -1$. Перемещение это будет рав-

няться удвоенному углу - (ф-ла b) и представит собой относительный поворот верхних концов полуарок под действием пар $X = -1$.

Величина δ_{yy} есть перемещение, соответствующее обобщенной силе X и вызываемое силой $Y = -1$. Перемещение это представляет относительное горизонтальное смещение верхних концов полуарок под действием сил $Y = -1$. Если соответствующие усилия в брусках фермы обозначим через S_2 , то для δ_{yy} получим выражение

$$\delta_{yy} = \sum \frac{S_2^2 l}{EF},$$

где суммирование должно быть распространено на все стержни арки.

Наконец, δ_{xz} — представляет собой относительное вертикальное смещение верхних концов полуарок при действии сил $Z = -1$ [фиг. (с) черт. 380].

190) *Выбрать лишние неизвестные для рамы, представленной на чертеже (382).* Производим разрез по оси симметрии m и выбираем лишние неизвестные так, как это было сделано в предыдущей задаче для арки.

191) *Наметить общий ход расчета кольца, представленного на чертеже (383).* Производим разрез m . Сечение справа от разреза удерживаем неподвижно, а к сечению слева присоединяем жесткий элемент, на котором располагаем пару сил X и силу Z в составляющих Y и Z так, как это было сделано при расчете арки (черт. 372).

192) *Выбрать лишние неизвестные для трехпролетного арочного моста, представленного на чертеже (384).* Произведя разрез по оси симметрии, мы примем за лишние неизвестные те же обобщенные силы X , Y и Z , которыми мы пользовались при расчете арки (задача 189). Таким образом основная, статически определимая система составится из двух консольных балок, соприкасающихся по сечению m . Примерный вид линий влияния для X , Y и Z показан на фигурах (b), (c) и (d). Если бы арка в вершине была снабжена шарниром, то пары сил X обратились бы в нуль, и нам пришлось бы иметь дело с двумя лишними неизвестными — составляющими давления в шарнире.

193) *Наметить ход расчета для трехпролетного висячего моста (черт. 385).* За лишние неизвестные принимаем те же обобщенные силы X , Y и Z (фиг. b), которыми мы пользовались в предыдущих задачах. Выбор расстояния s , определяющего точку приложения сил Y и Z может быть произведен на основании графического построения перемещений (задача 189). Возможно воспользоваться и вычислительным путем. Точку приложения сил Y лучше выбрать, чтобы эти силы не вызвали перемещений, соответствующих силам X , т. е. чтобы было выполнено условие.

$$\delta_{xy} = \sum \frac{S_1 S_2 l}{EF} = 0.$$

Здесь S_1 и S_2 усилия в брусках фермы для случаев $X = -1$; $Y = -1$.

ГЛАВА VI.

Расчет пространственных систем.

§ 53. Сложение и разложение сил, сходящихся в одной точке.

При сложении сил, пересекающихся в одной точке и направленных как угодно в пространстве, мы будем пользоваться принципом параллелограмма сил. При помощи параллелограмма сил мы складываем какие либо две из заданных сил. Полученную равнодействующую сложим, пользуясь параллелограммом сил, с третьей заданной силой. Вновь полученную равнодействующую сложим с четвертой силой и т. д. Совершенно так же как и в случае сил, расположенных в одной плоскости, легко показать, что последовательное построение параллелограммов может быть заменено построением *многоугольника сил*, который мы получим, если все силы отложим одну за другой по их величине и направлению. *Закрывающая* такого многоугольника, идущая от начала первой к концу последней силы, представит нам равнодействующую заданной системы сил. Когда конец последней силы совпадает с началом первой, мы будем иметь замкнутый многоугольник сил. Соответствующая система сил будет находиться в равновесии.

При каком угодно направлении сил в пространстве многоугольник сил получится вообще говоря не плоским, и все построение придется вести в двух проекциях. В случае замкнутого многоугольника, проекции его на горизонтальную и вертикальную плоскости также будут замкнутыми многоугольниками, образованными горизонтальными и вертикальными проекциями данных сил.

Обратимся теперь к разложению силы на несколько направлений, пересекающихся с направлением данной силы в одной точке. С подобной задачей нам часто придется встречаться при расчете пространственных систем. По заданной силе, - в каком-либо узле фермы, нам нужно будет определять усилия в сходящихся к этому

узлу стержнях. Усилия эти, при условии соединения стержней идеальными шарнирами и при расположении нагрузок в узлах, будут направлены по осям стержней. Величины усилий должны быть подобраны так, чтобы они уравнивали приложенную в узле силу.

Таким образом, задача сводится к исследованию равновесия сил, приложенных в одной точке. Статика для этого случая дает три ур-ня равновесия, и мы сможем однозначно определить все усилия, если число неизвестных равно трем. Соответственно этому задача о разложении силы получает вполне определенное решение, если имеется случай трех направлений, пересекающихся с силой в одной точке.

Если число направлений, пересекающихся с заданной силой в одной точке, больше трех, вопрос о разложении силы по этим направлениям становится задачей неопределенной, так как число неизвестных усилий будет больше числа ур-ий.

При числе направлений меньшем трех, уравнивание будет возможно лишь при соблюдении дополнительных условий относительно разлагаемой силы. При двух направлениях сила, очевидно, должна лежать в плоскости этих направлений. При одном направлении—сила должна совпадать с этим направлением.

Заметим, что в том случае когда три направления, пересекающиеся с заданной силой в одной точке, лежат в одной плоскости, задача о разложении становится неопределенной, если направление силы совпадает с той же плоскостью. Если же этого совпадения нет, то уравнивание становится невозможным.

Статической определенности задачи о разложении силы на три направления соответствует в геометрической определенности в случае прикрепления какого либо узла к геометрически неизменяемой системе при помощи трех стержней. В самом деле если бы мы какой либо узел O (черт. 386, фиг. а) прикрепили к неизменяемой системе двумя стержнями OA и OB , то узел O мог бы совершать перемещения, соответствующие вращению треугольника AOB относительно стороны AB ¹⁾. Устанавливая третий стержень OC (фиг. б), не лежащий в плоскости AOB , мы достигнем полного закрепления узла O .

В отмеченном выше исключительном случае, когда все три стержня лежат в одной плоскости, мы будем иметь не жесткую

¹⁾ В узлах пространственных систем мы будем предполагать идеальные шаровые шарниры, допускающие вращение стержней в любом направлении.

систему. При расположении, указанном на фигуре (а) (черт. 387), плоская фигура $AOBC$ сохраняет возможность вращения вокруг оси AB .

Если стержни расположены так, как это указано на фиг. (b), то жесткость прикрепления узла O является следствием того, что малым изменениям длин стержней могут соответствовать значительные перемещения точки O в направлении перпендикулярном плоскости стержней.

При разложении силы на три направления мы воспользуемся тем обстоятельством, что равнодействующая R трех сил P_1, P_2 и P_3 , проходящих через точку O , представляется диагональю OE параллелепипеда, ребра которого по величине и направлению представляют силы P_1, P_2, P_3 , (черт. 388). Соответствующий многоугольник сил на чертеже показан жирными линиями.

Когда нужно разложить силу R на направления 1, 2, и 3, мы можем поступить так: сначала разлагаем силу R на две составляющие, одну из них P_1 , направляем по линии OA и другую S — по линии OP , представляющей сечение плоскости P_1R с плоскостью 2, 3. После этого остается разложить силу S на направления 2 и 3 и получить таким образом усилия P_2 и P_3 .

Иногда является более удобным вести построение следующим образом. Через точку E , конец равнодействующей R , проводим линию, параллельную направлению OA , и продолжаем эту линию до пересечения с плоскостью 2, 3 в точке F . Тогда отрезок FE дает нам по величине и направлению силу P_1 и отрезок OF — равнодействующую сил P_2 и P_3 .

Все построение придется, конечно, вести в двух проекциях.

Особенно просто решается задача в том случае, если в одной из проекций два какие либо направления сливаются в одну прямую. Возьмем например, случай, когда направления 2 и 3 лежат в горизонтальной плоскости (черт. 389). Сначала разлагаем силу R на составляющие P_1 , имеющую направление $0, \bar{1}$, и S , направленную по линии пересечения плоскости 1, R с плоскостью 2, 3. Так как эта последняя плоскость горизонтальна, то соответствующая линия пересечения в вертикальной проекции сольется с линией $0', 2' 3'$ и мы построением параллелограмма $O'A'E'F'$ найдем P_1' и S' , вертикальные проекции силы P_1 и равнодействующей S усилий P_2 и P_3 . После этого сейчас же получается горизонтальная проекция силы P_1 , и путем построения параллело-

грамма $OAEF$ находится горизонтальная проекция силы S . Для получения горизонтальных сил P_2 и P_3 остается только найденную силу S разложить на направления $0,2$ и $0,3$, что и выполнено в горизонтальной плоскости проекций, на которую эти силы проектируются без искажения.

Возьмем теперь более общий случай, когда силу R требуется разложить на три направления $0,1$, $0,2$ и $0,3$, составляющие какие угодно углы с плоскостями проекций (черт. 390, фиг. а). Предварительно найдем линию пересечения S плоскостей $R,1$ и $2,3$. Одной из точек этой линии будет, очевидно, общая точка O . Другую точку той же линии получим в месте пересечения горизонтальных следов AD и coj плоскостей $R,1$ и $2,3$. Силу R разлагаем сначала на направления $0,1$ и S , что выполнено на фигуре (b) в двух проекциях. После этого остается лишь силу S разложить на направления $0,2$ и $0,3$. Таким образом мы получаем горизонтальные и вертикальные проекции составляющих P_1 , P_2 и P_3 . По этим проекциям без затруднений могут быть найдены и действительные величины искомых усилий.

Обратимся теперь к решению задачи о разложении силы на три направления вторым из намеченных выше способов. Способ этот приходится применять в тех случаях, когда встречается затруднения при построении линии пересечения S плоскости $R,1$ и $2,3$, например, когда следы линий $0,1$, $0,2$, $0,3$ выходят за пределы чертежа. Положим требуется разложить силу R на направления $0,1$, $0,2$ и $0,3$, указанные в двух проекциях на чертеже (391). Через конец силы R , точку E , проводим линию параллельную направлению $0,1$ до пересечения с плоскостью $2,3$ в точке F . Точку F мы проще всего можем найти таким образом: проводим через направление EF вертикально проектирующую плоскость. Ее пересечение с плоскостью $2,3$ определится линией mn , $m'n'$. На этой линии, очевидно, должна лежать и искомая точка пересечения F . Для получения горизонтальной проекции этой точки нужно только через точку E провести линию параллельную направлению $0,1$. Пересечение ее с линией mn определит горизонтальную проекцию точки F . После этого сейчас же находится вертикальная проекция F' на линии $m'n'$. Отрезком EF , как мы видели (черт. 388), определяется по величине и направлению сила P_1 . Для получения двух других составляющих

нужно только разложить отрезок OF на направления $0,2$ и $0,3$, что и выполнено на чертеже. Жирными линиями показаны горизонтальная и вертикальная проекции соответствующего многоугольника сил¹⁾.

При расчете пространственных систем графическое решение вопроса далеко не всегда является наиболее простым, иногда с большой выгодой можно пользоваться и аналитическими приемами. В частности, при разложении силы на три направления мы можем исходить из основных уравнений равновесия, и можно составить эти уравнения так, что в каждое из них войдет лишь одно неизвестное усилие. При этом можно воспользоваться, как способом проекций, так и способом моментов, аналогичным приему Риттера, которым мы пользовались при расчете плоских ферм.

Воспользуемся способом проекций, чтобы определить усилие S_1 , вызываемое в одном из трех брусков силой P (черт. 392). Мы получим уравнение, заключающее лишь одну неизвестную силу S_1 , если спроектируем все сходящиеся в точке O усилия на направление нормали к усилиям S_2 и S_3 . Пусть α и β углы, составленные нормалью n с направлениями P и S_1 . Тогда, предполагая усилие S_1 растягивающим, можем написать такое уравнение

$$- P \cos \beta + S_1 \cos \alpha = 0 \dots \dots (a)$$

откуда и определится искомое усилие S_1 .

Способ проекций является особенно удобным в некоторых частных случаях расположения брусков. Положим требуется найти усилие S_1 в одном из трех брусков системы, представленной на чертеже (393). Внешняя сила, приложенная в вершине O , задана своими проекциями X Y и Z . При выбранном расположении брусков нормаль n и стержень S_2 будут лежать в вертикальной плоскости, перпендикулярной направлению оси Y . При составлении проекции внешней силы на направление нормали придется принимать во внимание лишь составляющие X и Z , которые при проектировании дадут нам величину

$$X \cos \alpha + Z \sin \alpha.$$

Усилие S_1 , которое мы предположим растягивающим, разложим в вертикальной плоскости на составляющие по направле-

¹⁾ Описание других графических приемов разложения силы на три направления можно найти в книге П. Рабцевича. Сборник задач по пространственным системам. Киев, 1911 г.

ниям Y и Z . При проектировании на направление нормали нам придется иметь в виду лишь вторую из этих составляющих, равную, как видно из чертежа, выражению $S_1 \cos\beta$. Приравняв нулю сумму проекций всех приложенных в узле O сил на направление n , приходим к такому ур-ию для определения усилия S_1

$$X \cos\alpha + Z \sin\alpha + S_1 \cos\beta \sin\alpha = 0. \dots (b)$$

Если задано возвышение точки O над плоскостью закрепления нижних концов стержней и длины стержней, то по этим размерам мы сейчас же находим углы α и β и вычисляем при помощи ур-ия (b) соответствующее значение S_1 .

Способ проекций может быть применен и в общем случае. Выбирая прямоугольную систему координатных осей и проектируя на эти оси как заданную силу, так и неизвестные усилия в трех стержнях рассматриваемого узла, мы получим три линейных ур-ия, каждое из которых будет заключать в себе все три неизвестные усилия. Хотя ур-иям этим можно придать сравнительно простой вид, но все же такой путь определения неизвестных усилий является более громоздким и на изменении этого способа мы здесь останавливаться не будем¹⁾.

Применим теперь к решению задачи о разложении силы на три направления способ моментов. Если нужно найти усилие S_1 , возникающее в одном из трех брусков под действием силы P (черт. 394), то за ось, относительно которой следует составлять моменты, удобнее всего принять линию AB ; перетекающую направления усилий S_2 и S_3 . В таком случае нам придется иметь дело лишь с силой P и усилием S_1 . Каждую из этих сил мы разложим на две составляющие, одну из которых направим по нормали и другую в плоскости OAB . При составлении моментов придется иметь дело лишь с первыми составляющими. Величину их придется множить на расстояние r до оси AB . Соответствующее ур-ие равновесия напишется так:

$$(P \cos\beta - S_1 \cos\alpha) r = 0.$$

Ур-ие это совпадает с ур-ием (a), составленным способом проекций.

¹⁾ Наложение этого способа имеется в книге Schlink'a, Statik der Raumfachwerke (1907 г.), стр. 63. Там же изложен основанный на начале возможных перемещений способ Mohr'a см. стр. 73. Тот же вопрос см. Henneberg Die graphische Statik (1911 г.), стр. 387.

Особенно удобно пользоваться ур-ием моментов в том случае, если нижние концы всех трех брусков, сходящихся в рассматриваемом узле O , лежат в горизонтальной плоскости (черт. 395). При вычислении усилия S_1 выбираем за ось моментов линию BC , соединяющую нижние концы двух других брусков. Силы S_1 и P , моменты которых относительно оси BC будут отличны от нуля, разложим в точках A и D на две составляющие, при чем одну из составляющих направим вертикально, а другую — в горизонтальной плоскости. Только первые составляющие дадут относительно оси BC момент, отличный от нуля и ур-ие моментов напишется так

$$V_1 e_1 - Ve = 0 \dots \dots \dots (c)$$

Если мы через h обозначим возвышение узла O над горизонтальной плоскостью ABC , через l_1, l_2, l_3 обозначим длины брусков и через l — длину OD , то будем иметь

$$V_1 = S_1 \frac{h}{l_1}; \quad V = P \frac{h}{l}$$

Вставляя это в ур-ие (с), получим для искомого усилия выражение

$$S_1 = P \frac{e}{e_1} \cdot \frac{l_1}{l}$$

Из изложенного видно, что в случае трех стержней, сходящихся в одной точке O и не лежащих в одной плоскости, мы, пользуясь одним из перечисленных способов, всегда сможем найти усилия S_1, S_2 и S_3 , вызываемые в этих стержнях какой-либо силой P , приложенной в шарнире O . Если эта сила будет равна нулю, то в нуль обратятся и все три усилия, так как только при этом условии возможно равновесие узла O . Этим соображением часто выгодно пользоваться при расчете пространственных систем. Основываясь на нем, можно сразу указать на те стержни, в которых усилия равны нулю. Устраняя их из системы, мы тем самым упрощаем дальнейший расчет. Возьмем, например, купол с квадратным основанием, представленный в горизонтальной и вертикальной проекциях на чертеже (396). Пусть на него действует лишь одна вертикальная сила, приложенная в узле A . Мы обращаемся прежде всего к узлам b и d верхнего кольца купола. Так как в этих узлах сходятся по три стержня, не ле-

жанди в одной плоскости, и внешних сил не имеется, то усилия в этих стержнях равны нулю. Выбрасывая эти стержни и обращаясь к узлам A и C , мы находим, что здесь в каждом узле осталось по три стержня и так как внешних сил нет, то, следовательно, и в этих стержнях усилия должны равняться нулю. Все стержни верхнего яруса купола не работают. Обращаясь теперь к узлам B и D нижнего яруса и устраняя из них все ранее рассмотренные стержни с нулевыми усилиями, мы опять получим в каждом из этих узлов по три стержня, относительно которых можно сделать заключение, что они не работают. Не будут работать также и стержни, сходящиеся в узле C . Отличными от нуля будут лишь усилия в трех стержнях, сходящихся в нагруженном узле A . На чертеже эти стержни отмечены жирными линиями. Соответствующие им усилия найдутся разложением силы P на три направления AE , AF , AH .

Отметим здесь еще одно соображение, которым можно воспользоваться при расчете пространственных систем. Если в каком-либо узле системы все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости (черт. 397), то усилие S_1 , вызываемое в отдельно направленном стержне 1 силой P , может быть найдено из условия равновесия узла, хотя общее число стержней больше трех. Для этого нужно только спроектировать все сходящиеся в узле усилия на направление, перпендикулярное к плоскости стержней 2, 3, 4 и 5. В полученное, таким образом, уравнение войдет лишь неизвестное усилие S_1 и известная сила P . Если в подобного рода узле не приложено никакой силы, то мы заключаем, что в отдельно направленном стержне усилие должно равняться нулю. Этим соображением воспользуемся при выделении стержней с нулевыми усилиями. Возьмем, например, систему, представленную на чертеже (398). Обращаясь к узлу B , где три стержня лежат в одной плоскости, заключаем, что в четвертом отдельно направленном стержне BC усилие должно равняться нулю. Такое же заключение делаем относительно стержней CD , DE , FE и AF на основании рассмотрения узлов C , D , E и F . Отбросив все эти стержни с нулевыми усилиями, найдем, что в узлах C , D , E и F останется лишь по два стержня и так как внешних сил здесь не приложено, то усилия во всех этих стержнях будут равны нулю. Отличные от нуля усилия действуют лишь в стержнях, отмеченных на чертеже жирными линиями.

Задачи.

194) *Определить усилия в трех стержнях кронштейна, если в вершине O этой кронштейна подвешен груз 3 tn (черт. 399). При решении этой задачи графическим путем, выполняем все построение в двух проекциях (фиг. б). Так как стержни OA и OB лежат в горизонтальной плоскости, то их вертикальные проекции сливаются, и мы построим треугольник $O'D'E'$ находим сжимающее усилие S_1 , равное 5 tn и горизонтальную равнодействующую усилий S_2 и S_3 , равную 4 tn . Разлагая эту равнодействующую в горизонтальной плоскости проекций на направление OA и OB , найдем*

$$S_2 = S_3 = \sqrt{5} \text{ tn.}$$

При решении той же задачи способом проекций, проектируем все приложенные в точке O усилия на вертикальное направление. Предполагая усилие S_1 растягивающим, получим соответствующее уравнение равновесия в таком виде

$$P + S_1 \cos \alpha = 0.$$

Или принимая во внимание, что

$$P = 3\text{ tn} \text{ и } \cos \alpha = \frac{3}{5},$$

получаем для S_1 найденное выше сжимающее усилие 5 tn .

Для получения S_2 и S_3 проектируем все приложенные в O силы на направление биссектора угла AOB . Соответствующее уравнение напишется так

$$S_1 \sin \alpha + 2 S_2 \cos \beta = 0.$$

Вставляя вместо S_1 найденное выше значение -5 tn и принимая во внимание, что

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}; \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

получим для S_2 и S_3 найденное выше значение.

Чтобы получить усилие S_1 способом моментов, составляем момент всех приложенных в точке O сил относительно оси AB . Тогда получим такое уравнение равновесия

$$4 (P + S_1 \cos \alpha) = 0,$$

откуда и находится прежнее значение для S_1 .

195) *Определить усилия S_1 , S_2 , и S_3 вызываемые в брусках 1, 2, и 3 (черт. 400) вертикальной силой P . Сначала разлагаем силу P на направление 1 и направление OD линии пересечения вертикальной плоскости, идущей через направление 1 с плоскостью 2, 3. Горизонтальная проекция этой линии совпадает с направлением 1. Вертикальная ее проекция построится при помощи точки D, D' . На фиг. (б) в вертикальной плоскости выполнено разложение силы P на направ-*

вления 1 и $O'D'$ и получена вертикальная проекция $R_{2,3}$ равнодействующей усилий 2 и 3. Разлагая ее на направления 2 и 3, получаем вертикальные проекции усилий S_2 и S_3 . В горизонтальной плоскости проекций усилия S_1 , S_2 и S_3 должны составлять замкнутый треугольник при чем усилие S_1 должно по величине равняться горизонтальной проекции равнодействующей $R_{2,3}$. На основании этих соображений построен треугольник abc . Таким образом находится все проекции иско- мых усилий S_1 , S_2 и S_3 .

Чтобы получить усилие S_1 способом моментов, составим момент всех приложенных в узле O сил относительно оси BC , пересекающей направления 2 и 3. При составлении этого момента выгодно разложить усилие S_1 на две составляющие, параллельную оси BC и перпендикулярную ей. Только последняя составляющая равная $S_1 \sin \beta$ войдет в уравнение моментов, которое получит такой вид

$$P \cdot f + S_1 \sin \beta \cdot h = 0.$$

196) *Определить усилия S_1 , S_2 и S_3 , возникающие в стержнях 1, 2 и 3 под действием горизонтальной силы P (черт. 401).* Решим задачу способом проекций. Сначала разложим горизонтальную силу на составляющие N , направленную вертикально, и Q , направленную по стержню 2 (черт. 402, фиг. а). Для этих составляющих получаем значения

$$Q = \frac{P}{\cos \alpha}; N = P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Вертикальную силу N , в свою очередь, разложим на направление стержня 1 и горизонтальное направление. Соответственно этому получим (фиг. б)

$$S_1 = -\frac{N}{\sin \alpha} = -\frac{P}{\cos \alpha}; R = N \operatorname{ctg} \alpha = P.$$

Обращаясь теперь к стержням 2 и 3, заключаем, что в стержне 3 вызывается сжимающее усилие составляющей R , а в стержне 2 вызывается растяжение как силой R , так и ранее найденной силой Q . На основании этого находим

$$S_2 = Q + R \operatorname{ctg} \beta = \frac{P}{\cos \alpha} + P \operatorname{ctg} \beta; S_3 = -\frac{P}{\sin \beta}.$$

197) *Найти усилие S_1 , вызываемое в стержне 1 силой P (черт. 403).* Хотя в узле O сходятся четыре стержня, но три из них лежат в одной плоскости и потому в четвертом стержне OA , отдельно направленном, усилие может быть найдено. Сначала разлагаем силу P на направление стержня OB и горизонтальное направление H . Далее составляющую H разложим на направления 1 и 4. После такого разложения все усилия, приложенные к O , за исключением составляющей, направленной по OA , расположатся в одной плоскости BOD . Следовательно, составляющая, направленная по стержню OA и даст нам усилие в этом стержне.

198) Определить способом моментов усилие S_1 , вызываемое в стержне OA горизонтальной силой H (черт. 104). За ось моментов примем линию BC . Горизонтальную силу H разложим на две составляющие одну параллельную оси BC и другую ей перпендикулярную. Только последняя составляющая, равная $H \sin \alpha$, войдет в уравнение моментов. Усилие S_1 в точке A разложим на вертикальную составляющую V_1 и горизонтальную составляющую, лежащую в плоскости ABC . Только первая из этих составляющих будет давать относительно BC момент, отличный от нуля. Обозначая возвышение узла O через h и длину стержня OA через l_1 , будем иметь

$$V_1 = S_1 \cdot \frac{h}{l_1}$$

Уравнение моментов напишется так

$$S_1 \frac{h}{l_1} \cdot e_1 - H \sin \alpha \cdot h = 0.$$

199) Указать для системы, представленной на чертеже (405), те стержни, которые не работают при действии вертикальной нагрузки в узле A . Начнем рассмотрение системы с узлов a, b, c, \dots верхнего кольца. Все эти ненагруженные узлы имеют по четыре стержня, при чем три из них лежат в одной плоскости, следовательно, в четвертом стержне, отдельно направленном, усилие должно равняться нулю. Таким образом мы доказываем, что все стержни верхнего кольца не работают. Устранив эти стержни, находим, что в каждом из узлов верхнего кольца остается лишь по два стержня и так как в этих узлах внешних сил нет, то во всех этих стержнях усилия равны нулю. Таким образом, все стержни верхнего яруса купола не работают, и мы можем устранить их из системы. После этого обращаемся к стержням второго яруса и тем же приемом показываем, что лишь в стержнях, отмеченных на горизонтальной проекции жирными линиями, будут действовать усилия, отличные от нуля. Подобные же рассуждения можно применить и к стержням нижнего яруса купола.

Если в системе диагонали расположены так, как это показано на чертеже (406), то для выяснения стержней с нулевыми усилиями обращаемся к узлам a, c и e верхнего кольца. Здесь имеется в каждом узле по три стержня, не лежащих в одной плоскости, и так как внешней нагрузки нет, то усилия в этих стержнях равны нулю. Устраняя неработающие стержни из системы, мы находим, что и в остальных узлах верхнего кольца остается лишь по три стержня, тоже не лежащих в одной плоскости, которые при отсутствии внешних сил работать не будут. Следовательно, и при новом расположении диагоналей все стержни верхнего яруса не работают, если имеется нагрузка лишь в узле A . Устранив неработающие стержни, мы можем перейти к следующим ярусам купола и установить, что отличными от нуля будут усилия в стержнях, отмеченных на чертеже жирными линиями.

200) Отметить стержни с нулевыми усилиями в системе, составленной на чертеже (407). На систему действует лишь одна горизонтальная сила H . В узлах b , c , d и e сходятся по четыре стержня, из которых три лежат в одной плоскости, а четвертый отдельно направлен. Так как внешних сил в этих узлах нет, то усилия в отдельно направленных стержнях должны равняться нулю, и мы заключаем, что стержни bc , cd , de и ac не работают при действии силы H . Отбросив эти стержни, мы видим, что в узлах c , d , e осталось лишь по два стержня, и так как внешних сил к этим узлам не приложено, то усилия в оставшихся стержнях должны равняться нулю. Нулю будет равняться и усилие ae . т. е. все остальные усилия в узле a и внешняя сила H лежат в одной плоскости. Таким образом, в верхнем ярусе системы будут работать лишь стержни, лежащие в плоскости передней грани, взятой нами пятигранной призмы ¹⁾. Обращаясь теперь к стержням нижнего яруса, легко покажем, что и здесь отличными от нуля будут лишь усилия в стержнях передней грани, отмеченных на чертеже жирными линиями.

201) Указать стержни с нулевыми усилиями в мостовой пространственной ферме, подвергающейся действию системы вертикальных нагрузок, приложенных к нижним узлам передней грани (черт. 408). Система составлена из двух плоских раскосных ферм, связанных между собой связями в плоскости верхней и нижней грани призмы и диагоналями a_1f и e_1l . Покажем прежде всего, что в связях, соединяющих две плоские фермы, усилия, при заданных внешних нагрузках, будут равны нулю. Начнем с рассмотрения узлов c_1 и h_1 . В них все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости. Следовательно, в отдельно направленных стержнях cc_1 и hh_1 усилия равны нулю. Из тех же соображений находим, что равны нулю усилия в распорках gg_1 и bb_1 . Устраняя эти стержни с нулевыми усилиями и повторяя прежние соображения, мы легко докажем равенство нулю усилий во всех распорках и диагоналях верхней и нижней грани призмы, а также в диагоналях a_1f и e_1l .

После этого система распадается на две плоские фермы и так как внешние силы расположены в плоскости передней грани, то только стержни передней плоской фермы и будут работать.

§ 54. Разложение силы на шесть направлений.

Когда приходится решать задачу о равновесии сил, любым образом расположенных в пространстве, в нашем распоряжении имеется шесть уравнений статики. Сумма проекций всех взаимно уравновешивающихся сил на каждую из трех координатных осей должна равняться нулю и сумма моментов сил относительно этих осей также равняется нулю. Если в эти уравнения будут входить

1) При выбранном направлении сил H стержень aa_1 также не работает

шесть неизвестных, то мы для них получим, вообще говоря, вполне определенные решения. Соответственно этому можно сделать заключение, что разложение заданной силы на направления, любым образом расположенные в пространстве, приводят нас к определенному решению, если число этих направлений равно шести. Когда число направлений больше шести, задача становится неопределенной. При числе направлений меньшем шести уравновешивание заданной силы будет возможным при соблюдении некоторых дополнительных условий.

Задача о разложении силы на шесть заданных направлений, любым образом расположенных в пространстве, играет при расчете пространственных систем такую же важную роль, как вопрос о разложении на три направления при расчете плоских ферм.

Для решения этой задачи обычно пользуются способом моментов, аналогичным приему Риттера, который мы применяли при расчете плоских ферм. Для упрощения решения выгодно принимать за оси моментов линии, пересекающие возможно большее число заданных направлений. Тогда в соответствующие уравнения равновесия будут входить лишь усилия, направления которых не пересекаются с выбранной осью.

В самом общем случае мы всегда можем найти для каждого четырех направлений по две линии, которые все эти направления пересекают ¹⁾. Выбирая эти линии за оси моментов, мы будем получать уравнения равновесия, каждое из которых включает лишь две неизвестных. Во многих частных случаях удастся достигнуть дальнейшего упрощения задачи, выбирая за оси моментов линии, пересекающие пять из шести заданных направлений. Соответствующее уравнение в таком случае будет содержать лишь одну неизвестную величину. Подобный случай мы будем, например, иметь, если три из заданных направлений пересекаются в одной точке. Через эту точку всегда можно провести прямую, пересекающую еще два из шести заданных направлений. Если эту прямую принять за ось моментов, то сейчас же получаем уравнение с одним неизвестным усилием. Возьмем, например, представленный на чертеже 409 случай прикрепления сооружения к фундаменту при помощи шести опорных стержней. Чтобы получить усилие S_6 , вызываемое в стержне 6 силой H , нужно взять за ось моментов

¹⁾ Доказательство этого см. Fürpl. Die graphische Statik, 2-е изд., стр. 172.

линию ab , пересекающую пять стержней. Соответствующее уравнение равновесия напишется так:

$$H \cdot h - S_6 b = 0.$$

Подобное же упрощение решения задачи мы будем иметь и в том случае, если три из заданных шести направлений лежат в одной плоскости. В самом деле, пусть направления 1, 2 и 3 лежат в одной плоскости. Найдем точки пересечения этой плоскости с направлениями 4 и 5. Ясно, что линия, соединяющая эти точки, пересечет все пять направлений и, если ее принять за ось моментов, то в соответствующее уравнение равновесия войдет лишь усилие, относящееся к направлению 6. Возьмем, например, случай, представленный на чертеже (410). Чтобы определить усилие, вызываемое в стержне 6 силой P , мы воспользуемся тем обстоятельством, что стержни 1, 2 и 3 лежат в одной плоскости и выберем за ось моментов линию ab , соединяющую точки пересечения этой плоскости со стержнями 4 и 5. Соответствующее уравнение равновесия будет заключать лишь одну неизвестную—усилие в стержне 6.

В тех случаях, когда четыре из шести направлений попарно расположены в двух плоскостях, линия пересечения которых параллельна пятому направлению, мы выбираем эту линию за ось моментов. В соответствующее уравнение равновесия войдет лишь усилие по направлению 6. Рассмотрим, например, случай прикрепления сооружения шестью опорными стержнями, представленный на чертеже (411). Чтобы получить усилие S_6 , вызываемое в стержне 6 горизонтальной силой H , мы примем за ось моментов линию bb_1 , по которой пересекаются плоскости стержней 1, 2 и 3, 4. Эта линия в нашем случае вертикальна и параллельна стержню 5. При составлении моментов относительно этой линии придется считаться только с силой H и с горизонтальной, составляющей усилия S_6 . Соответствующее уравнение равновесия напишется так:

$$H \cdot l + S_6 \sin \alpha \cdot h = 0.$$

В тех случаях, когда плоскости, в которых расположены пять из шести опорных стержней параллельны, мы можем воспользоваться способом проекций для определения усилия в шестом стержне. Предположим, что сооружение (черт. 412) прикреплено к фундаменту шестью стержнями. Три из них, стержни 1, 2 и 3, лежат в плоскости bc_1c_1 , а два стержня, 4 и 5—в параллельной ей плоскости ada_1d_1 . Чтобы найти усилие, вызываемое в стержне 6

горизонтальной силой H , направленной по a_1b_1 , проектируем все приложенные к сооружению усилия на направление ab . Соответствующее уравнение равновесия будет заключать лишь одну неизвестную S_6 и напишется так

$$H - S_6 \sin \alpha = 0.$$

Обратимся теперь к тем исключительным случаям, когда при разложении силы на шесть направлений соответствующие шесть уравнений равновесия не дают для неизвестных определенных решений. Этот результат будет получаться всякий раз, когда определитель уравнений равновесия обращается в нуль. Ему соответствует ¹⁾ обыкновенно то расположение направлений, при котором можно найти прямую, пересекающую все шесть направлений. Такого расположения стержней, очевидно, приходится избегать на практике, и здесь мы приводим несколько простых признаков, когда можно сразу сказать, что перед нами имеется исключительный случай.

Если шесть направлений расположены так, что пересекаются по три в двух точках, то мы будем иметь исключительный случай, потому что линия, проходящая через эти две точки, будет пересекать все шесть направлений, и момент относительно этой линии соответствующих усилий будет равен нулю. Равновесие возможно лишь в том случае, если заданная сила пересекает ту же линию.

Расположение стержней, представленное на чертеже 413, относится к этому случаю. Стержни 1, 2 и 3 пересекаются в одной точке a , остальные три стержня параллельны между собой. Линия ah , параллельная стержням 4, 5 и 6, будет играть роль оси, пересекающей все шесть направлений, при чем три из них в бесконечно удаленной точке.

Если больше трех направлений пересекаются в одной точке, мы также будем иметь исключительный случай, потому что через эту точку пересечения можно будет провести линию, пересекающую остальные направления. К этому случаю относится то расположение направлений, когда более трех из них параллельны друг другу. Например, расположение опорных стержней, принятое на чертеже (414), представляет собой исключительный случай. Проекция

¹⁾ Общее условие, определяющее исключительный случай, высказано Henneberg'ом. См: Graphische Statik, стр. 635, 429. Случай этот соответствует случаю пересечения трех направлений в одной точке при решении задачи о разложении силы в плоскости.

усилий во всех опорных стержнях на направление ab равны нулю и равновесие возможно лишь в том случае, если и внешние силы дают на ту же ось проекцию нуль.

Мы получим также исключительный случай, если больше трех направлений лежит в одной плоскости. Положим, например, что в одной плоскости лежат направления 1, 2, 3 и 4. Найдем точки пересечения этой плоскости с направлениями 5 и 6, тогда линия, соединяющая эти точки пересечения, будет пересекать все шесть направлений.

Отметим еще исключительный случай, когда пять из шести направлений располагаются в двух плоскостях, пересекающихся по линии, параллельной шестому направлению (черт. 415). Если выбрать за ось моментов направление 3, то момент усилий во всех шести брусках относительно этой оси будет равняться нулю. Равновесие будет возможно только при соблюдении дополнительных условий относительно действующих на сооружение внешних сил.

Избегая на практике перечисленных здесь частных случаев расположения стержней, мы, вообще говоря, придем к таким системам, при которых вопрос о разложении силы на шесть направлений получает вполне определенное решение¹⁾. Такой статической определенности задачи будет соответствовать также и геометрическая определенность. Выбранному расположению опорных стержней будет соответствовать жесткое соединение сооружения с фундаментом.

Задачи.

202) *Определить усилия, вызываемые горизонтальной силой H в опорных стержнях системы, представленной на чертеже (416). Разрезаем все шесть опорных стержней и действующие в них усилия S_1, S_2, \dots, S_6 находим из условий равновесия сооружения $abcd$. При этом проще всего воспользоваться уравнениями моментов. Выберем за ось моментов вертикальную линию aa_1 , пересекающую направления 1, 2, 3 и параллельную направлениям 4 и 5. При составлении момента всех приложенных к сооружению сил относительно этой оси придется взять лишь момент усилия S_6 и силы H . Соответствующее уравнение равновесия напишется так*

$$S_6 \cdot b \cos \alpha + Hl = 0.$$

¹⁾ Если, конечно, нам не попадет тот редкий случай, когда направления выбраны так, что усилие, действующее по одному из направлений, может быть уравновешено пятью силами, линии действия которых совпадают с остальными пятью направлениями. См. цитированную выше книгу Henneberg'a, стр. 635.

откуда

$$S_6 = -\frac{H}{\cos \alpha} \cdot \frac{l}{b}.$$

Выбирая за ось моментов линию dd_1 , мы таким же путем найдем

$$S_3 = \frac{H}{\cos \alpha} \cdot \frac{l}{b}.$$

Выберем теперь за ось моментов линию ad , пересекающую направления 1, 2, 3, и 6. Так как момент силы H относительно этой оси равняется нулю, то из соответствующего ур-ня равновесия находим, что

$$S_1 = -S_6.$$

Теперь, проектируя все приложенные к сооружению силы на вертикальную ось, находим

$$S_1 = -S_2.$$

Проектируя те же силы на направление ad , получаем ур-ие

$$(S_2 - S_1) \cos \beta + H = 0$$

откуда

$$S_2 = -S_1 = -\frac{H}{2 \cos \beta}.$$

Для получения усилия S_5 составим момент всех сил относительно оси ab . Соответствующее ур-ие равновесия напишется так

$$H \cdot h - S_5 \cdot b - S_6 \sin \alpha \cdot b = 0$$

и мы получаем

$$S_5 = H \cdot \frac{h}{b} + H \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{l}{b}.$$

Таким образом находятся усилия во всех опорных стержнях.

203) *Определить усилия в опорных стержнях при расположении, указанном в чертеже (417). Разрезаем все шесть опорных стержней, и соответствующие им усилия определяем из ур-ий равновесия. Составляя момент всех приложенных к сооружению сил относительно оси aa_1 , приходим к такому ур-ию¹⁾.*

$$S_5 \sin \alpha l = 0,$$

откуда

$$S_5 = 0.$$

Выбирая теперь за ось моментов линию bb_1 , пересекающую все направления, кроме направления 1, получаем

$$S_1 \cdot l = 0,$$

откуда

$$S_1 = 0$$

¹⁾ Стержень 5 расположен в вертикальной плоскости bc_1c_1 .

Составляя теперь момент всех сил относительно dd_1 , найдем

$$S_3 = 0.$$

Далее, выбирая за ось моментов линию dc , найдем

$$S_1 = 0.$$

После этого легко находим, что

$$S_2 = S_6 = -\frac{P}{2}.$$

204) Прямоугольная доска $abcd$ прикреплена к фундаменту шестью стержнями. Найти усилия, вызываемые в этих стержнях силой P (черт. 418). Разрезываем все стержни и составляем момент соответствующих им усилий и силы P относительно вертикальной оси aa_1 . Так как эта ось пересекает направления всех стержней, кроме направления 6, то соответствующее ур-ие равновесия будет заключать лишь одно неизвестное усилие S_6 , которое сейчас же и определяется. Подобным же образом, выбирая за ось моментов линию dd_1 , находим усилие S_3 . После этого обращаемся к определению усилий S_1 и S_2 . Сумму этих усилий найдем, составляя момент сил относительно оси c_1b_1 . Другое ур-ие для определения тех же усилий получим, составляя сумму проекций всех сил на направление c_1b_1 . После этого легко находим усилия S_4 и S_5 , выбирая за оси моментов линии ab и dc .

205) Треугольная доска abc прикреплена к земле шестью стержнями, расположенными попарно в трех вертикальных плоскостях (черт. 419). Найти усилия, вызываемые в опорных стержнях силой P . Для определения усилий в каждой паре опорных стержней мы можем составить по два ур-ия. Например, чтобы получить усилия S_1 и S_2 , мы составим одно ур-ие, выбрав за ось моментов линию bc , пересекajícíю оси остальных опорных стержней. Другое ур-ие, заключающее те же неизвестные, мы получим, выбирая за ось моментов линию oo пересечения плоскостей, заключающих направления 3, 4 и 5, 6. Подобные же ур-ия могут быть составлены также для усилий в двух других парах опорных стержней.

Та же задача может быть разрешена несколько иным путем. Мы можем разложить силу P и усилия в шести опорных стержнях на горизонтальные и вертикальные составляющие. Горизонтальные составляющие каждой пары стержней расположатся по одной прямой, и если мы горизонтальную проекцию силы P разложим в горизонтальной плоскости на направления de , fg и kl , то получим суммы горизонтальных проекций усилий в каждой паре опорных стержней. Для получения сумм вертикальных проекций тех же усилий нужно вертикальную проекцию силы P разложить на три вертикальные направления, проходящие через a , b и c . Имея горизонтальную и вертикальную проекции усилий в каждой паре опорных стержней, сейчас же находим и сами усилия.

206) Доска $abcd$ прикреплена к земле шестью стержнями (черт. 420). Определить усилия, вызываемые в этих стержнях силой P . Здесь же удается провести ось так, чтобы она пересекала направление пяти опорных стержней и нам для определения усилий в каждой паре стержней придется составить по два ур-ия, каждое из которых будет заключать по две неизвестных. Например, чтобы определить усилия b и 6 , выберем за ось моментов линию bb_1 , по которой пересекаются вертикальные плоскости, заключающая направления 1, 2 и 3, 4. В соответствующее ур-ие равновесия войдут лишь усилия S_1 и S_2 , не пересекающая направление bb_1 . Другое ур-ие, заключающее те же неизвестные, мы получим выбирая за ось моментов линию ef .

§ 55. Образование геометрически неизменяемых, статически определимых пространственных систем.

При исследовании пространственных систем мы сохраним в силе те предположения, которые были приняты нами в случае плоских ферм. Мы будем предполагать, что стержни пространственных систем соединены между собой в узлах идеальными шаровыми шарнирами, допускающими свободное вращение каждого из стержней, около шарнира в любом направлении. Изменения длин стержней под влиянием возникающих в них усилий будем считать весьма малыми и в основание расчетов будем класть то относительное расположение стержней и узлов, которое соответствует ненапряженному состоянию системы.

Внешние силы будем предполагать сосредоточенными в узлах системы. В таком случае отдельные стержни будут работать лишь на растяжение или сжатие. Изгиб стержней совершенно исключается.

Выясним прежде всего, какое число стержней является необходимым, чтобы связать заданное число точек, любым образом расположенных в пространстве, в одну геометрически неизменяемую систему. Для решения этого вопроса будем исходить из определенного способа образования пространственной системы. Мы сначала при помощи трех стержней соединим в неизменяемую систему три узла. При неизменной длине стержней относительное расположение вершин получаемого таким образом треугольника явится вполне определенным. К полученному жесткому треугольнику присоединяем четвертый узел при помощи трех стержней. Если эти стержни не расположены в одной плоскости, то получаемое таким образом присоединение нового узла будет геометрически неизменяемым. Присоединяя к этой системе пятый, шестой

и т. д. узлы, каждый тремя стержнями, не лежащими в одной плоскости, мы можем получить геометрически неизменяемую пространственную систему с любым числом узлов. Для этого способа образования легко установить связь между числом узлов и числом стержней, необходимых для обеспечения геометрической неизменяемости. Пусть общее число узлов равно n . Для соединения в неизменяемую систему первых трех узлов понадобилось 3 стержня. Для присоединения каждого из остальных $n - 3$ узлов нужно 3 стержня. Следовательно, общее число стержней будет равняться

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6 \dots \dots \dots (a)$$

Системы, образованные намеченным здесь способом, мы будем называть *простейшими системами*.

Эти простейшие системы заключают в себе лишь стержни, необходимые для обеспечения геометрической неизменяемости. Если устранить один из стержней, система становится подвижной, она обращается в механизм с одной степенью свободы. При этом относительное расположение узлов получает возможность изменяться. Мы можем устранить эту подвижность и получить новую геометрически неизменяемую систему, если вместо отброшенного стержня вставим новый стержень между двумя такими узлами, расстояние между которыми получило возможность изменяться.

Применяя этот способ замены стержней, возможно получить самые разнообразные пространственные системы, общее число стержней которых будет удовлетворять условию (a). Что касается геометрической неизменяемости таких систем, то она будет обеспечена, если только перед нами не будет тот исключительный случай, когда заменяющий стержень вставлен между двумя узлами, расстояние между которыми находится в состоянии *maximum'a* или *minimum'a*. В этом последнем случае малым перемещениям подвижной системы будет соответствовать изменение расстояния между соединяемыми заменяющим стержнем узлами на малую величину второго порядка малости, и, следовательно, тем малым изменениям длины заменяющего стержня, которые получаются при упругих деформациях, будут соответствовать значительные перемещения узлов системы. Такие системы, как геометрически изменяемые, не должны быть применяемы на практике.

Рассмотрим здесь еще один способ образования пространственных систем, которым иногда пользуются на практике. Мы

можем получить новую геометрически неизменяемую систему путем соединения между собой двух пространственных систем *простейшего типа*.

Легко выяснить то число стержней, которое необходимо для жесткого соединения между собой этих двух систем. Мы будем держать одну из этих систем неподвижной, тогда для жесткого присоединения второй системы необходимо эту последнюю лишить шести степеней свободы, чего можно достигнуть введением шести соединительных стержней.

К тому же числу соединительных стержней мы можем прийти и иным путем. Всякая сила, прикладываемая в одной из соединяемых жестких систем, должна уравниваться усилиями в соединительных стержнях. Усилия эти должны удовлетворять шести уравнениям статики и могут быть однозначно определены при всяком расположении внешних сил, если число соединительных стержней равно шести. Пользуясь шестью соединительными стержнями, мы, конечно, должны избегать тех исключительных случаев, которые были отмечены в предыдущем параграфе. Тогда мы получим жесткое соединение двух геометрически неизменяемых систем. Если одна из них имела n , а другая m узлов то общему числу $n + m$ узлов новой фермы будет соответствовать такое число стержней

$$3n - 6 + 3m - 6 + 6 = 3(n + m) - 6.$$

Т. е. соотношение между числом узлов и стержней новой фермы удовлетворяет условию (а).

Обратимся теперь к рассмотрению *сетчатых систем*, которыми пользуются при образовании различного рода куполов. Сетчатыми системами мы называем такие пространственные системы, узлы и ребра которых расположены по замкнутой поверхности, ограничивающей односвязное пространство ¹⁾. Если поверхность эта составлена из треугольников, расположенных так, что каждая из их вершин является вершиной для всех ее окружающих треугольников, то, принимая ребра многоугольника за стержни пространственной системы и углы — за узлы системы, найдем, что между числом стержней и узлов имеется зависимость, определяемая формулой (а). Т. е. число стержней как раз соответствует тому, которое является необходимым для обеспечения

¹⁾ Сюда не будет подходить, например поверхность, ограничивающая замкнутое кольцевое пространство.

геометрической неизменяемости системы. Для доказательства этого пользуемся теоремой Эйлера, устанавливающей для замкнутого многогранника, ограничивающего односвязное пространство, такую зависимость между числом ребер m , числом узлов n и числом граней f :

$$m = n + f - 2 \quad \dots \dots \dots (b)$$

Зависимость эту можем установить на основании таких соображений. Берем сначала какую либо грань многогранника. Этим самым мы берем определенное число ребер и такое же число узлов нашего многогранника. Присоединяя к выбранной грани многогранника новую грань, мы тем самым присоединяем новые ребра и новые углы. При чем число новых ребер, очевидно, всегда будет на единицу больше чем число новых углов, так как каждое ребро заключается между двумя углами. Это заключение можно сделать по отношению к каждой новой грани. Следовательно, число присоединяемых ребер будет равняться числу присоединяемых углов, увеличенному на число присоединенных граней: Это сохраняется в силе пока мы не дойдем до последней грани, замыкающей многогранник. Присоединение этой грани не прибавляет к нашему многограннику ни новых углов ни новых ребер. Подсчитывая теперь все ребра, углы и грани, мы приходим к формуле (b).

Применим теперь эту формулу к тому случаю, когда все грани многогранника являются треугольниками. Каждая грань ограничена тремя ребрами и так как одно и то же ребро принадлежит двум граням, то между числом ребер и числом граней получается такая зависимость

$$m = \frac{3f}{2} \quad \text{или} \quad f = \frac{2}{3} m.$$

Вставляя это в формулу (b), получаем

$$m = 3n - 6.$$

Т. е. приходим к зависимости, устанавливаемой формулой (a). Число стержней в сетчатой системе с треугольными гранями как раз равняется тому, какое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости. Только эти системы мы и будем в дальнейшем называть *сетчатыми*. Различные виды сетчатых систем представлены на чертеже (421). Непосредственным

счетом мы легко убедимся, что во всех представленных на чертеже случаях между числом стержней и числом узлов имеется зависимость, определяемая формулой (а). Если мы обратимся к системе, представленной на чертеже (422), то здесь, хотя все грани и разбиты на треугольники, но точка d не является общей вершиной для всех окружающих ее треугольников. Непосредственным счетом убеждаемся, что число стержней на единицу меньше того числа, которое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости. Если бы мы вставили еще один стержень ad , намеченный на чертеже пунктиром, то общее число стержней было бы достаточным для обеспечения геометрической неизменяемости. Но все же система при выбранном расположении стержней была бы не жесткой. Все стержни, сходящиеся в узле d , расположены в одной плоскости. При действии силы, перпендикулярной этой плоскости, узел d будет совершать значительные перемещения.

Мы показали, что число стержней, необходимое для обеспечения геометрической неизменяемости, определяется формулой (а). При большем числе стержней мы будем иметь систему с лишними брусками. В случае меньшего числа стержней система будет подвижной, и равновесие может быть обеспечено лишь при соблюдении некоторых дополнительных условий относительно действующих сил.

Покажем теперь, что системы, удовлетворяющие условию (а), будут не только геометрически неизменяемыми, но также и статически определимыми. В самом деле, при определении усилий в стержнях мы можем поочередно рассмотреть условия равновесия всех узлов системы. Для каждого узла составим три уравнения равновесия. Таким образом, для пространственной фермы, имеющей n узлов, мы получим систему $3n$ линейных уравнений. В эти уравнения войдут как внешние силы, так и неизвестные усилия в стержнях. Внешние силы, действующие на систему, не могут быть выбраны произвольно, они должны удовлетворять шести условиям равновесия всей системы, рассматриваемой как твердое тело. В таком случае для определения усилий в стержнях остается в нашем распоряжении $3n - 6$ уравнений, из которых и могут быть найдены $3n - 6$ неизвестных усилий в стержнях.

Если число стержней больше, чем $3n - 6$, число неизвестных усилий будет больше числа уравнений — система статически неопределима. Когда число стержней меньше $3n - 6$, мы для определения соответствующих им усилий используем не все уравнения статика.

Вставляя найденные усилия в неиспользованные уравнения, мы получим дополнительные условия, которым должны удовлетворять внешние силы, чтобы была обеспечена возможность равновесия системы.

Когда число стержней системы удовлетворяет условию (а), но уравнения равновесия, из которых определяются неизвестные усилия, таковы, что их определитель обращается в нуль, мы получим для неизвестных усилий неопределенные или бесконечные значения. Это покажет нам, что исследуемая система представляет собой один из тех исключительных случаев, на которые мы указывали выше при рассмотрении способов образования пространственных систем.

Вычисление определителя в случае большого числа уравнений представляет большие затруднения, поэтому на практике для решения вопроса, не представляет ли заданная система исключительного случая, идут иным путем, именно определяют усилия во всех стержнях системы для одного какого-либо случая нагрузки. Если удастся доказать, что все эти усилия имеют вполне определенные значения, то это будет показывать, что определитель соответствующих уравнений в нуль не обращается, и наша система является геометрически неизменяемой. Проще всего предположить, что в узлах системы не приложено никаких сил. Если для этой нулевой нагрузки можно доказать, что усилия во всех стержнях равны нулю, то это нам покажет, что рассматриваемая система геометрически неизменяема.

Задачи.

207) Показать, что пространственные фермы, представленные на чертеже (423), принадлежат к классу простейших систем.

Все изображенные системы мы можем образовать, исходя из основного треугольника 1, 2, 3 и присоединяя остальные узлы в порядке их номеров, каждый тремя стержнями.

208) Выяснить способ образования системы, представленной на чертеже (424). Эта пространственная система составлена из двух заштрихованных на чертеже простейших систем, соединенных между собой шестью стержнями I...VI. Порядок образования простейших систем указан соответствующими номерами узлов.

209) Пользуясь способом замены стержней, обратит представленные на чертеже (425) системы в простейшие.

Если в системе, представленной на фигуре (а), выбросить стержень ab , то в узле a останется лишь три стержня. Устранив их, приходим к системе $cabef$; которая может быть обращена в простейшую установкой диагональ bc . Таким образом, замена стержня ab стержнем bc приводит нас к простейшей системе.

Обратимся теперь к системе, представленной на фигуре (b). Устраним сначала стержень ab . После этого в узлах a и b останется по три стержня, отбрасывая которые мы придем к системе $cdefgh$, которая обращается в простейшую путем установки диагонали cd , намеченной на чертеже жирным пунктиром. Таким образом замена стержня ab стержнем cd обращает заданную систему в систему простейшего типа. Того же результата можно достигнуть и иными путями. Мы можем, например, обратить заданную систему в простейшую, заменив диагональ af диагональю cd .

Чтобы обратить в простейшую систему, представленную на фигуре (c), приходится произвести две замены стержней. Мы начинаем с узла a и устраним стержни ab и ac . После этого в узле a остается лишь три стержня. Устраняя их, найдем, что в узлах d и e будет лишь по три стержня. Отбрасывая их, придем к подвижной системе, которая может быть обращена в геометрически неизменяемую систему простейшего типа путем установки диагоналей bg и fk . Таким образом замена стержней ab и ac стержнями bg и fk обращает заданную систему в простейшую.

210) Показать способом нулевых нагрузок, что система, представленная на чертеже (426), является геометрически неизменяемой. Так как все грани системы разделены на треугольники, то число стержней как раз равно тому, которое необходимо для обеспечения геометрической неизменяемости. Чтобы показать, что мы здесь не имеем исключительного случая, при котором система обладает подвижностью, докажем, что при отсутствии внешних сил, усилия во всех брусках равняются нулю. Обращаясь к узлу 1 и принимая во внимание, что в нем все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленном стержне 1—2 усилие непременно равно нулю. Точно также из рассмотрения узлов 3, 5 и 7 заключаем, что равны нулю усилия в стержнях 3—4, 5—8, 6—7. Разрежем теперь нашу систему плоскостью, параллельной боковым граням 3, 2, 6, 7 и 1, 4, 8, 5. При этом кроме стержней 2—1 и 3—4 с нулевыми усилиями будут пересечены еще шесть стержней. Составляя момент усилий во всех перерезанных стержнях относительно оси, соединяющей узлы 5 и 7 и приравнивая этот момент нулю, найдем, что усилие в стержне 2—4 должно равняться нулю. После этого легко может быть доказано равенство нулю усилий во всех прочих стержнях системы.

211) Показать, что система, представленная на чертеже (427), геометрически неизменяема и что она может быть обращена в простейшую заменой одного из стержней. Для доказательства неизменяемости системы воспользуемся способом нулевых нагрузок. При отсутствии внешних сил мы из условия равновесия узла 1 заключаем, что в отдельно направленном стержне 1—2 усилие должно равняться нулю. Обращаясь теперь к узлу 2, заключаем, что во всех стержнях, сходящихся в этом узле, усилия должны равняться нулю. Такое же заключение делаем относительно стержней узла 3. После этого легко доказать равенство нулю усилий всех остальных стержней. Чтобы за-

данную нам систему обратить в простейшую, нужно только вместо диагонали 2—4 вставить диагональ 1—5.

§ 56. Способы прикрепления пространственных систем к земле.

Чтобы геометрически неизменяемую пространственную систему неизменно связать с землей, нужно лишить эту систему шести степеней свободы, что может быть выполнено, как мы видели, введенной шесть опорных стержней. На практике прикрепление пространственных систем к фундаменту осуществляется обыкновенно при помощи особых опорных подушек. Мы будем различать три категории опор: 1) неподвижную опору, 2) подвижную цилиндрическую опору и 3) подвижную шаровую опору. Чтобы осуществить неподвижную опору, нужно себе представить закрепляемый шаровой шарнир системы вложенным в шаровую впадину неподвижной подушки. В таком случае центр закрепляемого шарнира остается совершенно неподвижным; и соответствующая опорная реакция, проходящая через центр шарнира может иметь любое направление в пространстве. Мы будем представлять такую реакцию тремя ее составляющими, для определения которых необходимо иметь три ур-ия.

Подвижную цилиндрическую опору мы осуществим, закрепив шаровой шарнир системы в подушке, расположенной на цилиндрических катках. Такая опора будет иметь возможность свободно перемещаться в направлении перпендикулярном оси катков. Соответствующая опорная реакция будет, очевидно, лежать в плоскости, перпендикулярной к направлению скольжения опоры, и мы ее сможем определить двумя составляющими, для вычисления которых понадобятся два ур-ия. Для осуществления подвижной шаровой опоры, нужно себе представить подушку, в которой закреплен опорный шаровой шарнир системы, расположенной на шаровых катках. В таком случае опорная подушка имеет возможность перемещаться по любому направлению в плоскости, параллельной плоскости катания шаровых катков.

Опорная реакция, которая должна проходить через центр опорного шарнира системы, будет иметь, очевидно, направление перпендикулярное к плоскости скольжения. Для определения реакций требуется лишь одно ур-ие статики.

Когда к земле прикреплена геометрически неизменяемая пространственная система, мы для определения опорных реакций

будем иметь шесть ур-ий статики, которые напишутся, как ур-ия равновесия твердого тела.

Если опоры системы устроены так, что число неизвестных, определяющих реактивные силы, равняется шести, то мы будем иметь систему статически определенную относительно опорных реакций. На основании сказанного заключаем, что, расположив геометрически неизменяемую систему на трех опорах, из которых одна опора неподвижная, другая подвижная, цилиндрическая и третья подвижная, шаровая, мы получим пространственную ферму, статически определенную относительно опорных реакций.

Только что рассмотренные три способа закрепления мы можем осуществлять также при помощи опорных стержней. Чтобы получить неподвижное закрепление какого либо шарнира системы, нужно соединить этот шарнир с землей тремя опорными стержнями, лежащими в одной плоскости. Устройство неподвижной опоры эквивалентно трем опорным стержням. Для получения закрепления, эквивалентного подвижной цилиндрической опоре, нужно соответствующий опорный шарнир прикрепить к земле двумя стержнями. Располагая стержни в плоскости, перпендикулярной к направлению скольжения соответствующей цилиндрической опоры, мы тем самым обеспечиваем закрепляемому шарниру возможность перемещений в надлежащем направлении ¹⁾. Для получения закрепления эквивалентного подвижной шаровой опоре, мы прикрепляем опорный шарнир к земле одним опорным стержнем. Направление этого стержня должно быть выбрано перпендикулярным к плоскости скольжения соответствующей шаровой опоры.

Всего для жесткого соединения геометрически неизменяемой системы с землей необходимо, как мы видели, шесть опорных стержней, которые должны исходить из узлов системы. Если все эти стержни распределены между тремя узлами, то один узел будет закреплен тремя стержнями, другой — двумя стержнями и третий — одним стержнем. Возможно, конечно, распределение опорных стержней и между большим числом узлов, но во всяком случае для получения жесткого соединения с землей, необходимо избегать тех расположений стержней, на которые было указано

¹⁾ Перемещения эти будут происходить по дуге круга, но принимая во внимание малость этих перемещений, мы их можем принимать эквивалентными перемещениями по прямой, касательной к кругу.

при рассмотрении вопроса о разложении силы на шесть направлений. При расчетах мы можем начинать с определения усилий в опорных стержнях. Производя разрез этих стержней и пользуясь способом моментов, мы легко найдем усилия в опорных стержнях и эти усилия будем рассматривать, как внешние силы, приложенные к рассчитываемой пространственной системе.

До сих пор мы различали стержни пространственной системы и опорные стержни, при помощи которых система прикрепляется к земле. Для обеспечения геометрической неизменяемости системы с n узлами нужно иметь, как мы видели, $3n - 6$ стержней. При соединяя сюда еще шесть необходимых опорных стержней, найдем что для образования геометрически неизменяемой пространственной системы, неизменно связанной с землей, необходимо при n узлах иметь $3n$ стержней. Теперь устраняем различие между опорными стержнями и стержнями системы. Тогда можно будет обобщить способ замены стержней, которым мы пользовались для образования новых пространственных ферм. Устраняя какой-либо стержень системы с необходимым числом стержней, мы обращаем эту систему в подвижную. Для восстановления геометрической неизменяемости можно устраненный стержень системы заменить дополнительным опорным стержнем.

Таким путем из жесткой системы, заключавшей в себе $3n - 6$ стержней и имевшей шесть опорных стержней, мы придем к новой пространственной системе, общее число стержней которой остается неизменным и равным $3n$, но число опорных стержней увеличено за счет числа стержней системы. Новая система, вообще говоря, будет геометрически неизменяемой и статически определимой, так как число ур-ий равновесия, которые мы можем составить, будет равняться числу неизвестных усилий в стержнях. Исключительные случаи будут получаться тогда, если мы вставим какой-либо заменяющий стержень между такими двумя точками, расстояние между которыми находится в состоянии максимум'a или минимум'a, или между точками, неизменность расстояния между которыми обеспечена другими стержнями системы.

Для распознавания исключительных случаев и здесь удобнее всего пользоваться способом нулевых нагрузок. Если можно показать, что при отсутствии внешних сил усилия во всех стержнях равны нулю, то это будет служить признаком того, что наша система геометрически неизменяема.

Задачи.

212) Показать, что при закреплении жесткой системы шестью опорными стержнями, из которых четыре параллельны между собой, мы всегда будем получать исключительный случай. Это расположение опорных стержней будет соответствовать тому частному случаю, когда направления четырех опорных стержней пересекаются в одной точке. При этом, как мы видели, (§ 54) всегда возможно провести ось, пересекающую направления всех шести опорных стержней. Например, в случае, представленном на чертеже (428), такой осью будет линия bb_1 .

213) Показать способ образования систем, представленных на чертежах (429). Система, представленная на фигуре (а), получена из сетчатой системы заменой диагоналей верхнего и нижнего оснований двумя дополнительными опорными стержнями. Поэтому мы сразу можем сказать, что общее число стержней равняется тому, которое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Чтобы показать что здесь мы не имеем исключительного случая, воспользуемся способом нулевых нагрузок. Обращаемся сначала к верхним узлам системы. В каждом из этих узлов имеем по три стержня, лежащих в одной плоскости, и по одному отдельно направленному стержню. При отсутствии внешних сил, усилий в отдельно направленных стержнях будут равны нулю. Отбрасывая эти стержни, найдем, что в каждом из верхних узлов a_1, \dots, a_i останется лишь по два стержня, усилия в которых очевидно будут равняться нулю. Теперь обратимся к нижним узлам a, \dots, d . После отбрасывания стержней с нулевыми усилиями, найдем, что в узле b сходятся лишь три стержня, не лежащих в одной плоскости. Так как внешней силы в этом узле не приложено, то усилия во всех трех стержнях должны равняться нулю. Подобное же заключение мы теперь можем сделать относительно стержней узла c , далее узла d и, наконец, узла a . Следовательно, при нулевых нагрузках усилия во всех брусках системы равны нулю и мы можем утверждать, что рассматриваемая система геометрически неизменяема.

Система, представленная на фигуре (b), получена из сетчатой системы путем замены четырех диагоналей верхнего и нижнего оснований четырьмя дополнительными опорными стержнями. На основании этого заключаем, что заданная система имеет необходимое число стержней. Пользуясь таким же приемом, как и в предыдущем случае, мы легко покажем, что при нулевых нагрузках усилия во всех стержнях равны нулю. Следовательно, заданная система геометрически неизменяема.

214) Показать, что пространственные мостовые фермы, представленные на чертеже 430, геометрически неизменяемы и статически определены. Мостовая ферма представленная на фиг (а), получена из сетчатой системы заменой диагонали ac дополнительными опорными стержнем. Следовательно, наша система включает в себе лишь необходимое число стержней. Для выяснения геометрической неизменяемости системы, воспользуемся способом нулевых нагрузок. Обращаясь к узлам b и f , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в стержнях ab и fc усилия равны нулю. После этого на основании

тех же соображений последовательно может быть доказано равенство нулю усилий в следующих стержнях: ce , de , de_1 , e_1d_1 , d_1f_1 , f_1e_1 , e_1a_1 , a_1b_1 , b_1a . Отбрасывая все эти стержни, найдем, что пространственная ферма распадается на две плоские раскосные фермы. Равенство нулю усилий во всех стержнях этих ферм также легко может быть доказано. Этим доказывается и геометрическая неизменяемость заданной нам фермы.

Система, представленная на фигуре (b), получена из сетчатой системы путем замены диагонали kc дополнительным опорным стержнем. Следовательно, общее число стержней удовлетворяет условию геометрической неизменяемости и статической определенности. Чтобы показать, что мы здесь не имеем дела с исключительным случаем, воспользуемся способом нулевых нагрузок. Покажем, прежде всего, что при отсутствии внешних сил усилия в горизонтальных опорных стержнях 3, 4 и 7 равны нулю. Для этого разрезаем все опорные стержни и составляем момент всех соответствующих усилий относительно вертикальной оси, проходящей через узел l . Из соответствующего уравнения равновесия найдем, что усилие в стержне 7 равно нулю. Проектируя теперь усилия в опорных стержнях на направления ab и ag , заключаем, что в стержнях 3 и 4 усилия также равны нулю. Обращаемся теперь к стержням kc и hd . Из условия их равновесия следует, что должны быть равны между собой усилия в полураскосах kl и lc , а также в полураскосах hf и fd . Из условий же равновесия узлов l и f следует, что эти усилия должны равняться нулю. После этого следует равенство нулю усилий в распорках kc и hd . Обращаясь теперь к узлам a, b, g и e , где все стержни, в то же время, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленных стержнях al , lb , gf и fe усилия должны равняться нулю. После этого заключаем о равенстве нулю усилий в полураскосах a_1l , lb_1 , g_1f и fe_1 . Обращаясь к верхним узлам b_1 и g_1 , заключаем, что в верхних распорках a_1b_1 и e_1g_1 , усилия равны нулю. Следовательно, равны нулю усилия и в прочих стержнях верхних горизонтальных связей. Отбрасывая все стержни с нулевыми усилиями, мы разделим нашу систему на две плоские фермы. Легко показать, что в стержнях этих ферм усилия будут равны нулю. Таким образом может быть доказано равенство нулю усилий во всех стержнях заданной пространственной системы, что указывает на геометрическую неизменяемость этой системы.

215) Показать, что купола, представленные на чертежах 405 и 406, являются геометрически неизменяемыми системами. Способом, наметенным в задачах 199 и 200, легко показать, что при нулевых нагрузках усилия во всех стержнях равны нулю. Следовательно, эти системы геометрически неизменяемы.

216) Показать геометрическую неизменяемость системы, представленной на чертеже (431). Мы пользуемся для этого способом нулевых нагрузок. В узлах b , d и f сходятся по три стержня, усилия в которых при отсутствии внешних сил будут равны нулю. Отбрасывая все эти стержни, приходим к трем узлам a , c и e , в каждом из которых будет сходить по четыре стержня. Если принять за ось моментов верти-

кальную линию пересечения плоскостей f_1ee_1 и c_1cd_1 , то легко показать равенство нулю усилий в стержне ab_1 . Таким же способом докажем равенство нулю усилий в ef_1 и cd_1 . После этого в узлах a , c и e останется лишь по три стержня, усилия в которых, очевидно, будут равны нулю.

217) Показать, что система, представленная на чертеже (432), геометрически изменяема. Система эта при четырех узлах имеет двенадцать стержней, т. е. как раз то число стержней, которое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Покажем, что здесь мы имеем дело с исключительным случаем. Для этого достаточно доказать, что при отсутствии внешних сил возможно удовлетворить условиям равновесия всех узлов системы, приняв усилия в некоторых стержнях отличными от нуля. В каждом из узлов системы, мы имеем по два стержня, лежащих в горизонтальной плоскости, и по два наклонных к горизонту стержня. При отсутствии внешних сил равнодействующая усилий в горизонтальных стержнях какого-либо узла должна уравниваться с равнодействующей усилий в соответствующих наклонных стержнях. Каждая из этих равнодействующих совпадет с линией пересечения горизонтальной плоскости $abcd$ с плоскостью, определяемой наклонными стержнями. На чертеже эти линии пересечения для всех узлов указаны пунктиром. Рассмотрим теперь стержни, сходящиеся в одном из узлов, например, в узле b . Если предположить, что в стержне ab имеется растягивающее усилие S , то из того условия, что равнодействующая усилий ab и bc должна иметь направление tn перпендикулярное к биссектору угла abc , находим для стержня bc сжимающее усилие $-S$. Повторяя те же рассуждения для узлов c и d , найдем в стержне dc усилие S и в стержне ad — усилие $-S$. Это последнее усилие с растягивающим усилием S стержня ab дадут в узле a равнодействующую, направленную по линии pq . Равнодействующие усилий горизонтальных стержней в каждом узле могут быть разложены по направлениям наклонных стержней. Таким образом для данной пространственной фермы можно подобрать систему отличных от нуля и взаимно уравнивающих усилий в стержнях. Это показывает, что заданная система геометрически изменяема. Легко видеть, что мы можем, уменьшая углы наклона плоскостей hac и gcf , сближать точки a и c . При этом узлы b и d будут удаляться друг от друга и подниматься над горизонтальной плоскостью основания.

218) Доказать геометрическую неизменяемость системы, представленной на чертеже (433). Пользуясь таким же приемом, как и в предыдущей задаче, легко покажем, что знаки усилий в стержнях ab , bc , . . . должны чередоваться. Если принять усилие стержня ab растягивающим, то в стержне bc будет сжатие, в cd — растяжение и т. д. Дойдя до последнего стержня ag , найдем в нем растягивающее усилие. Обращаясь теперь к узлу a , находим, что равновесие его возможно лишь в том случае, если растягивающие усилия в стержнях ab и ag равны нулю. В таком случае в нуль обратятся также и усилия прочих стержней, что будет указывать на геометрическую неизменяемость системы.

Сравнивая системы, представленные на чертежах (432) и (433), заключаем, что существенное различие между ними заключается в том, что в первом случае горизонтальные стержни образуют многоугольник с четным числом сторон, а во втором случае — нечетным. При четном числе сторон возможно подобрать усилия в стержнях так, что будет обеспечено равновесие всех узлов при отсутствии внешних сил. При нечетном числе сторон усилия во всех стержнях при отсутствии внешних сил должны равняться нулю. В первом случае имеем систему геометрически изменяемую, а во втором случае — геометрически неизменяемую.

§ 57. Расчет пространственных систем способом непосредственного разложения.

Способ определения усилий путем последовательного разложения особенно удобен в применении к расчету пространственных систем простейшего типа. В этих системах каждый новый узел присоединяется при помощи трех стержней, поэтому последний присоединенный узел будет иметь только три стержня, и если к узлу приложена какая-либо внешняя сила, то усилия в этих трех стержнях могут быть найдены путем разложения силы на три направления, пересекающиеся с ней в одной точке. Определив эти усилия, мы отбрасываем рассмотренный узел, и действие отбрасываемых стержней заменяем соответствующими силами. После этого обращаемся к узлу, присоединенному к системе предпоследним. После отбрасывания стержней последнего узла, в предпоследнем узле останется лишь три стержня, усилия в которых легко могут быть найдены путем разложения силы на три направления. Таким образом, рассматривая равновесие узлов в порядке, обратном порядку их присоединения при образовании рассматриваемой простейшей системы, мы для определения усилий в стержнях каждый раз должны будем решать элементарную задачу о разложении силы на три направления. Возьмем, например, систему, представленную на чертеже (434). Определение усилий начинаем с узла g , где сходятся лишь три стержня. Разлагая силу на три соответствующие направления, найдем усилия в стержнях fg , gd и ge . Теперь переходим к узлу f . Заменяя действие стержня fg соответствующим усилием, опять будем иметь лишь три стержня, усилия в которых найдутся путем разложения силы Q и усилия fg на соответствующие три направления. После этого переходим к узлу e и далее к узлам d , b , c и a . В каждом из узлов придется выполнить известную уже операцию разложения силы на три заданные направления.

В качестве второго примера рассмотрим определение усилий в стержнях куполов системы Шведлера, представленных на чертежах 405 и 406. Обе эти системы по числу стержней являются статически определимыми, так как они получаются из сетчатых систем путем замены трех диагоналей верхнего шестяугольника и трех диагоналей и шести сторон нижнего шестяугольника двенадцатью дополнительными опорными стержнями. Вместо шести опорных стержней, мы имеем здесь шесть неподвижных опорных точек, каждой из которых соответствует по три опорных стержня.

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда во всех узлах каждого яруса приложены одинаковые вертикальные силы. При этой симметричной нагрузке усилия во всех стержнях получаются особенно просто. Для этого достаточно рассмотреть лишь узлы, расположенные по одному какому-либо меридиану (чер. 435). Прежде всего из условий симметрии заключаем, что в диагоналях усилия будут равны нулю. Исходя из этого предположения, мы сможем определить усилия во всех стержнях так, что будут удовлетворены условия равновесия каждого узла. Так как наша система по числу стержней статически определима, то число уравнений, которые могут быть составлены для определения усилий в стержнях, равно числу неизвестных, и то решение их, которое мы получим, исходя из предположения равенства нулю усилий в диагоналях, будет единственным возможным и, следовательно, соответствующим действительности.

Определение усилий начнем с верхнего узла a , где приложена вертикальная сила P_1 . Разлагая эту силу на направление ab и горизонтальное направление, получим усилие R_1 (фиг. с), действующее в верхнем стержне ab меридиана, и равнодействующую H_1 усилий в сходящихся в узлу a горизонтальных стержнях верхнего пояса. Теперь переходим к следующему узлу b меридиана. Для него внешними силами будут сила P_2 и усилие R_1 , передаваемое стержнем ab . Разлагая их равнодействующую на горизонтальное направление стержня bc (фиг. с), найдем сжимающее усилие R_2 в этом стержне и равнодействующую H_2 в соответствующих горизонтальных стержнях. Точно также из условий равновесия узла c найдем усилия R_3 и H_3 . Наконец, разлагая в узле d усилие R_3 на горизонтальное и вертикальное направления, найдем горизонтальную составляющую опорной реакции H . Для получения вертикальной составляющей V той же реакции, нужно к вертикальной составляющей R_3 присоединить

силу, равную и прямо противоположную нагрузке P_1 . Теперь для получения остальных усилий остается только разложить силы H_1 , H_2 и H_3 на направленные соответствующих горизонтальных стержней, что и выполнено на фигуре (d).

Определение усилий в стержнях куполов Шведлера мы сможем выполнять при любой нагрузке, если будем уметь находить эти усилия в случае нагружения одного только узла. Предположим что имеется вертикальная нагрузка в узле A (черт. 405 и 406). Прежде всего отбрасываем стержни с нулевыми усилиями. После этого останутся лишь стержни, отмеченные на чертежах жирными линиями. Усилия в этих стержнях найдутся путем последовательного разложения. Начиная с узла A , мы каждый раз будем встречаться или с задачей о разложении силы на три направления, не лежащие в одной плоскости, или на два направления, лежащие в одной плоскости с разлагаемой силой.

В рассмотренных куполах мы предполагали лишь одну систему диагоналей. В действительности в каждой из трапеций, на которые разбита поверхность куполов, располагается обыкновенно по две взаимно перекрещивающихся диагонали. Таким образом получаются системы по числу стержней статически неопределимые. При расчете этих систем обыкновенно упрощают задачу, исходя из предположения, что диагонали обладают весьма малой жесткостью и не могут воспринимать значительных сжимающих усилий. Пренебрегая этими сжатиями, сохраняют при решении задачи лишь ту систему диагоналей, которой соответствуют растягивающие усилия. Таким образом приходит к рассмотренным выше статически определенным системам¹⁾.

Задачи.

219) Определить усилия в стержнях крана (черт. 436), осуществленного в виде пространственной фермы. Ферма эта представляет собою сетчатую систему, и потому, мы сразу можем сделать заключение, что число стержней ее равно тому, которое необходимо для обеспечения геометрической неизменяемости. Определение усилий начнем с узла a , где приложена внешняя сила P . Усилия в сходящихся к этому узлу стержнях найдутся путем разложения силы P на три направления ab , ac и ad . Отбрасываем эти стержни и действие их на

¹⁾ В случае рассмотренной выше симметричной нагрузки купола обе системы диагоналей работают на сжатие. При малой жесткости диагоналей можно пренебречь воспринимаемыми ими сжимающими усилиями, и тогда мы приходим к изложенному выше решению.

оставшую систему заменим соответствующими силами. После этого в узлах b , c и d останется по четыре стержня, из которых три лежат в одной плоскости. В отдельно направленном стержне каждого узла усилие может быть найдено из уравнения равновесия, которое получается путем проектирования всех приложенных к этому узлу усилий на направление перпендикулярное плоскости трех других стержней. Определив таким образом усилия в стержнях bc , cd и bd , мы теперь можем найти усилия прочих стержней, сходящихся в узлах b , c и d . В том же порядке может быть произведено определение усилий и в прочих стержнях системы.

220) *Определить усилия в стержнях крана, представленного на чертеже (437) в аксонометрической и ортогональных проекциях.* Легко видеть, что этот кран представляет собой простейшую систему, прикрепленную к земле шестью опорными стержнями, и потому определение стержневых усилий путем последовательного разложения не встретит никаких затруднений. Особенно просто решается задача, если сила, приложенная в узле f (фиг. a), располагается в вертикальной плоскости симметрии всего сооружения. Обращаясь тогда к проекции системы на эту плоскость (фиг. b), определим соответствующие усилия, как для плоской фермы. Таким образом найдутся усилия в стержнях gd и df , лежащих в плоскости симметрии. Для стержней наклонных к этой плоскости мы получим при этом значения равнодействующих усилий для каждой пары симметрично расположенных стержней, так как из условий симметрии непосредственно следует, что эти равнодействующие лежат в плоскости симметрии и проектируются без искажения. Для получения усилий останется только каждый раз разложить эти равнодействующие на два соответствующие направления. Наконец, чтобы получить усилия в стержнях, перпендикулярных к плоскости симметрии, придется сделать соответствующее разложение в горизонтальной плоскости. В диагонали bc усилие будет равно нулю.

Обратимся теперь к тому случаю, когда приложенная в узле f сила имеет произвольное направление. Эту силу мы всегда можем разложить на две составляющих, из которых одна будет лежать в плоскости симметрии сооружения, а другая будет направлена перпендикулярно к этой плоскости. Усилия, вызываемые первой составляющей, найдутся способом, указанным выше, и нам остается рассмотреть лишь усилия, вызываемые в стержнях системы силой, перпендикулярной плоскости симметрии.

Начнем с выяснения тех стержней, в которых при этих условиях усилия равны нулю. Прежде всего покажем, что для рассматриваемого случая нагрузки равны нулю усилия в опорных стержнях 1 и 2 (фиг. a). Разрезаем все шесть опорных стержней и выбираем за ось моментов линию lm , пересекающую прочие опорные стержни и параллельную внешней силе. Из соответствующего уравнения равновесия заключаем, что если усилия 1 и 2 отличны от нуля, то их равнодействующая должна иметь направление параллельное lm . За вторую ось моментов выберем вертикальную линию, проходящую через f и представляющую собой, как это видно из фигуры (c), линию пересечения плоскостей

опорных стержней 3, 4 и 5, 6. Соответствующее уравнение моментов приводит нас к заключению, что равнодействующая усилий 1 и 2 должна равняться нулю, следовательно, нулю равны и эти усилия. В таком случае в остальных трех стержнях 10, 11 и 12, сходящихся в узле g , усилия также должны равняться нулю. Из условия равновесия узла f , где внешняя сила лежит в одной плоскости со стержнями 14 и 15, заключаем, что усилие в отдельно направленном стержне 13 будет равно нулю. Такое же заключение сделаем относительно стержня 7 на основании рассмотрения узла a . Отбросив стержни с нулевыми усилиями, обращаемся теперь к определению усилий в остальных стержнях системы. Сначала определим опорные реакции, возникающие в точках l и m . Реакции эти, лежащие в вертикальных плоскостях 3, 4 и 5, 6, уравнивают силу, приложенную в точке f . Очевидно, эта точка будет общей точкой пересечения всех трех сил. Таким образом определяется направление реакций l и m . Горизонтальная и вертикальная проекции этих усилий находятся из чертежа (d), где P —приложенная в f внешняя сила, перпендикулярная плоскости симметрии сооружения, а направления l_1 , m_1 и l_2 параллельны направлениям $l_1 f_1$ в $m_1 f_1$ фигуры (c) и направлению $l_2 f_2$ фигуры (b). На том же чертеже, проведенная линия, параллельная линии $e_2 f_2$ фигуры (b), находит проекцию усилий в стержнях 14 и 15. На фигуре (c) разложением реакции l найдены горизонтальная и вертикальная проекции усилий в стержнях 3 и 4. Таким же образом найдутся усилия в стержнях 5 и 6. Теперь мы можем перейти к узлам s и e , где осталось лишь по три стержня с неизвестными усилиями. Соответствующие построения выполнены на фигуре h . Вертикальная проекция соответствующего многоугольника сил является общей для обоих узлов. Горизонтальная проекция, расположенная выше, относится к узлу s , а другая—к узлу e . Направления все взяты из фигур (b) и (c). Построение проекций соответствующего многоугольника сил здесь упрощается вследствие того, что направление стержня 18 перпендикулярно к плоскости проекций. Теперь нам остается найти лишь усилия в стержнях 16, 17 и 9, что может быть выполнено на основании рассмотрения узлов a и b .

221) *Определить усилия, возникающие в стержнях купола Шведлера под действием сил, приложенных в трех последовательных узлах каждого кольца и направленных в одну точку (черт. 438).* Определение усилий начинаем с узла a . Приложенную в этом узле силу P_a разложим на две составляющих, одну из которых W_a направим горизонтально (фиг. b), а другую Q_a направим по стержню aa_1 . После этого горизонтальную составляющую W_a , в свою очередь, разложим на направления горизонтальных стержней ab и af . Составляющая, направленная по af даст нам непосредственно усилие в этом стержне, так как прочие силы располагаются в плоскости ac . bb_1 , заключающей все остальные стержни. Тем же путем мы находим усилия и в прочих стержнях верхнего кольца $abcdef$. После этого сейчас же могут быть найдены усилия и в остальных стержнях верхнего яруса, так как в каждом из верхних узлов останется лишь по два стержня с неизвестными ус-

линии. Например, для узла a неизвестными являются усилия в aa_1 и ab . Составляющая Q_a передается непосредственно стержню aa_1 . Что же касается составляющей, имеющей направление ab и усилия в стержне ab , то при рассмотрении узла a обе эти силы придется разложить на направления ab , и aa_1 в плоскости грани $aa_1 bb_1$. Таким путем найдем усилия в стержне aa_1 и в диагонали ab_1 .

Определив усилия во всех стержнях верхнего яруса, переходим к узлам кольца $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$. Здесь придется принять во внимание не только силы, приложенные в этих узлах, но также и найденные уже усилия, замещающие действие стержней верхнего яруса.

Так, например, при рассмотрении узла a_1 , кроме силы P_{a_1} , нужно принять во внимание усилия в стержне aa_1 и в диагонали $a_1 f$. С силой P_{a_1} и усилием стержня aa_1 поступаем также, как о силе P_a в узле a . Что же касается усилия в диагонали $a_1 f$, то его разлагаем на направление $a_1 f_1$ и направление aa_1 . Усилие в стержне $a_1 f_1$ кольца $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ составит из четырех слагаемых, из только что найденной составляющей в направлении $a_1 f_1$ усилия диагонали $a_1 f$ и из трех усилий, вызываемых соответственно силой P_{a_1} , усилием стержня aa_1 и составляющей усилия в диагонали $a_1 f$ по направлению aa_1 . Эти три усилия найдутся тем же путем, как это мы делали при разыскании усилия стержня af верхнего кольца. Повторяя такое же разложение во всех узлах многоугольника $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$, мы найдем усилия во всех его стержнях и после этого можем приступить к определению усилий в прочих стержнях второго яруса.

222) *Определить усилия, вызываемые в пространственной мостовой ферме (черт. 439) горизонтальной силой H .* Система эта получена из сетчатой системы путем введения вместо диагонали ed дополнительного опорного стержня. По числу стержней, следовательно, система будет статически определимой. Отметим прежде всего стержни с нулевыми усилиями. Из рассмотрения узла d , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленном стержне ed усилие будет равно нулю. На тех же основаниях заключаем, что нулю будут равняться усилия в стержне $e_1 d_1$, $d_1 d_1$, $e_1 c_1$, $c_1 f_1$, $d_1 f_1$ и $c_1 d_1$. Обратимся теперь к усилиям в опорных стержнях 2, 3 и 6. Перерезывая опорные стержни и проектируя все приложенные к сооружению силы на направление ae , найдем, что усилие в стержне 3 равно нулю.

Применяя теперь способ моментов и выбирая за оси моментов линии aa_1 и ce_1 , найдем для стержней 2 и 6 сжимающие усилия $\frac{H}{2 \cos \gamma}$. Определим теперь усилия в поперечных связях системы. Из условия равновесия узла f_1 найдем для стержня $f_1 c_1$ сжимающее усилие— H . После этого из условий равновесия узлов c_1 , a_1 и b_1 , найдем в стержне $a_1 c_1$ растяжение, равное $\frac{H}{\cos \gamma}$; в стержне $a_1 b_1$ —сжатие— H ; в стержне $a_1 b_1$ —растяжение $\frac{H}{\cos \beta}$. Из равновесия узлов e , c , f и b на-

ходим в стержне cc —растяжение, равное $\frac{H}{2\cos\alpha}$, в fc —сжатие равно—
 $\frac{H}{2}$, в fb —растяжение $\frac{H}{2\cos\alpha}$ и, наконец, в ab —сжатие— $\frac{H}{2}$. Опреде-
 лив таким образом усилия в связях, мы сводим дальнейший расчет к
 определению усилий в двух плоских фермах под действием сил, ука-
 занных на чертеже 440. После этого могут быть найдены усилия в
 вертикальных опорных стержнях системы. То обстоятельство, что мы
 получаем для всех стержней вполне определенные усилия, указывает
 на геометрическую неизменяемость системы.

223) *Определить усилия, вызываемые в пространственной мостовой
 ферме (черт. 441) горизонтальными силами, приложенными к верхним
 узлам.* Система эта получена из сетчатой системы путем замены двух
 недостающих диагоналей верхней и нижней грани двумя дополни-
 тельными опорными стержнями. Расчет начинаем с определения усилий
 в связях, соединяющих главные мостовые фермы. На основании рас-
 смотра узлов k и h , где все стержни, кроме одного, лежат в одной
 плоскости, заключаем, что в распорках kb и hc усилия должны равняться
 нулю. Теперь из условия равновесия узлов c , g , d , e , b , a заключаем,
 что нулю должны равняться усилия во всех стержнях нижних связей.
 Переходим теперь к верхним связям. Из условий равновесия узлов h_1
 и k_1 заключаем, что в распорках h_1c_1 и k_1b_1 действует сжимающее
 усилие— P . Рассматривая теперь узлы c_1 , g_1 , d_1 , f_1 и e_1 , найдем в ди-
 агонали c_1g_1 —растяжение $\frac{P}{\cos\alpha}$, в распорке g_1d_1 —сжатие— $2P$, в ди-
 агонали d_1f_1 —растяжение $\frac{2P}{\cos\alpha}$, в распорке f_1e_1 —сжатие— $2,5P$, в
 диагонали fe_1 —растяжение $\frac{2,5P}{\cos\beta}$. Далее из рассмотрения узлов b_1 , l_1 ,
 a_1 заключаем, что в диагонали b_1l_1 действует растяжение $\frac{P}{\cos\alpha}$, в
 распорке l_1a_1 —сжатие— $1,5P$ и в диагонали a_1b_1 —растяжение $\frac{1,5P}{\cos\beta}$.

Определив таким образом усилия во всех стержнях связей, мы сводим
 задачу к расчету двух плоских ферм, усилия в стержнях которых мо-
 гут быть найдены без всяких затруднений.

224) *Определить усилия в стержнях пространственной мостовой
 фермы, представленной на чертеже 442.* Легко видеть, что эта система
 может быть получена из сетчатой системы и имеет число стержней,
 необходимое для обеспечения геометрической неизменяемости. Как и
 в предыдущей задаче определение усилий следует начать со стержней
 связей и потом разбить систему на две плоские фермы.

§ 58. Расчет пространственных систем путем разложения их на плоские фермы.

В тех случаях, когда пространственная система включает
 лишь необходимые стержни, число ур-ий статики, которые могут
 быть составлены для определения усилий в стержнях, равняется

числу неизвестных, и потому вопрос об определении усилий, если нет какого либо исключительного случая, должен получить однозначное решение. Предположим, что вам удалось найти такую систему усилий в стержнях заданной пространственной фермы, при которой соблюдены условия равновесия всех узлов. Тогда, в силу высказанного выше соображения относительно однозначности решения, найденная нами система усилий и представит собой единственное возможное решение задачи. Особенно просто можно найти систему усилий, удовлетворяющих условиям равновесия всех узлов, в том случае, когда заданная пространственная система образована так, что плоские грани ее представляют собой статически определимые плоские фермы, узлы которых, расположенные по ребрам, являются общими для ферм двух соприкасающихся граней.

Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 443. Система эта составлена из статически определимых плоских ферм, расположенных по граням призмы. Подобного рода системы применяются при постройке газгольдеров, лесов и т. д. Для определения усилий, возникающих в стержнях системы под действием какой-либо силы P , мы разлагаем эту силу на две составляющие. Одну из этих составляющих Q направляем по ребру призмы (фиг. б), а другую H — направляем горизонтально. Силу H , в свою очередь, разлагаем в горизонтальной плоскости на составляющие, направленные по ребрам ab и ae . Пользуясь теми элементарными соображениями, которые применялись при расчете пространственных систем непосредственным разложением, мы легко покажем, что составляющая силы P , направленная по вертикальному ребру призмы, вызовет усилия лишь в стержнях этого ребра. Составляющая, направленная по ab , вызовет усилия лишь в стержнях плоской фермы $aba_2 b_2$ и, наконец, составляющая, направленная по ae , будет вызывать усилия лишь в стержнях плоской фермы $aea_2 e_2$. Таким образом, определение усилий, вызываемых в стержнях пространственной системы отдельными составляющими силы P , сводится к расчету плоских ферм и не может представить никаких затруднений. Полные усилия в стержнях вертикального ребра aa_2 получатся путем сложения усилий, вызываемых отдельными составляющими.

Подобным же образом может быть выполнен расчет и в том случае, когда на систему действует не одна, а несколько сил. Каждую из сил придется разложить на три составляющих, из

которых одна направится вертикально по соответствующему ребру, а две другие горизонтально в плоскостях двух соответствующих граней.

Когда все приложенные к системе силы лежат в плоскости одной из граней, которая представляет собой жесткую, надлежачим образом опертую плоскую ферму, усилия, отличные от нуля будут получаться лишь в стержнях этой фермы. Например, для сетчатой системы, представленной на чертеже 444, при действии сил в плоскости передней грани, работать будут лишь стержни плоской фермы совпадающей с передней гранью¹⁾.

Рассмотрим теперь случай, когда не все плоские фермы, на которые распадается пространственная система, имеют опоры, на которые могут быть непосредственно переданы приходящиеся на ферму усилия.

Возьмем, например, трехгранную сетчатую систему, прикрепленную к земле шестью стержнями, как это показано на чертеже 445. Боковые грани $bcdc$ и $acdf$ этой системы представляют собой жесткие плоские фермы с неподвижными опорами в точке b и подвижными опорами в точках f и e . Силы, приложенные в плоскости одной из этих граней, будут вызывать усилия лишь в стержнях соответствующей плоской фермы, опертой по концам. Обратимся теперь к случаю, когда силы лежат в плоскости верхней грани $abef$. Соответствующая плоская ферма передает приходящиеся на нее усилия опорам при посредстве двух других плоских ферм. Определение усилий начинаем со стержней фермы $abef$ и пользуемся при этом способом непосредственного разложения. Из рассмотрения узла a , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленном стержне ab усилие должно равняться нулю. Переходя теперь к узлу b , на основании таких же соображений, заключаем, что в стержне bg усилие равно нулю. Обращаясь теперь последовательно к узлам g , h , k , l , f , находим в распорке gh —сжатие $-P$, в раскосе hk —растяжение $\frac{P}{\cos \alpha}$, в распорке kl —сжатие $-2P$, в раскосе lf —растяжение $\frac{2P}{\cos \alpha}$ и в распорке fe —сжатие $-2P$. Определив таким образом усилия во всех стержнях фермы $abef$ и приложив эти усилия к боковым фермам $bcdc$ и $acdf$, приводим задачу по опре-

¹⁾ Что в данном случае система геометрически неизменяема и решение, следовательно, однозначно, можно показать способом замены стержней. Вставляя вместо диагонали ab стержень mn , мы обращаем нашу систему в простейшую.

делению усилий в прочих стержнях к расчету двух плоских ферм, опертых по концам.

Рассмотрим теперь пространственное покрытие ¹⁾, представленное на чертеже (446). Система эта от купола Шведлера отличается тем, что в каждой грани вместо диагонали помещается два раскоса, что дает возможность более выгодно устроить опоры системы. В точках $A_1 \dots F$ расположены шаровые опоры, а в точках m, n, p, q, r, s — цилиндрические, при чем направление скольжения последних указано на плане черточками ²⁾. Таким образом, общее число опорных стержней 18. Двенадцать дополнительных опорных стержней введено взамен трех диагоналей верхнего шестиугольника и девяти диагоналей нижнего двенадцатиугольника. По числу стержней предлагаемая система является, следовательно, статически определимой и нам нужно только убедиться, не имеем ли мы здесь какого-либо исключительного случая. Для этого воспользуемся способом нулевых нагрузок. Если при отсутствии внешних сил можно будет доказать, что усилия всех стержней равны нулю, то это укажет нам на геометрическую неизменяемость системы.

Воспользуемся для этого способом Фёррл'я. Вырежем из системы один из треугольников, имеющих своими основаниями стороны верхнего шестиугольника, например, треугольник afq (фиг. б): У шарнира a мы перережем при этом три стержня ab, ar и aA . Равнодействующая соответствующих усилий будет лежать в плоскости грани $abAB$. Так как эта равнодействующая должна уравниваться усилиями стержней af и aq , расположенных в плоскости грани $AafF$, то линия Aa пересечения двух смежных граней и представит собой линию действия равнодействующей R_1 трех усилий в перерезанных стержнях шарнира a . На основании таких же соображений заключаем, что в шарнире f равнодействующая R_2 усилий в трех перерезанных стержнях fe, fp и fF должна иметь направление fF . Наконец, в шарнире q , где при отсутствии внешних нагрузок опорная реакция должна иметь направление AQ , равнодействующая R_3 усилий в перерезанных стержнях также будет направлена по AQ . Выделенный треугольник afq

¹⁾ Система эта впервые была предложена А. Фёррл'ем. См. D. Fachw. i. R., стр. 93—100. Дальнейшее развитие ее принадлежит Schlink'у. См. Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1904 г., стр. 183.

²⁾ При таком устройстве опор горизонтальные реактивные силы могут появиться лишь в точках m, n, p, q, r, s . При указанных направлениях скольжения эти горизонтальные силы лежат в плоскостях стоек, на которые опирается купол.

находится в равновесии под действием трех сил R_1 , R_2 и R_3 , лежащих в одной плоскости и не пересекающихся в одной точке. Равновесие этой системы возможно лишь в том случае, если каждая из сил в отдельности равна нулю. Из равенства нулю силы R_1 сейчас же заключаем, что в стержнях af и aq усилия равны нулю. Точно также усилие $f'q$ равно нулю вследствие равенства нулю силы R_2 . Таким же образом может быть доказано равенство нулю усилий в стержнях всех прочих треугольников, имеющих своими основаниями стороны верхнего шестиугольника. После этого сейчас же заключаем о равенстве нулю усилий в ребрах Aa , \dots fF и во всех стержнях нижнего кольца.

Доказав, таким образом, геометрическую неизменяемость заданной системы, обратимся теперь к определению усилий, вызываемых в системе какой-либо силой P , приложенной в узле a (черт. 447). Для этого прежде всего отмечаем те стержни, в которых при заданной нагрузке будут нулевые усилия. Пользуясь приемом, примененным сейчас для доказательства геометрической неизменяемости системы мы легко покажем, что отличными от нуля будут лишь усилия стержней, указанных на чертеже жирными линиями. Таким образом, задача сводится к расчету двух плоских ферм $AafF$ и $BbaA$. Вырезывая мысленно из системы треугольник afq , мы на основании прежних рассуждений устанавливаем, что равнодействующая сил, приложенных к точке f , имеет направление fF . Точно также равнодействующая усилий, приложенных к вершине q выделенного треугольника, будет иметь направление qF . Из условий равновесия треугольника afq заключаем, что равнодействующая усилий, приложенных к вершине a , должна проходить через точку F , где пересекаются две названные раньше равнодействующие. Очевидно, что направление aF , намеченное на чертеже пунктиром, представит также направление равнодействующей усилий в стержнях af и aq . Идя тем же путем, найдем, что равнодействующая усилий в стержнях ab и ar имеет направление aB . Разложим теперь силу P на три направления Aa , aF и aB . Первая составляющая даст нам усилие в бруске Aa , вторая — равнодействующую усилий af и aq и третья — равнодействующую усилий ab и ar . Производя разложение силы aF на направления af и aq и силы aB на направления ab и ar , найдем усилия в соответствующих стержнях. Теперь, обращаясь к узлам f и b , мы сейчас же, путем построения соответствующих треугольников сил, найдем усилия fF' , $f'q$, br и Bb . Наконец, рассматривая

нижние опорные узлы F , A и B и разлагаем в них известные уже усилия стержней Ff , Aa и Bb каждое на три направления. найдем вертикальное опорное давление в соответствующем узле и усилия в сходящихся к этому узлу стержнях нижнего кольца. Разность усилий в стержнях Aq и qF даст нам величину горизонтальной составляющей реакции опоры q . Вертикальная составляющая той же реакции при ненагруженном узле q будет равняться нулю, так как все стержни узла q лежат в одной плоскости. Подобным же образом найдутся реактивные усилия опор p , r и s .

Если сила P приложена в одном из нижних узлов, соответствующих цилиндрическим опорам, например, в узле q (черт. 448), то прежним способом докажем, что во всех треугольниках, имеющих основаниями стороны верхнего шестиугольника, кроме треугольника afq , усилия в стержнях будут равны нулю. После этого легко доказывается равенство нулю усилий в целом ряде других стержней, показанных на чертеже тонкими линиями. Отличными от нуля в рассматриваемом случае будут лишь усилия в стержнях показанных жирными линиями. Выделяя треугольник afq , мы прежним способом покажем, что равнодействующая усилий перерезанных стержней у вершины a направлена по Aa , у вершины f по fF . В точку S , где эти направления пересекаются, должна идти сила, приложенная к выделенному треугольнику в вершине q . Эта сила уравнивается, очевидно, с усилиями в стержнях aq и fq . Обращаясь теперь к узлу q , мы разлагаем силу P на две составляющие, из которых одна пойдет по линии Sm , а другая расположится в вертикальной плоскости, проходящей через направление AF . Первая из этих составляющих, после надлежащего разложения, даст нам усилия в стержнях aq и fq . Пользуясь этими усилиями, мы из рассмотрения узлов a и f найдем усилия стержней aA , af и fF . Разлагая усилия aA и fF в узлах A и F , найдем соответствующие вертикальные опорные давления и усилия в горизонтальных стержнях нижнего многоугольника.

Если бы сила была приложена в одном из нижних узлов, соответствующих шаровым опорам, то при этом получилось бы лишь соответствующее опорное давление, и усилия в двух сходящихся к нагруженному узлу стержнях нижнего многоугольника. В остальных стержнях усилия при этом равны нулю.

Кроме намеченного здесь графического расчета купола Förrl'a возможно решение той же задачи аналитическим путем. Предпо-

ложим, что в узлах системы приложены любые нагрузки P_1, P_2, P_3, \dots (черт. 449). Для определения усилий в двух каких-либо раскосах например, в раскосах aq и fq , мы сейчас же можем составить два ур-ня, пользуясь способом моментов. Первое ур-ие мы получим, если вырежем из системы узел q и составим момент всех усилий в перерезанных стержнях и опорной реакции относительно оси параллельной AF и лежащей в вертикальной плоскости проходящей через AF . Легко видеть, что в это ур-ие войдут лишь усилия в интересующих нас стержнях aq и qf .

Для составления второго ур-ия вырежем из системы узлы a и b сожмнутым сечением, указанным на чертеже пунктиром. Все перерезанные при этом стержни, кроме aq и qf , лежат в плоскостях граней $ABab$ и $AFaf$, пересекающихся по линии ST . Если мы составим момент усилий во всех перерезанных стержнях относительно оси ST , то в соответствующее ур-ие равновесия, кроме моментов заданных нагрузок, войдут лишь искомые усилия в стержнях aq и qf .

Определив таким путем усилия в раскосах, мы можем теперь найти усилия в стержнях верхнего кольца и в ребрах Aa, Bb, \dots

Для этого придется в верхних узлах a, b, c, \dots произвести разложения уже известных усилий на три направления, направления двух горизонтальных стержней верхнего кольца и направление соответствующего ребра. Определение усилий в стержнях нижнего кольца и реактивных усилий не представит теперь никаких затруднений.

Заметим здесь, что рассмотренное покрытие представляет собой простейший случай вупола Förrl'я. Увеличивая число раскосов в каждой грани и число ярусов, мы можем получить более сложные покрытия той же системы. Покрытия эти рассчитываются намеченными здесь приемами ¹⁾.

В рассмотренных задачах плоские фермы, на которые распа-даются пространственные системы, являются геометрически неизменяемыми. Такие случаи, где некоторые из этих ферм являются по числу стержней не жесткими, рассмотрены нами в качестве задач предыдущего параграфа.

¹⁾ Несколько численных примеров с подробными решениями имеется в цитированной выше книжке Schlink'a „Statik der Raumfachwerke“, стр. 288, 315. См. также П. Рабцевич „Купольное покрытие Коммерческого Института в Киеве“, Киев, 1914 г.

Задачи.

225) *Определить усилия, вызываемые в стержнях шестигранной призматической системы горизонтальными силами P (черт. 450).* Система эта имеет двенадцать опорных стержней. Шесть из них вставлены вместо недостающих шести диагоналей верхнего и нижнего оснований призмы. Следовательно, по числу стержней система является статически определенной. Из рассмотрения равновесия узлов фермы заключаем, что отличными от нуля могут быть лишь усилия в стержнях плоских ферм $abde$ и $acfe$.

Разлагая внешние силы P на горизонтальные составляющие, расположенные в плоскостях этих ферм (фиг. а), приводим задачу к расчету плоских ферм, представленных на фигурах (b) и (c). Получающиеся при этом усилия показаны на чертеже. Полные усилия для стержней ребра ae получатся сложением усилий, указанных на фигурах (b) и (c).

226) *Определить усилия в стержнях пирамидальной пространственной системы, представленной на чертеже (451).* Система эта получена из сетчатой путем замены диагоналей верхнего и нижнего оснований пирамиды двумя дополнительными опорными стержнями. Следовательно, по числу стержней система статически определима. Из рассмотрения равновесия узлов системы сейчас же заключаем, что под действием силы P будут возникать усилия лишь в стержнях плоских ферм $abef$ и $adhe$. Для нахождения этих усилий, разлагаем силу P на три составляющие. Одну из них направим по ребру ae , а две другие—по направлениям ab и ad . Первая из этих составляющих вызовет лишь сжатие в стержнях ребра ae . Для определения усилий, вызываемых двумя другими составляющими, придется рассчитать плоские фермы $abfe$ и $adhe$.

227) *Определить усилия, вызываемые силой P в стержнях системы, представленной на чертеже 452.* Система эта получена из сетчатой путем замены шести диагоналей верхнего и нижнего оснований шестью дополнительными опорными стержнями. Следовательно, по числу стержней система является статически определимой. Определение усилий начинаем со стержней верхней части, представляющей собой купол Шведлера. Когда эти усилия будут найдены, мы обращаемся к нижней призматической части, которая может быть рассчитана путем разложения на плоские фермы. Силами, действующими на эту часть, явятся усилия стержней верхней части.

228) *Определить усилия, возникающие в стержнях двускатного покрытия (черт. 453) под действием горизонтальной силы P .* Вместо двух распорок и трех диагоналей в плоскости $abcd$ трехгранной сетчатой системы, здесь вставлено пять дополнительных опорных стержней. На основании рассмотрения узлов g , h , e и f заключаем, что в соответствующих им опорных стержнях усилия равны нулю, и нам придется считаться лишь с опорными стержнями, выходящими из узлов a , b , c и d . Силу P , параллельную направлению ab , разлагаем по направлениям gh и be . Каждая из этих составляющих будет воспринята

соответствующей плоской фермой. Таким образом, дальнейшее определение усилий сводится к расчету плоских ферм.

229) *Определить усилия в стержнях трехъярусных купольных покрытий, представленных в плане на фигурах (а) и (б) черт. 154.* Нижний ярус купола, представленного на фиг. (а), является рассмотренной ранее системой купола Förrl'a—Schlink'a.

При помощи стержней нижнего яруса узлы A, B, C и D неизменно связываются с фундаментом. К этим узлам, как к неподвижным опорным точкам, прикреплено двухъярусное пирамидальное покрытие $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, геометрическая неизменяемость которого, при неподвижности точек $ABCD$, является доказанной. Мы получаем таким образом геометрически неизменяемое трехъярусное покрытие, расчет которого следует начинать с верхних двух ярусов. Рассчитав эти два яруса способом разложения на плоские фермы, мы обращаемся к нижнему ярусу, для которого найденные усилия в стержнях, сходящихся к узлам A, B, C и D , являются внешними силами. После этого нижний ярус может быть рассчитан графическим или аналитическим приемами, изложенными выше.

Трехъярусный купол, представленный в плане на фигуре (б), составлен следующим образом. Верхний ярус представляет собой покрытие системы Förrl'a—Schlink'a. Средний ярус образован опорными стержнями, поддерживающими верхний ярус. В отличие от того, что мы видели ранее при изложении способов расчета системы Förrl'a—Schlink'a, здесь опорные стержни расположены в наклонных плоскостях, которые не совпадают с соответствующими гранями верхнего и нижнего яруса. Но это не меняет общего хода расчета этой системы. Нижний ярус опять представляет собой геометрически неизменяемую систему Förrl'a—Schlink'a.

230) *Наметить ход расчета двухъярусного купола, представленного на чертеже (155).* Кружками отмечены шаровые опоры и черточками—направление скольжения цилиндрических. У нас имеется восемь шаровых и четыре цилиндрических опоры. Соответствующее число опорных стержней равно шестнадцати. Общее число стержней системы удовлетворяет условию статической определенности, так как эта система может быть получена из сетчатой системы путем замены диагоналей верхнего основания и девяти диагоналей нижнего основания десятью дополнительными опорными стержнями.

Наметим теперь ход расчета системы при действии какой-либо силы P в узле A . Так как к верхним узлам купола никаких сил не приложено, то в стержнях верхнего яруса, представляющего собой уже рассмотренную простейшую систему Förrl'a—Schlink'a, все усилия равны нулю. Обращаясь теперь к нижнему ярусу, представляющему собой более сложную систему Förrl'a—Schlink'a, мы прежде всего, пользуясь прежним приемом, выясним в каких стержнях усилия равны нулю. На чертеже стержни с нулевыми усилиями нанесены тонкими

1) Ранее мы предполагали, что шаровые и цилиндрические опоры располагаются на горизонтальных плоскостях скольжения.

линиями. Чтобы доказать равенство нулю усилий в стержнях правой грани нижнего яруса, мы вырезаем часть системы так, как это указано пунктиром, и исследуем условия равновесия выделенной части (фиг. б). Пользуясь прежними рассуждениями, докажем, что равнодействующии R_1 и R_2 усилий в стержнях, перерезанных у вершин D и C , будут иметь направление DD_1 и CC_1 . В нижних опорных узлах m и m_1 направления R_3 и R_4 равнодействующих усилий в перерезанных стержнях и опорных реакций будут иметь направление D_1C_1 . Чтобы выделенная часть оставалась в равновесии, необходимо положить

$$R_1 = 0, R_2 = 0, R_3 + R_4 = 0.$$

Отсюда следует равенство нулю усилий во всех стержнях выделенной части, отмеченных тонкими линиями. Подобным же образом доказывается равенство нулю соответствующих усилий в стержнях верхней грани. После чего сейчас находим, что усилие в бруске CC_1 должно равняться нулю, а следовательно, равны нулю и усилия в сходящихся к узлу C_1 стержнях нижнего многоугольника. Обратимся теперь к определению усилий в стержнях граней A_1ADD_1 и A_1ABB_1 . Для этого выделяем из грани A_1ADD_1 часть $ADpp_1$ при помощи сечения, указанного пунктиром. На основании известных соображений сейчас же заключаем, что равнодействующая усилий в стержнях, перерезанных у узла D , имеет направление DD_1 , а соответствующие равнодействующие в узлах p и p_1 имеют направление A_1D_1 . Из условий равновесия выделенной части заключаем, что равнодействующая усилий, приложенных к ней в узле A , должна проходить через точку D_1 , где пересекаются названные выше направления DD_1 и A_1D_1 . Путем таких же рассуждений убеждаемся, что равнодействующая усилий, приложенных к узлу A соответствующей части левой грани, должна иметь направление AB_1 . Направление AD_1 дает нам направление равнодействующей усилий в стержнях Aq и Ap , а направление AB_1 определяет линию действия равнодействующей усилий в стержнях Ar и As . Теперь мы можем разложить силу P на три направления AA_1 , AD_1 и AB_1 . Первая составляющая дает нам непосредственно усилие в стержне AA_1 . Вторая составляющая после разложения, даст нам усилия Aq и Ap и, наконец, третья составляющая определит собой усилия стержней Ar и As . Обращаемся теперь к выделенной части грани ADA_1D_1 . Найденная нами сейчас сила, направленная по AD_1 , должна уравновешиваться с усилием DD_1 и направленной по A_1D_1 суммой усилий, приложенных к выделенной части в узлах p и p_1 . Путем соответствующего разложения мы сейчас же найдем усилия в стержне DD_1 и далее из рассмотрения узла D найдем усилия в стержнях Dq и Dp_1 . После этого из рассмотрения узла q будут найдены усилия в стержнях, qr и qp_1 . Таким же образом найдутся усилия в соответствующих стержнях грани ABA_1B_1 . Определение давлений на опоры может быть также выполнено без всяких затруднений.

Если силы приложены не только в узле A , но также и в узлах B , C , D , то намеченным здесь способом можно определить усилия, вы-

зываются каждой из сил в отдельности и потом получить путем суммирования полные усилия в стержнях.

При расположении сил в верхних узлах a , b , c и d придется начать расчет с определения усилий в стержнях верхнего яруса. Усилия эти явятся внешними силами для нижнего яруса системы. Усилия, вызванные в стержнях нижнего яруса силами, приложенными в A , B , C и D , мы уже умеем находить и нам остается рассмотреть лишь случай действия сил в таких промежуточных узлах, как l , q , r и t .

Предположим, что сила P любого направления приложена в узле q (черт. 456); эта сила должна уравновешиваться усилиями в стержнях aq и dq верхней грани и усилиями в стержнях Aq , Dq , qr и qr_1 , расположенных в плоскости нижней грани $AA_1 DD_1$. Выделяя из системы треугольник add , мы путем прежних рассуждений заключаем, что усилия, приложенные к вершинам a и d направлены по aA и dD .

В точку S , где эти направления пересекаются, должна быть равнодействующая усилий в стержнях aq и dq . Определив направление Sq , мы обращаемся теперь к узлу q и заданную силу P разлагаем на две составляющие. Одну направим по линии Sq , а другую расположим в плоскости грани $AA_1 DD_1$. Первая составляющая даст нам после надлежащего разложения усилия в стержнях aq и dq , и далее из условий равновесия узлов a и d мы найдем усилия aA , aA и dD . Усилия стержней aA и dD явятся для нижнего яруса внешними силами, приложенными в узлах A и D . Эти силы вызовут усилия во всех стержнях нижнего яруса, отмеченных жирными линиями на фигуре (а). Как находить эти усилия уже было рассказано выше.

Обратимся теперь к составляющей Rq , лежащей в плоскости грани $AA_1 DD_1$ (фиг. б). Для определения усилий, вызываемых этой составляющей, мы выделим из системы часть $ADpp_1$ (фиг. с). На основании прежних рассуждений заключаем, что равнодействующие усилий, приложенных к вершинам A и D , имеют направления AA_1 и DD_1 . Усилия же, приложенные в p и p_1 , направлены по линии $A_1 D_1$. Если мы силу Rq разложим обычным способом на направления $AA_1 DD_1$ и $A_1 D_1$ (фиг. с) то составляющие, направленные по AA_1 и DD_1 дадут нам сразу усилия в соответствующих стержнях, и мы из рассмотрения узлов A и D найдем усилия стержнях Aq , Ap , Dq и Dp_1 . После этого из рассмотрения узла q найдем усилия в стержнях qr и qr_1 . Вычисление усилий в прочих стержнях не представит после этого никаких затруднений. Стержни, в которых при действии составляющей Rq получаются усилия, отличные от нуля, отмечены на фигуре (б) жирными линиями.

231) *Наметить ход расчета пространственного покрытия системы Форрѣя (черт. 457). Вид этой системы в аксонометрических проекциях представлен на фигуре а. В плане та же система представлена на фиг. (б). На фигурах с и d представлено устройство опор на попережных стенах здания; при чем числа, поставленные у этих опор, обозначают числа опорных стержней, могущих заменить каждую из опор. Опора С неподвижна. Опора C_1 расположена на цилиндрических катках, ось которых перпендикулярна к продольным сторонам здания. Остальные опоры расположены на шаровых катках. Число опорных стержней, со-*

ответствующих продольным стенам здания, равно 14. Общее число опорных стержней равно $14 + 5 + 4 = 23$. Число стержней системы равно 82, следовательно, общее число всех стержней $82 + 23 = 105$ равно утроенному числу 35 узлов системы.

Покрытие составлено из жестких плоских ферм, которые, вследствие указанного выше закрепления точек C и C_1 , имеют у опорного многоугольника $ABCDE$ неподвижную, а у многоугольника $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ — подвижную опоры. Что данная система геометрически неизменяема, проще всего доказать способом нулевых нагрузок. При отсутствии внешних сил усилия в отдельно направленных брусках ab , bc , cd и de равны нулю. Нулю равны также усилия во всех опорных стержнях продольных стен. Обращаемся теперь к стержням фермы $ABA_1 B_1$. Исходя из условий равновесия узла a , заключаем, что сходящиеся к этому узлу раскосы должны иметь усилия равные по величине и противоположные по знаку. Если мы через S обозначим усилие в раскосе af , принадлежащем половине фермы $abAB$, то в раскосе ag , принадлежащем части фермы $abA_1 B_1$, будет усилие $-S$. На основании рассмотрения других узлов фермы $ABA_1 B_1$ заключаем, что во всех раскосах половины $abAB$ должно быть одно и то же усилие S , а в раскосах половины $abA_1 B_1$ — усилие $-S$. Если мы теперь разрежем рассматриваемую ферму $ABA_1 B_1$ продольным сечением и все усилия в перерезанных стержнях спроектируем на направление AA_1 , то из условия равновесия отсеченной части AA_1 заключаем, что усилие S должно равняться нулю и, следовательно, в нуль обращаются усилия во всех брусках, рассматриваемой фермы. Таким же образом, докажем равенство нулю усилий всех прочих стержней пространственной системы.

Для определения усилий, вызываемых в стержнях покрытия какими-либо внешними силами, например, вертикальной силой P , приложенной в узле b , мы воспользуемся способом разложения пространственной системы на плоские фермы. Разлагая силу P на составляющие Q и R (фиг. с), лежащие в плоскостях ферм $ABA_1 B_1$ и $BCB_1 C_1$, мы сводим задачу об определении стержневых усилий к расчету двух плоских ферм раскосного типа. Ферма $ABA_1 B_1$ будет находиться под действием силы R . Соответствующие опорные давления отчасти передадутся на опоры B и B_1 , отчасти при посредстве стержней BC и $B_1 C_1$ передадутся на опоры C и C_1 . Ферма $BCB_1 C_1$ будут подвергаться действию силы Q . Для получения усилий в стержнях пояса BB_1 , являющегося общим для обеих ферм, придется суммировать усилия, получаемые при расчете каждой из ферм. Намеченный здесь ход расчета применим и в том случае, когда сила P не вертикальна, но лежит в плоскости перпендикулярной к продольным ребрам покрытия.

При произвольном направлении силы P , мы разлагаем ее на две составляющих. Одну из этих составляющих направляем по соответствующему ребру, а другую перпендикулярно этому ребру. Тогда усилия, вызываемые в стержнях системы второй составляющей, могут быть найдены намеченным выше способом и нам остается рассмотреть лишь усилия, вызываемые силой, направленной по ребру. Если сила действует по ребру CC_1 , то она передается неподвижной опоре C

Отличными от нуля будут лишь усилия в стержнях ребра CC_1 , лежащих между точкой C и точкой приложения силы.

При действии продольной силы по ребру BB_1 , появятся усилия лишь в стержнях плоской фермы $BCB_1 C_1$. Усилия эти могут быть найдены одним из тех приемов, которыми мы пользовались при расчете плоских ферм. Наконец, при действии силы по ребру AA_1 возникнут усилия в стержнях плоских ферм $ABA_1 B_1$ и $BCB_1 C_1$. Пользуясь соображениями, приводимыми выше для случая нулевых нагрузок, заключаем, что усилия во всех раскосах фермы $ABA_1 B_1$ будут по абсолютному значению равны $\frac{T}{6 \cos \alpha}$, где T —величина приложенной в узле b продольной силы (фиг. b). В части $abAB$ усилия в раскосах, при выбранном направлении T , будут сжимающими, а в части $abA_1 B_1$ —растягивающими. Имея усилия в раскосах, легко находим усилия прочих стержней фермы $ABA_1 B_1$.

Теперь остается рассчитать ферму $BCB_1 C_1$, для которой внешними силами являются уже найденные усилия, передаваемые стержнями фермы $ABA_1 B_1$.

232) Доказать геометрическую неизменяемость и наметить ход расчета зубчатого пространственного покрытия системы Жюинского (черт. 458). В точке A помещена неподвижная опора. В точках B и C помещены цилиндрические опоры допускающие свободное перемещение в направлении ABC . В точках C_1 и B_1 помещены шаровые опоры, допускающие свободное перемещение по любому направлению в горизонтальной плоскости. Наконец, в точке A_1 помещена цилиндрическая опора, допускающая свободное перемещение в направлении перпендикулярном к $A_1 C_1$. Общее число стержней системы равно $264 = 38 \times 3$, что удовлетворяет условию статической определимости. Геометрическую неизменяемость системы докажем способом нулевых нагрузок. Рассматривая нижние узлы фермы $CeC_1 e_1$ заключаем, что в горизонтальных соединительных стержнях, отмеченных пунктиром, усилия равны нулю. Теперь обращаемся к плоской грани $aceB$. Рассматривая узлы a и b , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что при отсутствии внешних сил в отдельно направленных стержнях ac и bd усилия будут равны нулю. После этого на основании таких же рассуждений заключаем из условий равновесия узлов c и d , что в раскосах cf и hd усилия также равны нулю. Тем же путем найдем нулевые усилия для всех раскосов и распорок плоской фермы $aceB$.

Применяя те же рассуждения, найдем нулевые усилия для раскосов и распорок граней $ace_1 B_1$, $klnn$ и $k_1 l_1 m_1 n_1$. После этого у нас остаются плоские фермы $CC_1 ee_1$, $BB_1 kk_1$, имеющие в B и C опоры неподвижные и в точках B_1 и C_1 —подвижные. Очевидно, во всех стержнях этих ферм, при отсутствии внешних нагрузок будут нулевые усилия. Нулевые усилия получатся также во всех опорных стержнях и соединительных стержнях AB , CB , Bl , $A_1 B_1$, $C_1 B_1$, $B_1 l_1$. Доказав таким образом геометрическую неизменяемость системы, обратимся к определению сил, вызываемых в стержнях системы какой либо нагрузкой.

например, силой P , приложенной в узле f . Силу эту разлагаем на две составляющие, расположенные в плоскостях CC_1ee_1 и $aceB$. Первая составляющая будет вызывать усилия в стержнях плоской фермы CC_1ee_1 , имеющей в C неподвижную и в C_1 —подвижную опоры. Вторая составляющая будет вызывать усилия в стержнях плоской фермы $aceB$, которая будет иметь неподвижную опору в точке B и подвижную в точке e . В стержнях ребра ae усилия, найденные для обеих плоских ферм, придется суммировать.

§ 59. Расчет опорного кольца.

В тех пространственных системах, которые мы до сих пор рассматривали, обыкновенно предполагалось, что опорные стержни шарнирно прикреплены к неподвижным опорным точкам. При расположении опорных точек на стенах перекрываемого помещения такой прием закрепления невыгоден, так как при этом стены здания будут подвергаться вредному действию опрокидывающих усилий: На практике стремятся дать опорам такое устройство, чтобы стены здания не испытывали давлений, перпендикулярных к плоскости стены. Для этого неподвижные опорные подушки заменяют цилиндрическими опорами, которые связывают между собой дополнительными стержнями, образующими опорное кольцо. Надлежащим выбором направления скольжения для цилиндрических опор можно достигнуть того, чтобы горизонтальные составляющие опорных давлений оказывали по возможности менее вредные влияния на стены здания.

Возьмем, например, статически определенную систему, представленную на чертеже 459, фиг. а. Чтобы придать горизонтальным составляющим опорных давлений определенные направления, по возможности более выгодные с точки зрения устойчивости стен, мы заменим неподвижные опорные точки a, b, c, d, e цилиндрическими опорами.

На фигуре b цилиндрические опоры заменены эквивалентными опорными стержнями, указанными пунктиром. Неподвижность системы обеспечена введением дополнительных стержней, образующих опорное кольцо. Если опорные стержни в каждой из вершин расположить в вертикальной плоскости, проходящей через одну из сторон кольца, то мы придем к расположению, указанному на фигуре b . При этом реактивные усилия, возникающие в вершинах a, b, c, d, e , будут для каждой вершины располагаться в плоскости одной из сходящихся в этой вершине стен. Направление скольжения опор отмечено на фигуре c черточками. При расчете

системы с опорным кольцом (фиг. б), мы можем пользоваться прежними способами. Начиная с верхнего кольца и переходя от узла к узлу, мы без затруднения найдем для любой внешней нагрузки усилия во всех стержнях, расположенных выше опорного кольца и приводим таким образом задачу к расчету кольца, вершины которого могут скользить по заданным направлениям.

Система, составленная из кольца и опорных стержней по числу стержней будет статически определяемой, так как на каждую вершину кольца придется по два опорных стержня и по одному стержню кольца, т. е. всего по три стержня. Нам остается только в каждом частном случае убедиться, не представляет ли рассматриваемая система исключительного случая. Для этого проще всего воспользоваться способом нулевых нагрузок. Возьмем, например, квадратное кольцо (черт. 460, фиг. а). Линиями n_1 , n_2 , n_3 и n_4 обозначены следы вертикальных плоскостей, в которых располагаются опорные стержни. Перпендикулярные к этим направлениям пунктирные линии указывают направления скольжения соответствующих вершин квадрата. Предположим, что к кольцу никакие внешние силы не приложены. Если при этом удастся доказать, что усилия во всех стержнях кольца равны нулю, то это нам укажет на геометрическую неизменяемость системы. Допустим, что в стержне ab действует растягивающее усилие S . Тогда из условия равновесия узла b , путем построения треугольника $отп$ (фиг. б), сейчас же найдем усилие S_1 в стороне bc и горизонтальную равнодействующую n_2 усилий в опорных стержнях шарнира b . Обращаясь теперь к шарниру c и пользуясь уже найденным значением усилия S_1 , мы построим треугольника $опр$ найдем усилие S_2 в стороне dc . Наконец, из треугольника $орq$ найдем S_3 —усилие в стержне ad . Если мы произвольно взятое усилие S изменим в каком-либо отношении, то в том же отношении изменятся также усилия S_1 , S_2 и S_3 . Следовательно, фигурой (б) можно пользоваться при всяком значении S , нужно только надлежащим образом менять масштаб чертежа. Обратимся теперь к узлу a . Хотя усилие S взято нами произвольно, но соотношение между S и S_3 найдено вполне точно, и им определяется для точки a направление равнодействующей усилий, заменяющих растянутые стержни ab и ad . Если это направление совпадет с направлением n_1 , то равнодействующая усилий S и S_3 уравновесится усилиями в опорных стержнях шарнира a и, следовательно, в кольце возможны будут усилия отличные от нуля.

при нулевых внешних нагрузках, что укажет на наличие исключительного случая.

При решении вопроса о геометрической неизменяемости опорного кольца можно пользоваться также способом изображающих точек, который мы применяли при расчете плоских ферм. Таким путем легко показать, например, что если опорное кольцо представляет собой правильный многоугольник, и линии скольжения направлены по биссекторам углов, то система будет подвижной при четном числе сторон кольца и геометрически неизменяемой — при нечетном числе сторон. Возьмем, например, опорное кольцо в виде правильного шестиугольника (черт. 461) с линиями скольжения, направленными по биссекторам. Изображающую точку a_1 выберем на перпендикуляре к линии скольжения шарнира a в произвольном расстоянии aa_1 . Тогда точка b_1 получится на перпендикуляре bb_1 к биссектору угла b путем проведения линии a_1b_1 параллельной ab . Таким же путем получают точки c_1, d_1, e_1 и f_1 . То обстоятельство, что стороны фигуры $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$, параллельны сторонам нашего шестиугольника указывает нам на исключительный случай. Легко показать, что при нечетном числе сторон такой фигуры построить нельзя и, следовательно, в этом случае опорный многоугольник представит собой геометрически неизменяемую систему.

Задачи.

233) Показать, что правильный шарнирный многоугольник с линиями скольжения, направленными перпендикулярно к биссекторам острых углов, будет представлять собой геометрически изменяемую систему. Вопрос этот легко решается способом изображающих точек.

234) Определить усилия в стержнях опорного кольца $abcde$ при действии в шарнире a сосредоточенной силы P . В точке приложения силы P сходятся четыре стержня, и потому путем непосредственного разложения мы не сможем найти усилий в стержнях, сходящихся в узлу a . Но если бы нам было известно направление равнодействующей усилий в двух каких-либо стержнях, то разлагая силу P на направление этой равнодействующей и направления остальных двух стержней, мы сейчас же могли бы получить нужные нам усилия в стержнях. Применяя способ, которым мы пользовались при исследовании неизменяемости шарнирного квадрата (черт. 460), мы можем найти направление равнодействующей тех усилий, которые на шарнир a оказывают стержни ab и ae . Для этого выберем для усилия в стержне ab произвольное значение. Прикладывая это усилие к шарниру b и разлагая его на направление bc и направление перпендикуляра к линии скольжения шарнира b , получим усилие в стержне bc . Переходя теперь в

шарниру c , мы таким же путем найдем усилие в стержне cd . Далее, из рассмотрения равновесия узла d найдем усилие в стержне ed и из рассмотрения узла e — усилие в стержне ae . Так как мы избрали усилие в стержне aB совершенно произвольно, то и дальнейшие усилия, вообще говоря, не будут равняться тем действительным усилиям, которые вызывает в кольце сила P , но соотношение между усилиями будет то, которое имеет место и в действительности. Поэтому, когда мы придем к узлу a и составим здесь равнодействующую найденного нами усилия в стержне ae и выбранного произвольно усилия в стержне ab , то хотя величина этой равнодействующей будет отличаться от действительной, но направление ее будет определено правильно, и мы разлагая P на направление этой равнодействующей и направления двух опорных стержней получим действительные значения нужных нам усилий. Определив усилия для одного узла, мы теперь без затруднений найдем и все прочие усилия. Если к кольцу приложена не одна, а несколько сил, то мы намеченным здесь способом определяем усилия от каждой силы в отдельности, а потом уже суммируем найденные усилия.

235) Пользуясь намеченным способом расчета кольца, определить усилия, вызываемые в стержнях звездчатого купола (черт. 468) силою P . В каждом из узлов a, b, c, d, e сходится по четыре стержня, из которых два опорных стержня и два стержня многоугольника $abcde$. Равнодействующая усилий опорных стержней в каждом узле направится по линии пересечения плоскости этих стержней с горизонтальной плоскостью, в которой лежит многоугольник $abcde$. Соответствующие направления указаны в плане (фиг. b) пунктиром. Они, очевидно, получатся параллельными сторонам многоугольника $ABCDE$, образованного опорными шарнирами. Получив эти направления, мы ведем дальнейший расчет так же, как и в предыдущей задаче. Выбираем усилие 1 в стержне ab кольца произвольным и тогда из условия равновесия узла b находим усилие 2 в стержне bc . На фигуре (с) построен соответствующий треугольник ofg , из которого мы получаем не только усилие 2, но и равнодействующую fg усилий в опорных стержнях Ab и bB . Переходя теперь к узлу c , мы из соответствующего треугольника ogh находим усилие 3 в стержне dc и равнодействующую gh в опорных стержнях Cc и cC . Построения для узлов d и e представлены на фигуре с треугольниками ohk и okl . Хотя усилие 1 выбрано нами произвольно, но полученные построения усилия в стержнях шарнирного многоугольника будут находиться между собой в таком же соотношении, как и действительные усилия. Поэтому, когда мы придем к шарниру a и сложим здесь усилия 1 и 5, то направление mn параллельное направлению fl (фиг. с), даст нам действительное направление равнодействующей и мы, разлагая P на направления mn, aA и aE , получим действительные значения усилий. Если бы верхнее кольцо представляло правильный многоугольник с четным числом сторон, то мы пришли бы к уже рассмотренному выше исключительному случаю. Покрытие представляло бы подвижную систему.

236) Определить усилия в стержнях купола, представленного на чертеже (464). Нижний ярус покрытия представляет собой только

что рассмотренный тип звездчатого купола, а верхний ярус образован по типу купола Шведлера. Расчет начинаем с верхнего яруса, в котором все усилия найдутся непосредственным разложением. Усилия стержней верхнего яруса являются внешними силами для нижнего яруса. Ход расчета этого последнего нами был уже изложен выше.

§ 60. Расчет пространственных систем способом замены стержней.

Общим способом для расчета пространственных систем является способ замены стержней, которым мы уже пользовались при определении усилий в стержнях плоских ферм (§ 18). Применяя этот прием, мы путем замены стержней обращаем заданную нам систему в систему простейшего типа. Если этого удастся достигнуть заменой одного только стержня, то в таком случае для определения усилий во всех стержнях, нужно произвести два расчета: первый расчет должен быть выполнен для получения усилий, вызываемых заданными внешними силами в стержнях той простейшей системы, к которой мы приходим путем замены стержня. Эти усилия мы будем вообще обозначать через T_i . Значение соответствующего усилия в заменяющем стержне обозначим через T_e . Второй расчет производим для оценки влияния удаленного стержня. Мы устрояем все внешние силы и вместо удаленного стержня прилагаем к соответствующим узлам две прямо противоположные силы, равные единице. Пусть u_i и u_e обозначают для этого состояния системы усилие в каком-либо стержне порядка i и в заменяющем стержне. Если теперь мы обозначим через X действительное усилие в том стержне, который мы должны удалить при замене, то на основании двух произведенных расчетов общая формула для действительного усилия S_i в каком-либо стержне напишется так

$$S_i = T_i + X \cdot u_i \dots \dots \dots (a)$$

Применяя эту формулу к заменяющему стержню и принимая во внимание, что в действительной ферме этого стержня нет и, следовательно, соответствующее усилие должно равняться нулю, мы приходим к такому уравнению для определения X

$$T_e + u_e X = 0 \dots \dots \dots (b)$$

откуда

$$X = - \frac{T_e}{u_e}.$$

Если u_e обращается в нуль, то усилия в стержнях получат неопределенные или бесконечные значения, что нам укажет на наличие исключительного случая: рассматриваемая система будет геометрически изменяемой.

При выборе стержней, которые должны быть удалены при преобразовании системы, и при выборе расположения заменяющих стержней, мы будем следовать такому порядку. Прежде всего отбрасываем в заданной системе узлы с тремя стержнями, если такие узлы в системе имеются. Соответствующие отбрасываемым стержням усилия могут быть найдены непосредственным разложением. Эти усилия будут рассматриваться, как внешние силы, для оставленной части системы. Обращаясь теперь к этой части системы, выбираем в ней один из узлов с четырьмя стержнями, или если такого узла не имеется, один из узлов с пятью стержнями и удалением одного или двух стержней получаем узел с тремя стержнями. Удаляем этот узел, а за ним и все те узлы, в которых при последовательном удалении будет оставаться лишь по три стержня. Если в результате этого мы вновь получим систему, у которой не будет узлов с тремя стержнями, то с ней повторяем описанную выше операцию, пока в конце концов мы не придем к подвижной системе. В эту систему вводим заменяющие стержни так, чтобы получить геометрически неизменяемую систему простейшего типа.

Поясним сказанное примерами. Пусть нам дана система, стержни которой расположены по ребрам октаэдра (черт. 465). По числу стержней эта система, как сетчатая, является статически определимой, но она не принадлежит к классу простейших, в ней нет ни одного узла с тремя стержнями. Преобразуем эту систему в простейшую путем замены стержней. Возьмем один из узлов с четырьмя стержнями, например, узел E и удалим из него стержень EC . Далее, удаляем три оставшиеся стержня ED , EB и EA и узел A с тремя стержнями AB , AD и AF . Таким путем мы приходим к подвижной системе, составленной из двух треугольников BCF и DCF . Чтобы обеспечить геометрическую неизменяемость этой системы, достаточно вставить стержень BD , указанный на чертеже пунктиром.

Следовательно, в данном случае мы заданную систему обращаем в простейшую путем одной замены, стержень EC заменяем стержнем BD . Конечно, нужное нам преобразование может быть

выполнено различными путями. Вместо стержня EC можно устранить любой другой стержень системы. Вместо диагонали BD можно вставить диагональ AC и т. д.

Если принять сделанное выше преобразование и вместо стержня EC приложить в узлах E и C две прямо противоположные силы, равные единице и направленные от узлов, то легко, путем простых рассуждений, убедиться, что в стержнях BE , ED и в стержнях прямоугольника $ABCD$ будут действовать сжимающие усилия и что заменяющий стержень BD испытывает растяжение. То обстоятельство, что заменяющий стержень напряжен, указывает на геометрическую неизменяемость заданной нам системы. В качестве второго примера рассмотрим сетчатую систему, представленную на чертеже (466).

Если в этой системе удалить узел 12, то остальные узлы будут иметь четыре или более стержней. Мы начнем преобразование с узла 1, удалив в нем диагональ 1—3. После этого может быть отброшен узел 1, как узел с тремя стержнями. Далее придется удалить узел 2, так как в нем останется лишь три стержня, потом узел 3, 4 и т. д., пока мы не дойдем в порядке номеров до узла 8. Тогда у нас останется подвижная система, представленная на фигуре (b) и состоящая из двух треугольников. Установкой заменяющего стержня 8—10 мы обращаем эту систему в геометрически неизменяемую. Таким образом и в этом случае заданная система обращается в простейшую путем одной замены: диагональ 1—3 заменена стержнем 8—10, указанным на фигуре (a) пунктиром.

Прикладывая в узлах 1 и 3 две прямо противоположные силы, направленные от узлов, мы на основании рассмотрения узлов 1, 2, 3, 6 и 7 сейчас же заключаем, что стержень 1—2 сжат, 2—6 сжат, 3—6 сжат, 6—7 растянут, 6—10 сжат и 7—10 сжат. Теперь из рассмотрения узла 10 заключаем, что в заменяющем стержне будет действовать растягивающее усилие. Отличие от нуля усилия в заменяющем стержне укажет нам на геометрическую неизменяемость заданной системы.

Рассчитаем способом замены стержней пирамидальное покрытие с квадратным основанием, представленное на чертеже (467). Устраним стержень EC . Тогда в узлах E и C останется лишь по три стержня. Удаляя их, найдем, что в узле B остается лишь три стержня. Удаляя эти стержни и потом стержни узла A , мы придем к узлу D , прикрепленному к фундаменту лишь двумя

стержнями. Чтобы устранить подвижность, придется, вместо отброшенного стержня EC , ввести заменяющий опорный стержень, указанный на чертеже жирным пунктиром. В полученной таким путем простейшей системе мы без затруднения найдем усилия T_i , вызываемые силой P . Если эта сила параллельна AD , то отличными от нуля будут усилия в стержнях треугольника AED и в опорных стержнях, сходящихся в узлах A и D .

Для получения усилий u_i и u_c отбрасываем силу P и вместо стержня EC прикладываем силы, равные единице, в узлах E и C . Сразу видно, что приложенная в узле C сила вызовет сжатие в стержне DC и в заменяющем опорном стержне DD_3 . Следовательно, заданная система геометрически неизменяема.

Мы расположили опорные стержни системы так, что линии скольжения опорных шарниров имеют в каждой из вершин A , B и D направление, совпадающее со сторонами квадрата $ABCD$. Заметим, что когда шарнирный правильный многоугольник с четным числом сторон связан, как в рассматриваемом примере, с ребрами пирамидального покрытия, он представляет собой геометрически неизменяемую систему и в том случае, если направления скольжения вершин многоугольника совпадают с биссекторами соответствующих углов. Обращаясь к нашему примеру, расположим опорные стержни так, как это показано в плане на чертеже 468. Чтобы доказать геометрическую неизменяемость системы, воспользуемся способом замены стержней.

Выбросим стержень EC и взамен его вставим опорный стержень AA_3 , намеченный жирным пунктиром. Прикладывая в узлах E и C две прямо противоположные силы, равные единице и направленные от узлов, мы вызовем растягивающие усилия в стержнях AE , AB и AD . В таком случае из условия равновесия узла A сейчас же заключаем, что в заменяющем стержне AA_3 усилие не будет равно нулю, что указывает на геометрическую неизменяемость системы.

В качестве более сложного примера рассмотрим купольное покрытие, представленное на чертеже (469). Нижний ярус этого покрытия представляет собой рассмотренную ранее систему Фюрриг-Шлинк'а. Второй и третий ярусы, образованные по системе Шведлера. На основании ранее сделанных исследований заключаем, что нижние три яруса купола представляют геометрически неизменяемую систему и нам, следовательно, нужно доказать лишь

неизменяемость фонаря, составленного из шестигранной пирамиды, поставленной на шестигранную призму. Воспользуемся для этого способом замены стержней. Выбрасывая три какие либо ребра пирамиды и вставляя вместо них три диагонали bc_1 , de_1 и fa_1 , мы получим простейшую систему, порядок образования которой — следующий: сначала к неизменяемой системе прикрепляются узлы b , d и f каждый тремя стержнями. Потом к этим узлам в неизменяемой системе прикрепляются узлы a , e и c каждый тремя стержнями. Наконец, тремя оставшимися стержнями пирамиды прикрепляется узел g .

Полученная простейшая система может быть рассчитана способом непосредственного разложения. Пусть T_i усилие, вызываемое в каком либо стержне i заданными внешними силами и T_{e_1} , T_{e_2} , T_{e_3} соответствующие усилия в заменяющих стержнях. Обозначим через u_i , u_{e_1} , u_{e_2} , u_{e_3} усилия, вызываемые в тех же стержнях силами единица, приложенными вместо удаленного стержня, действительное усилие которого равно X . Точно также обозначим через v_i , v_{e_1} , v_{e_2} , v_{e_3} и w_i , w_{e_1} , w_{e_2} , w_{e_3} усилия, вызываемые в тех же стержнях силами единица, приложенными вместо удаленных стержней с действительными усилиями Y и Z . Тогда действительное усилие в каком либо стержне i представится так

$$S_i = T_i + u_i X + v_i Y + w_i Z$$

Неизвестные X , Y и Z найдутся из таких ур-ий

$$T_{e_1} + u_{e_1} X + v_{e_1} Y + w_{e_1} Z = 0$$

$$T_{e_2} + u_{e_2} X + v_{e_2} Y + w_{e_2} Z = 0$$

$$T_{e_3} + u_{e_3} X + v_{e_3} Y + w_{e_3} Z = 0$$

Если бы определитель этих ур-ий обратился в нуль, то это указало бы нам на геометрическую изменяемость системы.

Таким образом способ замены стержней можно с выгодой применять к расчету пространственных систем, так как при этом задача сводится к расчету систем простейшего типа. Выгодно пользоваться им также и при исследовании геометрической неизменяемости системы. Вопрос решается при этом путем составления определителя сравнительно небольшого числа ур-ий.

Задачи.

237) Определить усилия, вызываемые в стержнях октаэдра силами P , направленными по диагонали квадрата $ABCD$. Обращаем заданную систему в простейшую, заменяя стержень EC диагональю AC . Легко видеть, что в данном случае усилия T_c равны нулю и

$$T_c = -P.$$

Прикладывая теперь в узлах E и C две прямо противоположные силы, равные единице и направленные от узлов, найдем усилия u_i и u_c . Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна 4 mt и высота каждой из правильных пирамид $ABCDE$ и $ABCDF$ равна 3 mt . При действии по линии EC сил единицы, у нас получатся в стержнях AE, AF и FC растяжение, равное единице, и в стержнях BE, ED, DF и FB — сжатие равное единице. Производя разложения в узлах B и D , найдем, что в сторонах квадрата действуют растягивающие усилия равные $\frac{4}{4,12}$. Сжимающее усилие u_c в диагонали AC получится равным

$$u_c = -\frac{4}{4,12} \cdot 2\sqrt{2} = \approx -2,75.$$

Следовательно, действительное усилие в стержне EC будет равно

$$X = -\frac{T_c}{u_c} = -\frac{P}{2,75}.$$

238) Расчитать способом замены стержней звездчатый кутол (черт. 471). Легко видеть, что здесь мы приходим к простейшей системе одной заменой. Удалив одну из сторон верхнего пояса, например, сторону ab и вводя заменяющий стержень ce_1 , мы получаем систему, образованную путем последовательного присоединения всякого нового узла тремя стержнями. Начинаем с узла e , присоединенного к земле 3 стержнями. Далее узел a присоединяем двумя стержнями к земле и третьим стержнем к узлу e . Подобным же образом присоединяем узлы d, c и, наконец, узел b . Дальнейший расчет будет заключаться в определении усилий T_i и T_c , вызываемых в полученной простейшей системе внешними нагрузками, и в вычислении усилий u_i и u_c , вызываемых в той же системе силами единицы, приложенными в узлах a и b .

239) Намечить ход расчета пространственного покрытия, представленного в плане на чертеже (472). При намеченных на чертеже направлениях скольжения цилиндрических опор, шарнирный квадрат $a_2 b_2 c_2 d_2$ представляет собой геометрически неизменяемую систему. К неподвижным опорным точкам a_2, b_2, c_2 и d_2 присоединены шарниры a_1, b_1, c_1, d_1 верхнего квадрата.

Если бы мы вставили стержень a_1d_1 , то первый ярус рассматриваемого пространственного покрытия представил бы собой рассмотренный выше тип звездчатого купола, который при квадратном основании является системой геометрически изменяемой. В нашей системе вместо стороны a_1d_1 вставлена диагональ bd в верхнем основании второго яруса, образованного по типу купола Шведлера. Чтобы обратить заданную систему в простейшую, достаточно произвести лишь одну замену, например, диагональ bd заменить опорным стержнем d_1d_3 . Определив в полученной простейшей системе усилия T_i и T_e от внешних сил в усилия u_i , u_e — от сил единица, приложенных в b и d , мы будем иметь все величины, необходимые для определения действительных усилий.

240) Доказать геометрическую неизменяемость покрытия *Zimmermann's* (черт. 473). Верхнее кольцо системы представляет собой прямоугольник, а нижнее — восьмиугольник. Вместо диагонали верхнего основания и пяти диагоналей нижнего основания, введено шесть дополнительных опорных стержней. Следовательно, по числу стержней система является статически определимой. Для выяснения геометрической неизменяемости системы, воспользуемся способом Геннеберга. Выбросим все четыре стержня верхнего кольца и заменим их четырьмя дополнительными опорными стержнями, указанными пунктиром (черт. 474). Таким образом приходим к пространственной системе простейшего типа, образованной следующим образом. Сначала взяты узлы b_1 , d_1 , f_1 и h_1 нижнего кольца и каждый из них прикреплен к земле тремя опорными стержнями. После этого присоединены остальные четыре узла нижнего кольца, каждый тремя стержнями и, наконец, узлы a , b , c , d верхнего кольца.

При исследовании геометрической неизменяемости системы способом Геннеберга, нужно выяснить прежде всего, какие усилия в заменяющих опорных стержнях, указанных на чертеже пунктиром, будут вызваны силами $P_1 \dots P_4$, приложенными вместо удаленных стержней. Приравнявая эти усилия нулю, получим четыре уравнения с четырьмя неизвестными P_1, \dots, P_4 . Если определитель этих уравнений не будет равняться нулю, то

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0.$$

При этом усилия во всех стержнях обратятся в нуль. Нулевым нагрузкам будут соответствовать нулевые усилия, что укажет нам на геометрическую неизменяемость системы. Определение усилий начнем с узла a , где сходятся три стержня 1, 2 и 3 (черт. 474). Усилия, вызываемые в этих стержнях силой P_1 , можно найти или графически, путем разложения на соответствующие три направления, или аналитически, способом проекций. Мы остановимся на втором способе. Пусть α обозначает угол, составляемый направлениями стержней 1 и 2 с вертикалью и β — угол между стержнями 2 и 3. Силу P_1 разлагаем сначала на направление стержня 2 и вертикальное направление (фиг. b ,

черт. 475). Таким образом получим для стержня 2 растягивающее усилие $\frac{P_1}{\sin \alpha}$ и вертикальную силу

$$Q = P_1 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Вертикальную силу Q , в свою очередь, разлагаем на направление стержня 1 и на горизонтальное направление (фиг. с). Получаем в стержне 1 сжатие

$$-\frac{Q}{\cos \alpha} = -\frac{P_1}{\sin \alpha}$$

и горизонтальную силу

$$S = P_1.$$

Наконец, силу S разлагаем на направление 2 и 3 (фиг. а). Соответствующие усилия получают значения

$$P_1 \operatorname{ctg} \beta \text{ и } -\frac{P_1}{\sin \beta}.$$

Окончательно для усилий 1, 2 и 3 получаем значения

$$-\frac{P_1}{\sin \alpha}, P_1 \operatorname{ctg} \beta + \frac{P_1}{\sin \alpha}, -\frac{P_1}{\sin \beta}.$$

В стержнях 4 и 5 (черт. 474) та же сила P_1 вызовет усилия

$$-\frac{P_1}{\sin \beta} \text{ и } P_1 \operatorname{ctg} \beta.$$

Подобным же образом могут быть найдены усилия, вызываемые в стержнях верхнего яруса силами P_2, P_3, P_4 .

Обратимся теперь к усилиям в возмещающих стержнях. Усилие S , в опорном стержне kh_1 (черт. 474), мы найдем, проектируя на направление kh_1 , усилия S_4, S_1 и S_6 в стержнях 4, 1 и 6. Таким образом получаем

$$S = S_4 \cos \beta \sin \alpha + S_1 \sin \alpha + S_6 \cos 45^\circ.$$

На основании предыдущего рассмотрения усилий, вызываемых силами P_1 , заключаем

$$\begin{aligned} S_4 &= -\frac{P_1}{\sin \beta} - \frac{P_1}{\sin \beta}; S_1 = -\frac{P_1}{\sin \alpha}; S_6 = -S_2 \frac{\sin \alpha}{\cos 45^\circ} = \\ &= -(P_1 \operatorname{ctg} \beta + \frac{P_1}{\sin \alpha} + P_2 \operatorname{ctg} \beta) \frac{\sin \alpha}{\cos 45^\circ}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = -2P_1 (1 + \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha) - P_2 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha - P_4 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha.$$

Подобные же выражения могут быть составлены также для усилий в трех других возмещающих стержнях. Приравнявая эти усилия нулю, придем к линейным ур-ням такого вида

$$2P_1 (1 + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{Sin}\alpha) + P_2 \operatorname{ctg}\beta \operatorname{Sin}\alpha + P_3 \operatorname{ctg}\beta \operatorname{Sin}\alpha = 0.$$

.....

Отличие от нуля определителя этих ур-ий укажет нам на геометрическую неизменяемость исследуемой системы.

§ 61. Статически неопределимые пространственные системы.

Когда пространственная система, заключающая в себе n узлов, имеет больше нежели $3n$ стержней, то число ур-ий, которые нам даст система для определения стержневых усилий, будет больше числа неизвестных. Система является статически неопределимой. При расчете такой системы мы будем пользоваться теми общими приемами, которые были изложены в связи с расчетами плоских статически неопределимых систем.

Применяя к решению этих задач способ Максвелла-Мора, мы устрояем сначала лишние бруски и определяем усилия S_0 , возникающие в стержнях основной системы под действием заданных нагрузок. Далее изучаем влияние каждого из удаленных лишних брусков. Для этого устрояем внешние нагрузки и поочередно вместо каждого из лишних брусков прикладываем по две прямо противоположные силы, равные единице. Пусть S_1, S_2, \dots усилия в стержнях, соответствующие каждому из этих состояний. Тогда, обозначая через X, Y, Z, \dots действительные усилия в лишних брусках, получим для действительного усилия S в каком либо бруске системы такое общее выражение

$$S = S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z + \dots \quad (1)$$

Если через r обозначать величину, характеризующую растяжимость брусков, то применяя начало возможных перемещений поочередно к каждому из напряженных состояний, соответствующих усилиям S_1, S_2, S_3, \dots и к действительным перемещениям системы, определяемым усилиям (1), мы получим систему линейных ур-ий такого вида

$$\sum S_1 (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z + \dots) r + 1 \cdot X \cdot r_x = 0 \quad (2)$$

.....

Число этих уравнений будет равняться числу лишних брусьев, а мы из них можем найти неизвестные лишние усилия X, Y, Z, \dots . После этого по ф-ле (1) найдутся усилия и во всех прочих брусьях системы.

Применим намеченный здесь общий ход расчета к решению такого простейшего примера (черт. 476). Найти усилия, возникающие в стержнях 1, 2, 3 и 4 под действием силы $P = 1 \text{ tn}$, приложенной в узле A . Для упрощения расчетов предположим, что все стержни имеют одно и то же поперечное сечение и одну и ту же длину, равную, как видно из чертежа, 5 mt. Стержни 1 и 3 располагаем в горизонтальной плоскости, а стержни 2 и 4 — в вертикальной плоскости CAE , делящей пополам угол BAD . Силу P расположим в вертикальной плоскости, параллельной BCD под углом 45° к AE . Так как узел A прикреплен к земле четырьмя стержнями, то мы имеем статически неопределимую систему с одним лишним бруском. За лишний прием вертикальный стержень AE . Устраняя его и принимая во внимание, что сила P лежит в плоскости BAC , сейчас же путем построения соответствующего треугольника сил найдем усилия S_0 , приведенные в нижеследующей таблице.

$Nr.$	S_0	S_1	$S_0 S_1$	S_1^2	S
1	$-\frac{5}{3\sqrt{2}} \text{ tn}$	$-\frac{10}{12} \text{ tn}$	0,983	0,694	$-0,705 \text{ tn}$
2	$+\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$+\frac{5}{8}$	1,967	2,78	$+0,290$
3	0	$-\frac{10}{12}$	0	0,694	$+0,475$
4	0	$+$	0	—	$-0,570$
			$\Sigma = 2,95$	4,17	

Далее устраняем внешнюю нагрузку и вместо стержня AE приложим в A направленную вертикально вниз силу, равную 1 tn. Соответствующие усилия S_1 также весьма просто находятся. Они приведены в третьем столбце таблицы. Ур-ие для определения лишней неизвестной напишется в данном случае так

$$\Sigma S_1 (S_0 + S_1 X) r + 1 \cdot X \cdot r = 0,$$

откуда

$$X = -\frac{\sum S_1 \cdot S_0}{\sum S_1^2 + 1}$$

Пользуясь четвертым и пятым столбцами таблицы, найдем

$$X = -\frac{2,95}{5,17} = -0,570 \text{ тн.}$$

После этого по ф-ле (1) сейчас же находятся усилия S во всех стержнях системы. Усилия эти приведены в последнем столбце нашей таблицы.

В качестве более сложной задачи, рассмотрим случай, представленный на чертеже (477). При двенадцати узлах заданная система имеет 39 стержней. За лишние стержни примем диагонали, расположенные в горизонтальных поперечных сечениях. Пусть X , Y и Z обозначают усилия, возникающие в этих диагоналях под действием силы P равной 1 тн. Для разыскания лишних неизвестных X , Y и Z применим способ Максвелла-Мора. Пусть S_0 —усиления, вызываемые в системе силой P при отсутствии лишних брусков, и S_1 , S_2 , S_3 , усилия, соответствующие фиктивным состояниям, представленным на чертеже 478. Тогда ур-ня для определения лишних неизвестных напишутся так:

$$\begin{aligned} \sum S_1 (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z) r + 1 \cdot X r_x &= 0 \\ \sum S_2 (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z) r + 1 \cdot Y r_y &= 0 \\ \sum S_3 (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z) r + 1 \cdot Z r_z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагая для упрощения, что каждая из граней призмы разделяется распорками на квадраты, мы легко найдем путем непосредственного разложения усилия S_0 , S_1 , S_2 и S_3 , приведенные в столбцах нижеследующей таблицы. Допустив, что растяжимость всех брусков системы одинакова, мы получим ур-ня (3) в таком виде

$$\begin{aligned} 88 X + 47 Y + 15 Z &= -22 \sqrt{2} \\ 47 X + 32 Y + 11 Z &= -12 \sqrt{2} \\ 15 X + 11 Y + 8 Z &= -4 \sqrt{2} \end{aligned}$$

Откуда находим

$$\begin{aligned} X &= -0,2327 \sqrt{2}; \quad Y = -0,0215 \sqrt{2}; \\ Z &= -0,0341 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

N ^o	S ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₁ ²	S ₂ ²	S ₃ ²	S ₀ S ₁	S ₀ S ₂	S ₀ S ₃	S ₁ S ₂	S ₁ S ₃	S ₂ S ₃
1	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\sqrt{2}$	1	0	0	1	0	0	$\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
7	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0
8	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
14	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
16	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
18	$\sqrt{2}$	1	1	0	1	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	1	0	0
19	-2	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	1	0	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
20	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
21	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0
22	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
23	0	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0

№	S_0	S_1	S_2	S_3	S_1^2	S_2^2	S_3^2	S_0S_1	S_0S_2	S_0S_3	S_1S_2	S_1S_3	S_2S_3
24	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
25	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
26	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
27	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
28	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
29	2	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
30	2	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1
31	-3	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{\sqrt{2}}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
32	0	-1	-1	-1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
33	0	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
34	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
35	0	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
36	0	-1	-1	-1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
$\Sigma =$					87	31	7	$22\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	47	15	11

Прилагая к верхним узлам системы усилия, соответствующие лишней неизвестной X , получим у узлов верхнего многоугольника силы, указанные на чертеже 479 (фиг. а). Это распределение сил приблизительно соответствует тому, которое получается при сложении сил, указанных на фигурах (б) и (с).

Следовательно, благодаря наличию лишних брусьев сила $P = 1 \text{ т}$, приложенная в плоскости передней грани системы, распределится поровну на две параллельные грани и при этом добавится еще скручивание системы парой сил $M = \frac{Pa}{2}$. Этому кручению будут соответствовать усилия, указанные на фигуре С (черт. 479).

Полученное здесь распределение усилий в большой степени зависит от жесткости лишних брусков. Если допустить, что лишние диагонали легко растяжимы, то тогда, очевидно, наша система по условиям работы будет близка к системе, не имеющей лишних брусков и сила P будет передаваться, главным образом, на переднюю грань. Допустим, например, что растяжимость лишних брусков в десять раз больше растяжимости необходимых брусков.

Тогда

$$r_x = r_y = r_z = 10 r,$$

и ур-ня (3) получат такой вид

$$\begin{aligned} 97 X + 47 Y + 15 Z &= -22 \sqrt{2} \\ 47 X + 41 Y + 11 Z &= -12 \sqrt{2} \\ 15 X + 11 Y + 17 Z &= -4 \sqrt{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$X = -0,190 \sqrt{2}; \quad Y = -0,0687 \sqrt{2}; \quad Z = -0,0233 \sqrt{2}.$$

Если взять еще меньшую жесткость для лишних брусков и положить

$$r_x = r_y = r_z = 100 r,$$

то мы будем иметь такие ур-ня

$$\begin{aligned} 187 X + 47 Y + 15 Z &= -22 \sqrt{2} \\ 47 X + 131 Y + 11 Z &= -12 \sqrt{2} \\ 15 X + 11 Y + 107 Z &= -4 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Откуда найдем

$$X = -0,103 \sqrt{2}; \quad Y = -0,0532 \sqrt{2}; \quad Z = -0,0175 \sqrt{2}.$$

Здесь, благодаря большой растяжимости лишних диагоналей, сила P передается, главным образом, передней грани системы.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Г Л А В А . IV.

О деформациях плоских стержневых систем с идеальными шарнирами.

	СТРАН.
§ 38. Общие замечания	1
§ 39. Диаграмма Виллио для простейших систем	5
§ 40. Диаграмма Виллио для сложных ферм	11
§ 41. Построение диаграмм Виллио для систем, не представляющих одного жесткого целого	15
§ 42. Диаграмма Виллио в более сложных случаях	18
§ 43. Диаграмма перемещений для шарнирного многоугольника	23
§ 44. Вычисление изменений углов треугольника по удлинениям его сторон	28
§ 45. Линия прогибов, рассматриваемая, как веревочный многоугольник	32
§ 46. Иной прием вычисления фиктивных грузов	35
§ 47. Определение изменения длины хорды шарнирного многоугольника	43

Г Л А В А . V.

Статически неопределимые плоские фермы.

§ 48. Выбор лишних неизвестных	49
§ 49. Способ Максвелла—Мора	53
§ 50. Теорема о взаимности перемещений	64
§ 51. Применение теоремы о взаимности перемещений к построению линий влияния	69
§ 52. Упрощения, получаемые путем надлежащего выбора лишних неизвестных	89

Г Л А В А VI.

Расчет пространственных систем.

§ 53.	Сложение и разложение сил, сходящихся в одной точке	106
§ 54.	Разложение силы на шесть направлений	117
§ 55.	Образование геометрически неизменяемых статически определимых пространственных систем	124
§ 56.	Способы прикрепления пространственных систем к земле	131
§ 57.	Расчет пространственных систем способом непосредственного разложения	137
§ 58.	Расчет пространственных систем путем разложения их на плоские фермы	143
§ 59.	Расчет опорного кольца	156
§ 60.	Расчет пространственных систем способом замены стержней	160
§ 61.	Статически неопределимые пространственные системы	168

108

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ.

Профессор С. П. ТИМОШЕНКО.

КУРС СТАТИКИ СООРУЖЕНИЙ.

Часть I.

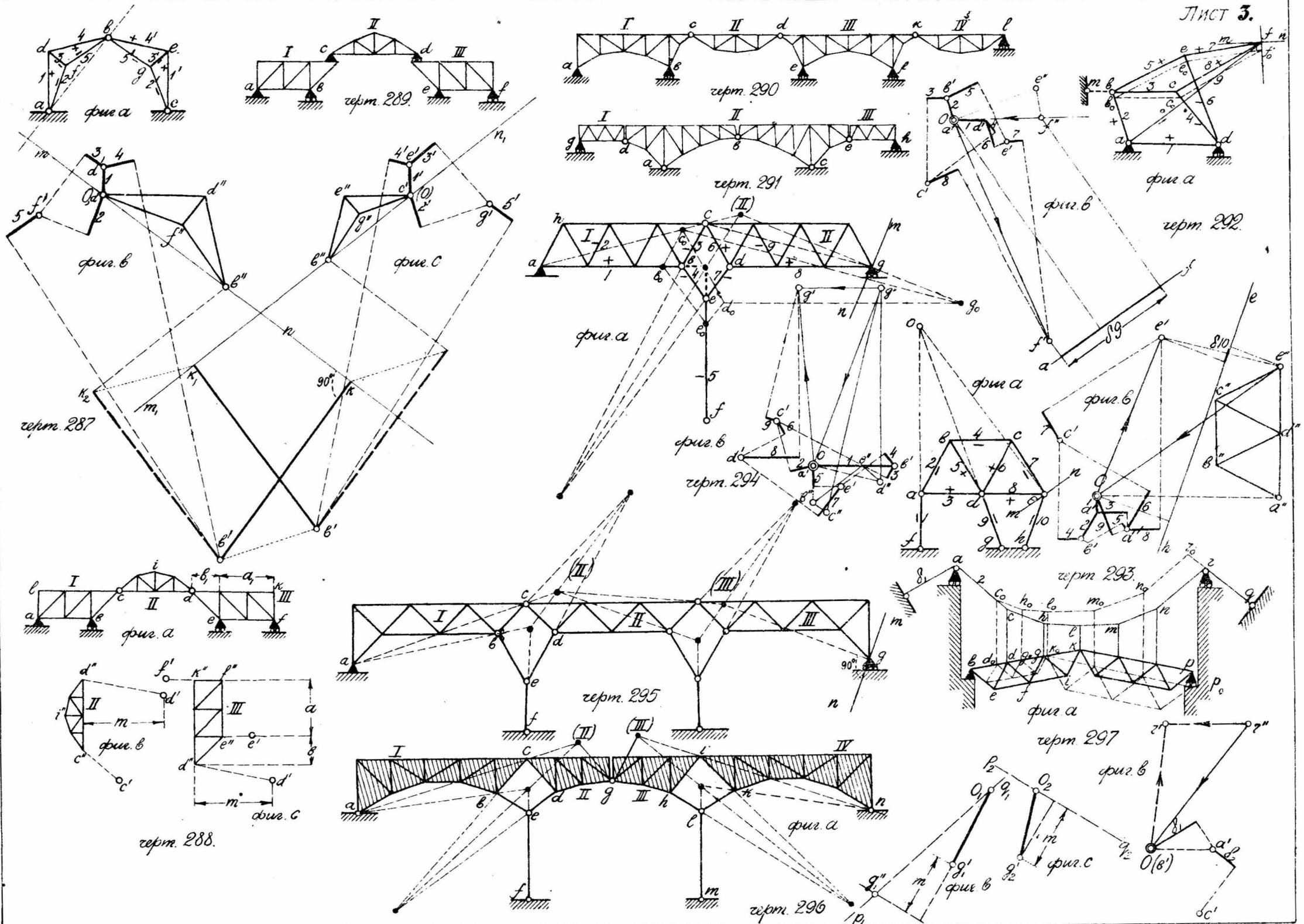
Выпуск 2-ой.

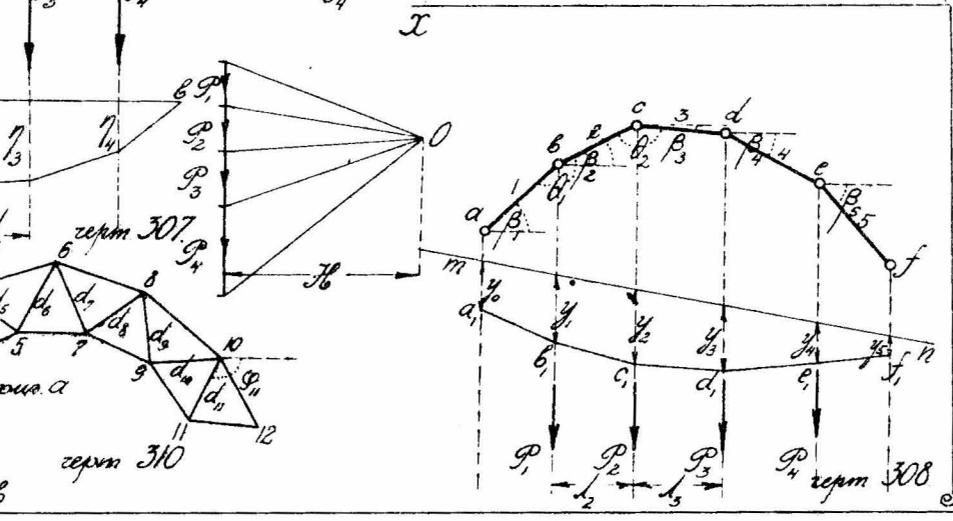
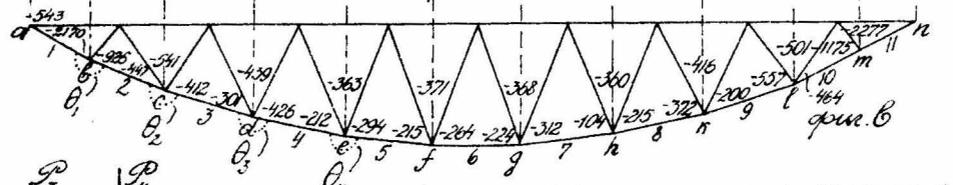
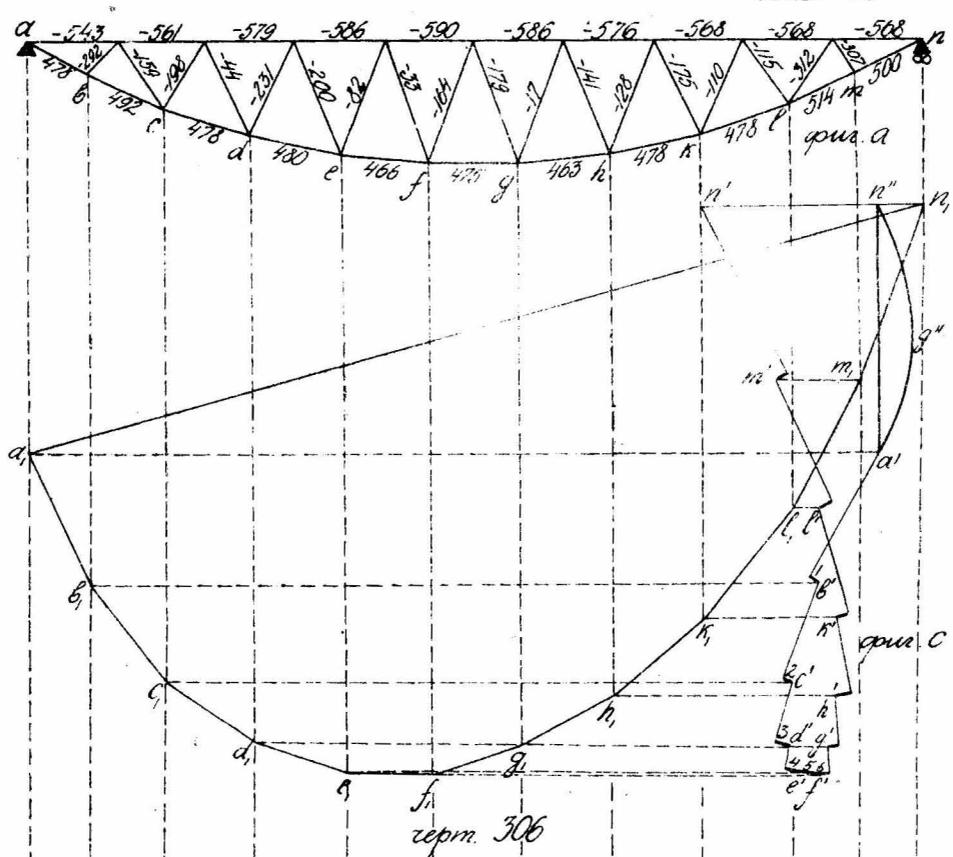
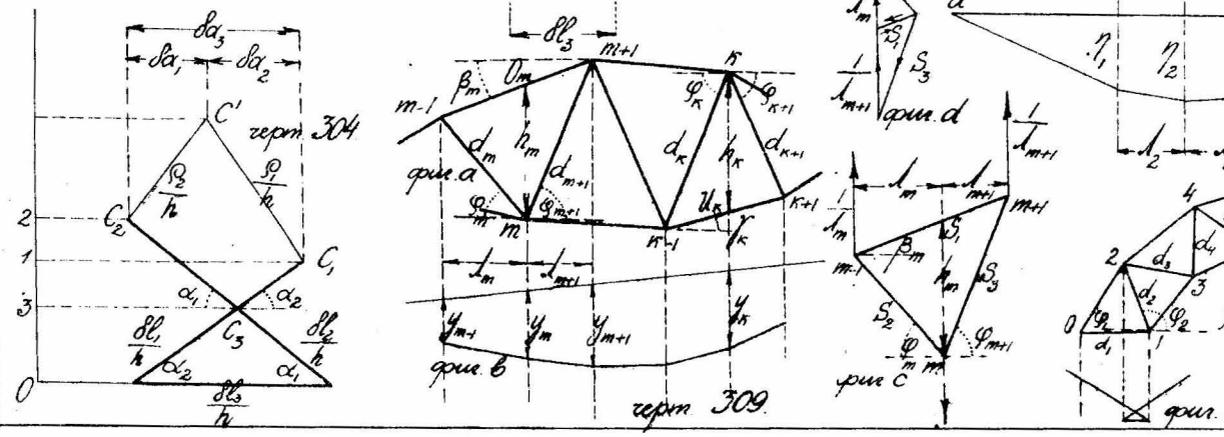
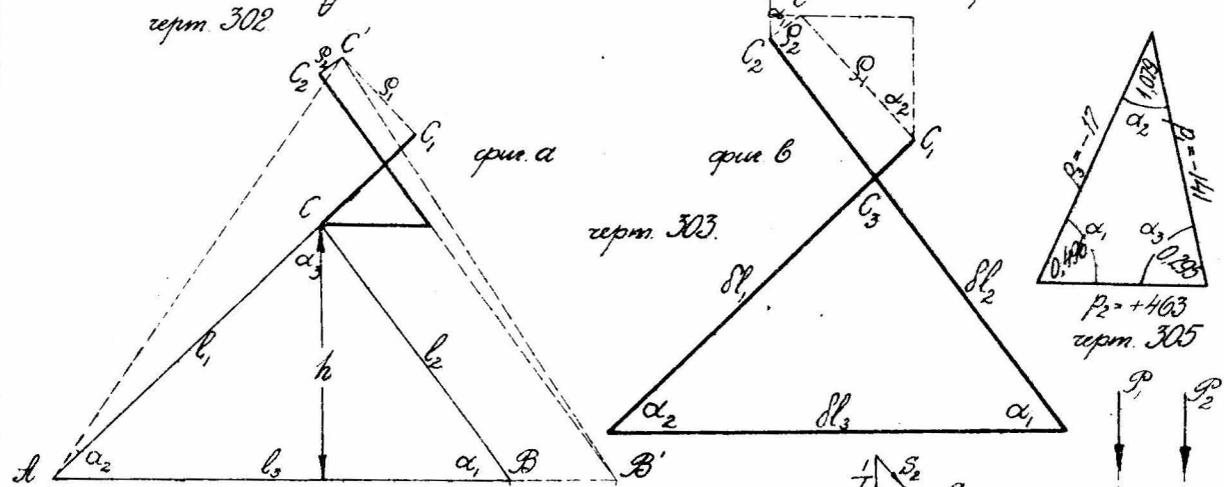
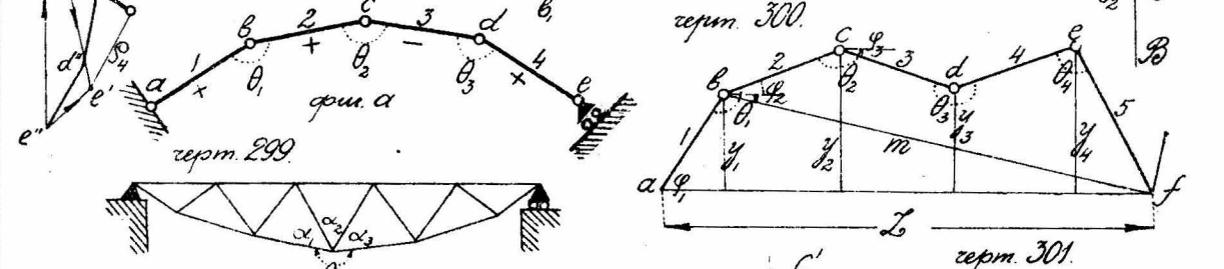
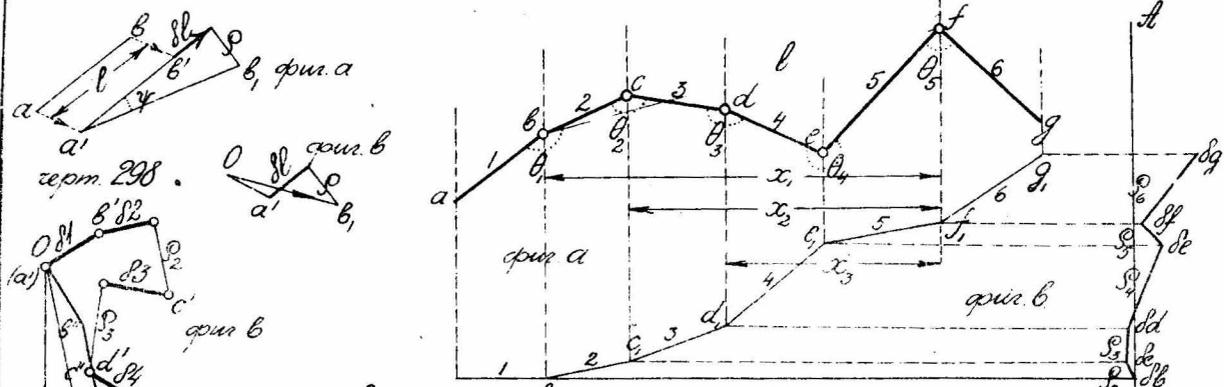
ЧЕРТЕЖИ.

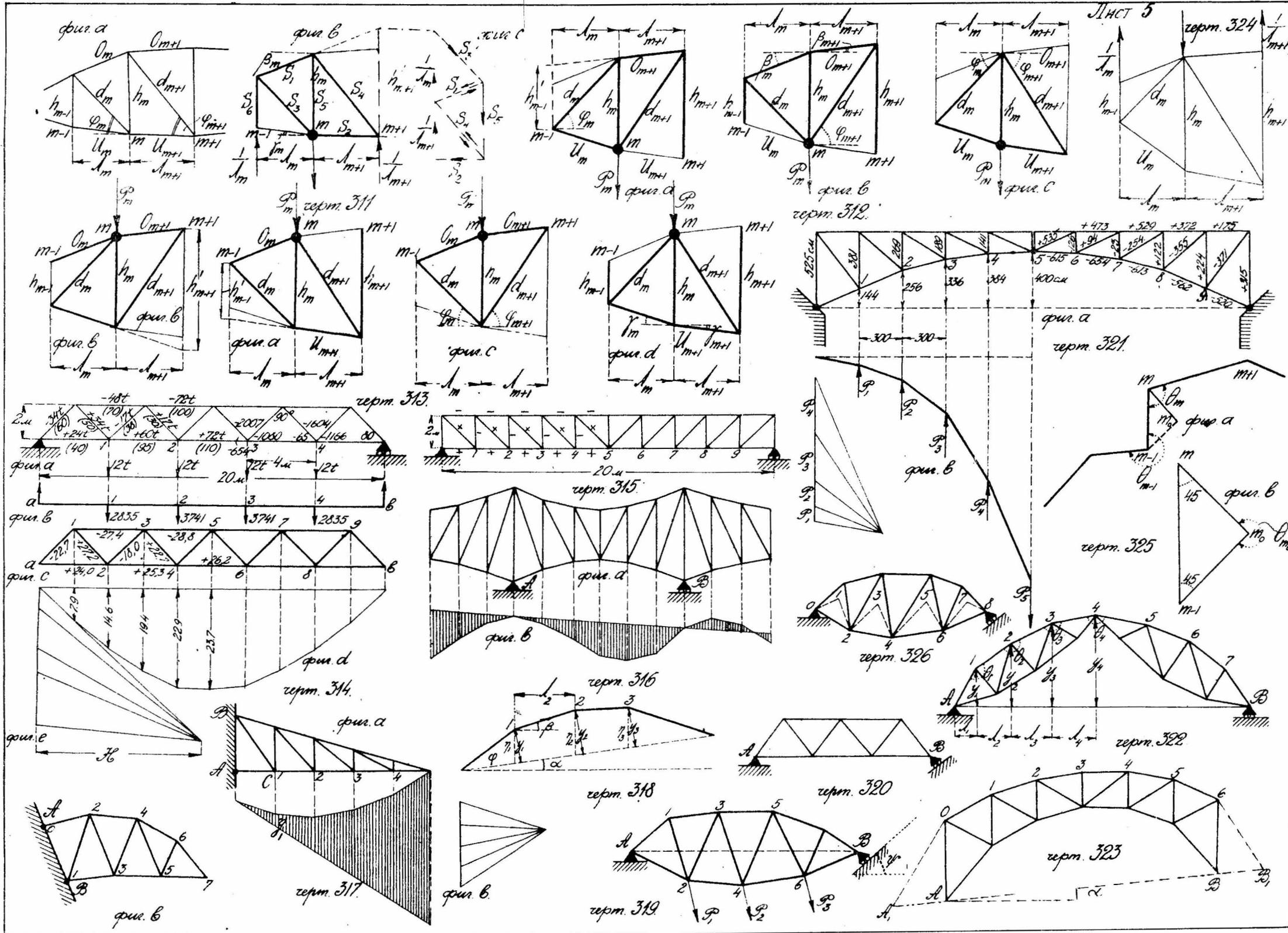
Издание Студенческой Библиотеки.

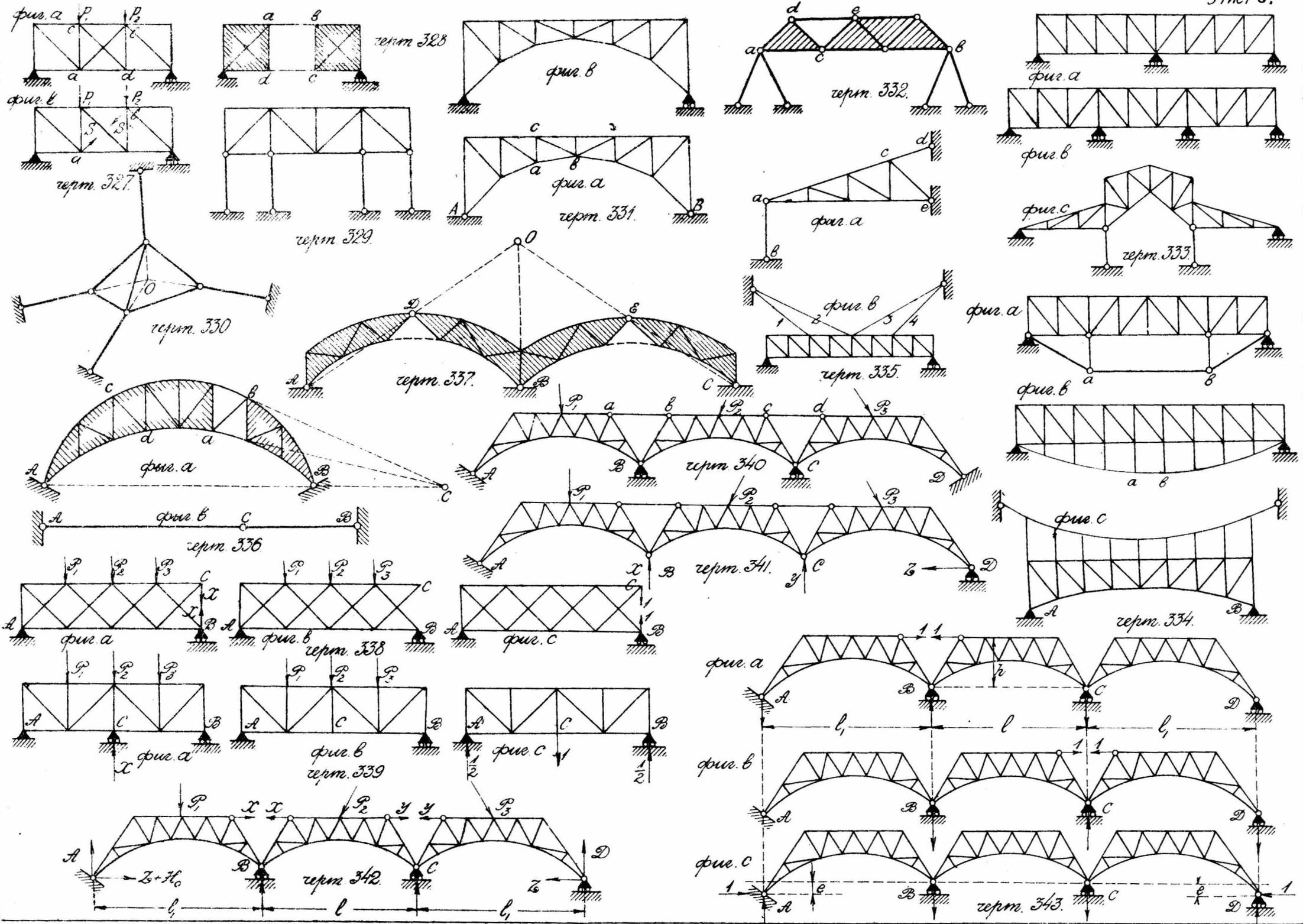
ПЕТРОГРАД.

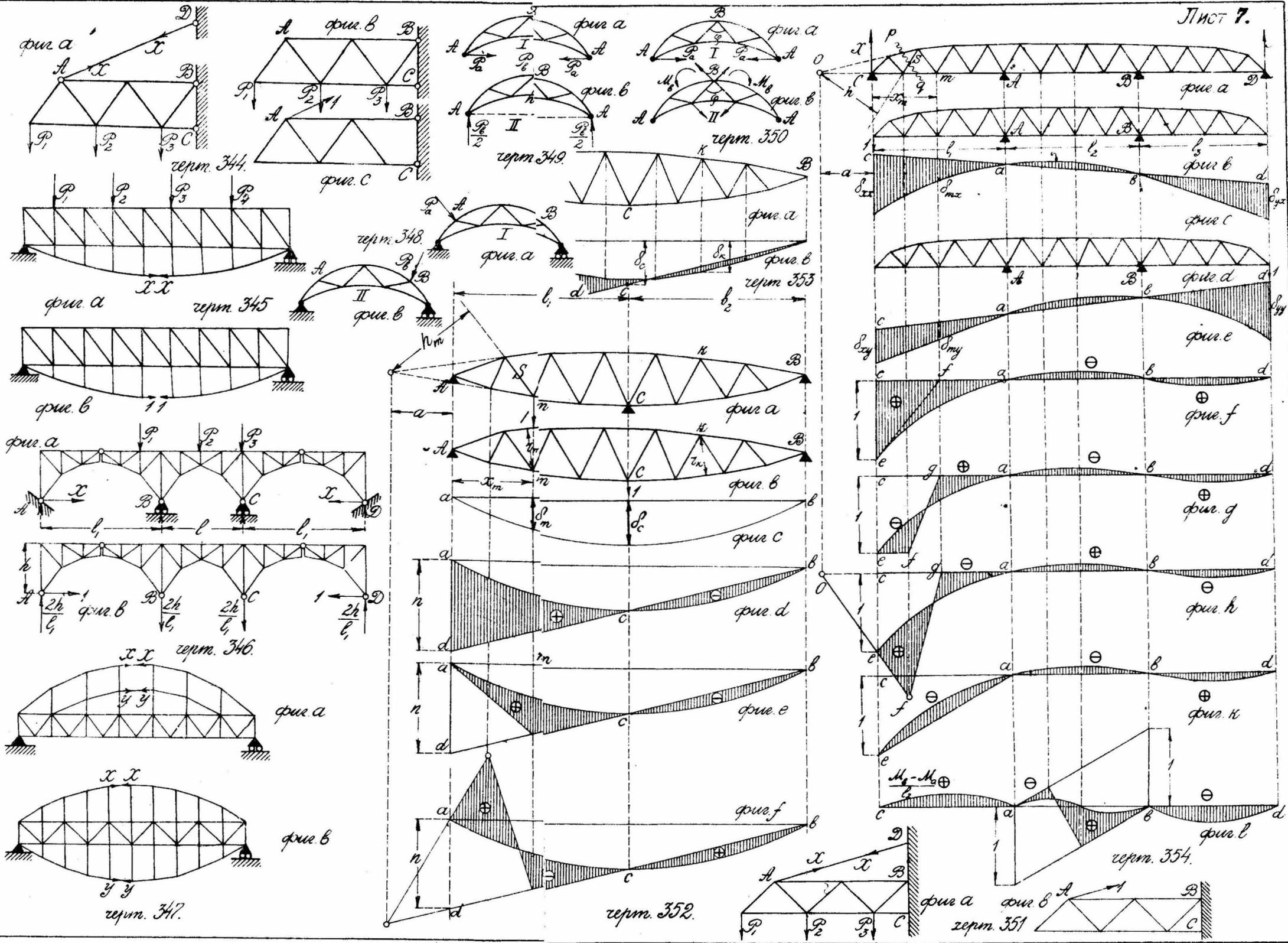
1922.

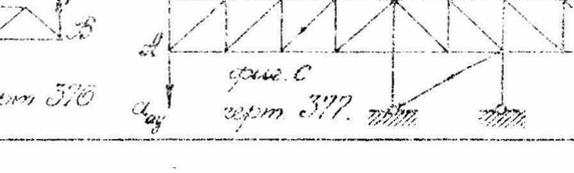
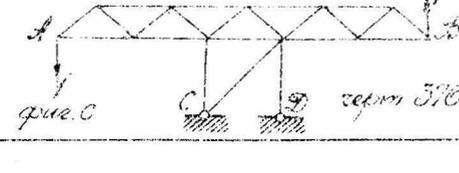
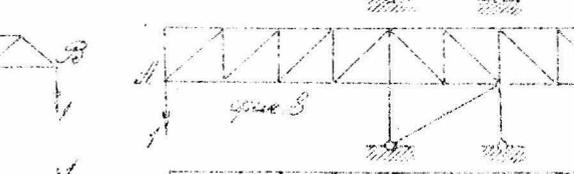
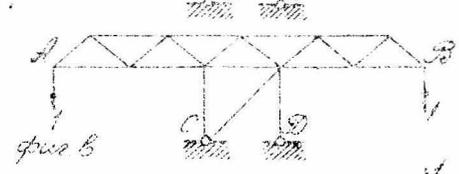
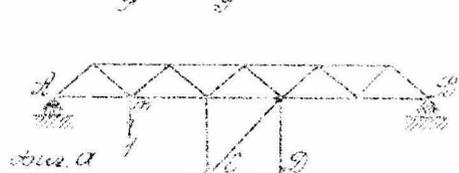
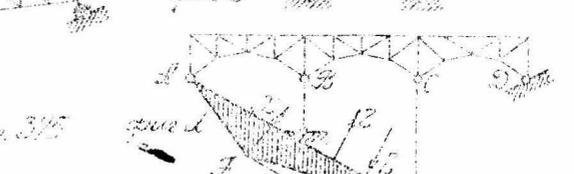
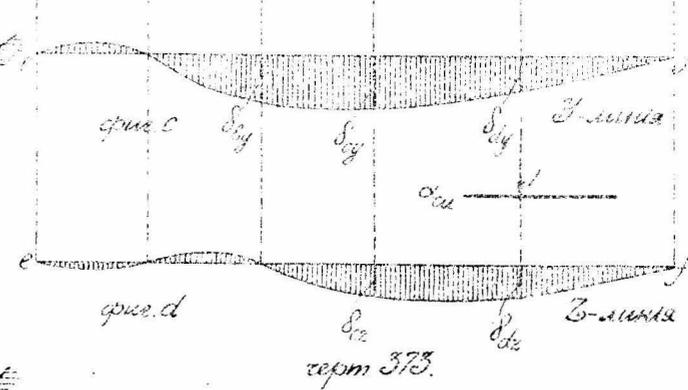
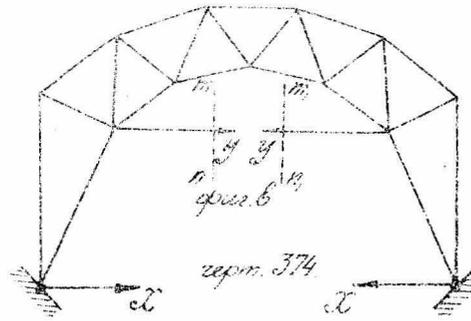
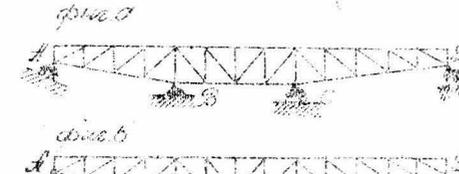
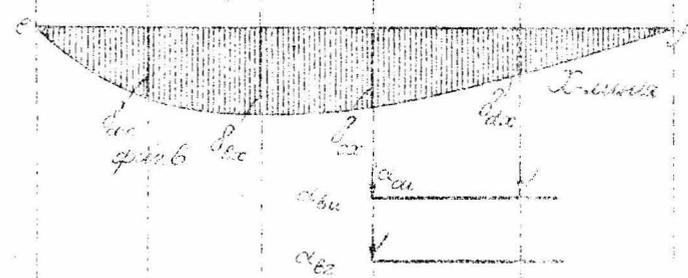
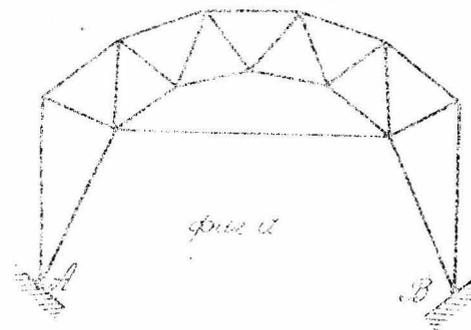
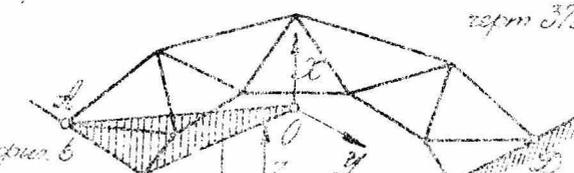
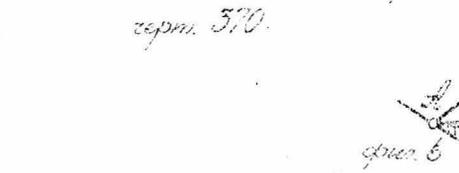
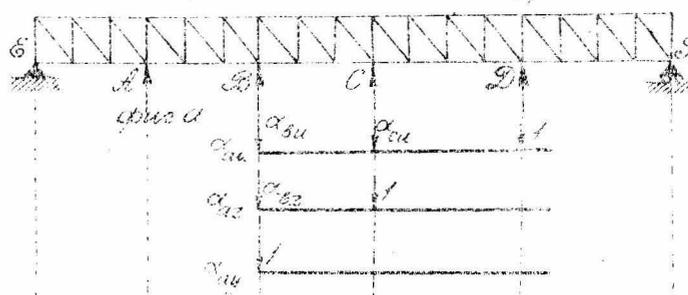
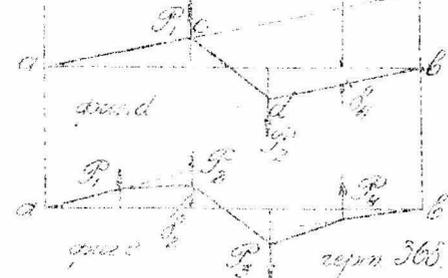
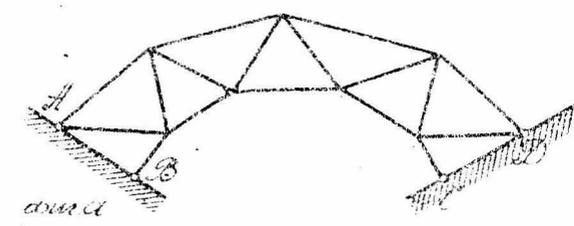
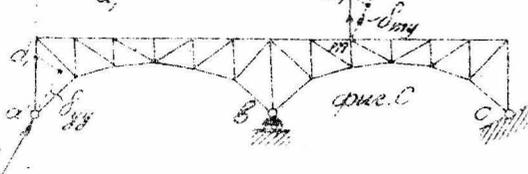
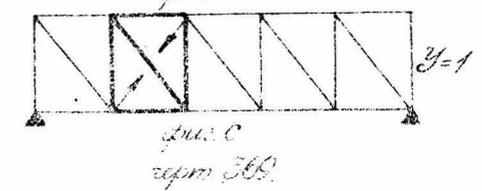
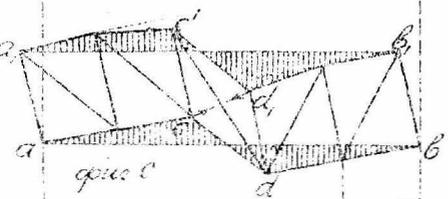
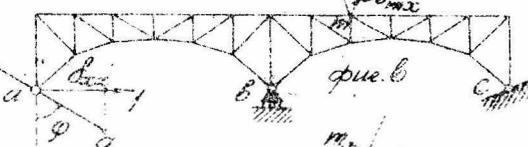
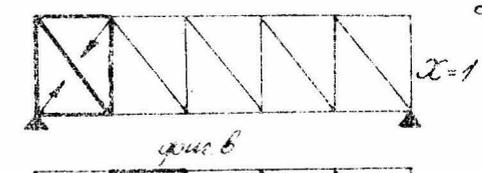
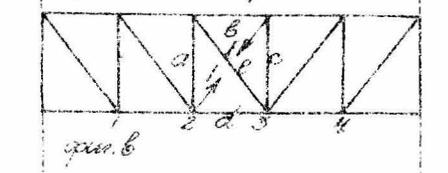
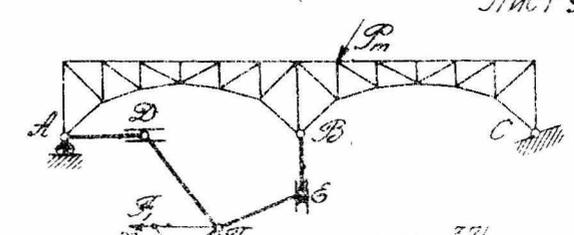
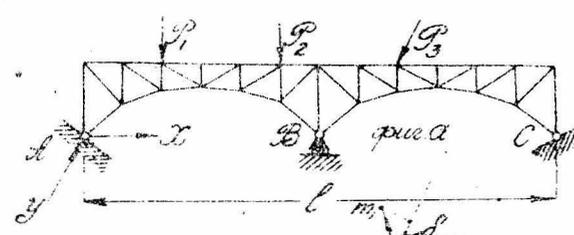
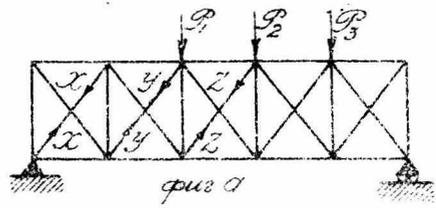
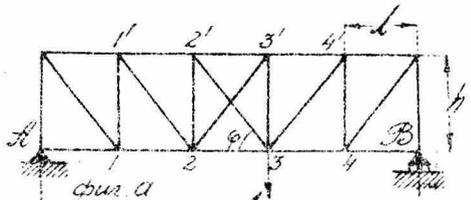


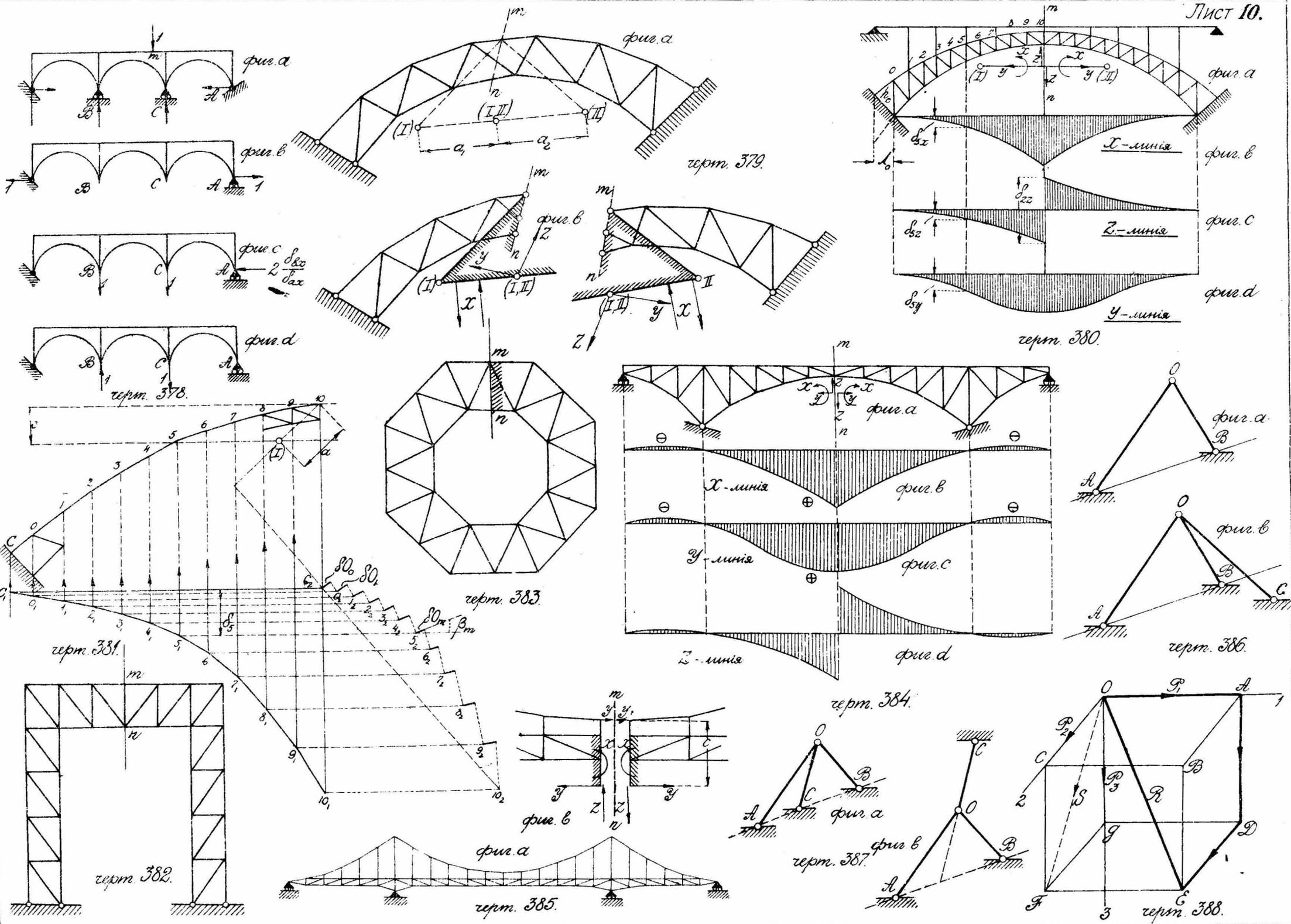


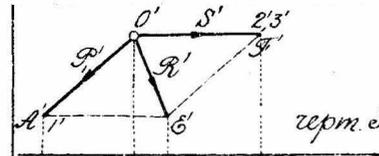




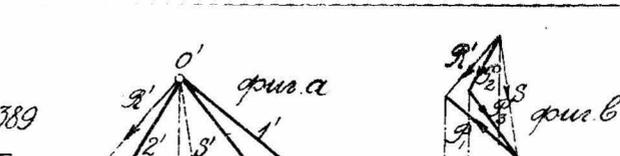




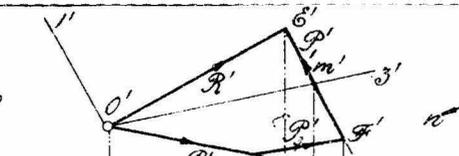




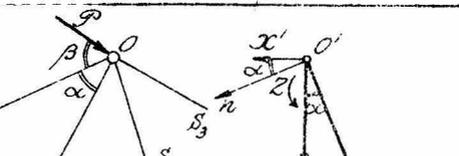
реpm. 389



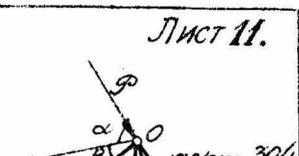
реpm. 390



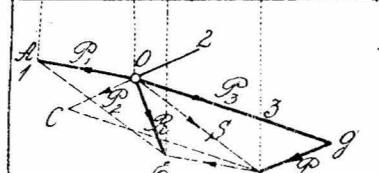
реpm. 391



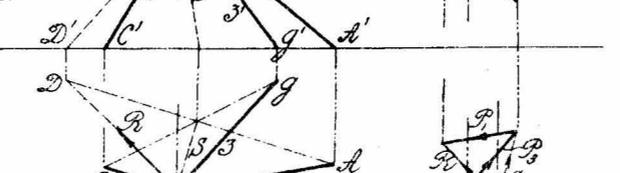
реpm. 392



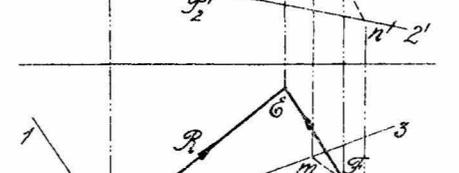
реpm. 394



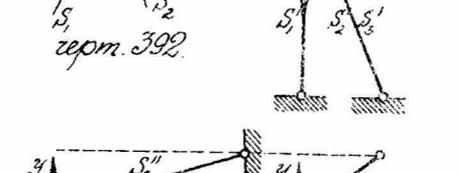
реpm. 395



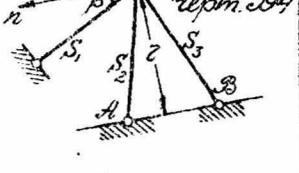
реpm. 396



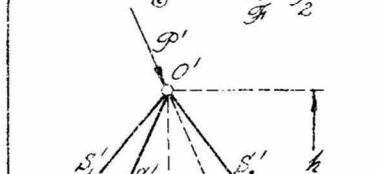
реpm. 397



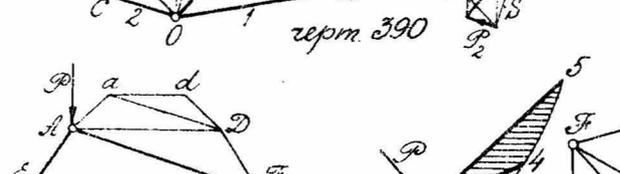
реpm. 398



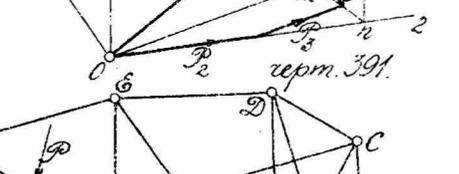
реpm. 399



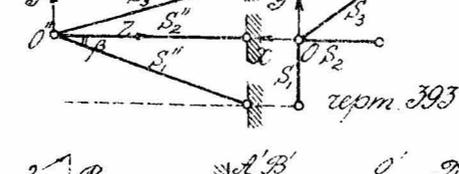
реpm. 400



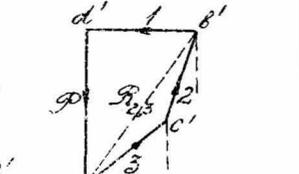
реpm. 401



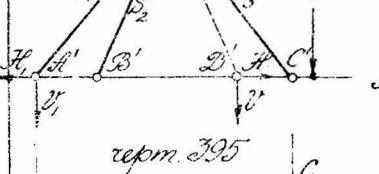
реpm. 402



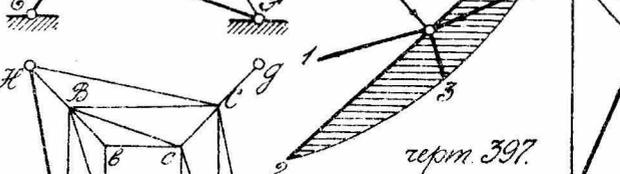
реpm. 403



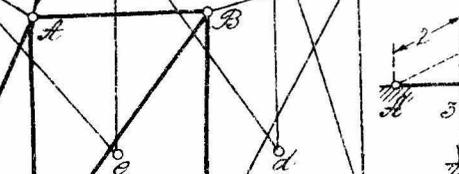
реpm. 404



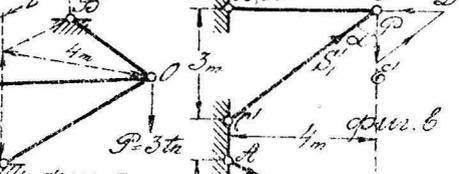
реpm. 405



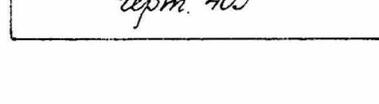
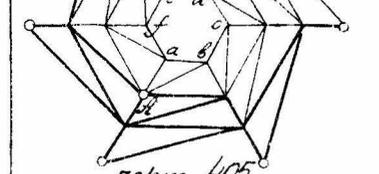
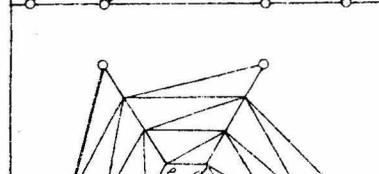
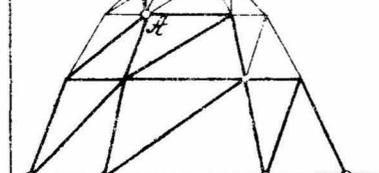
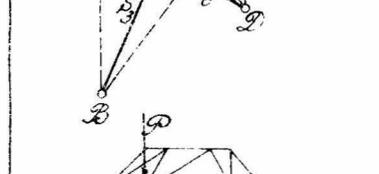
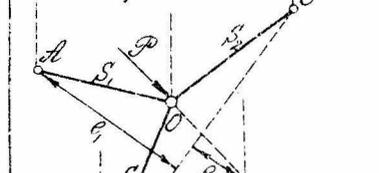
реpm. 406

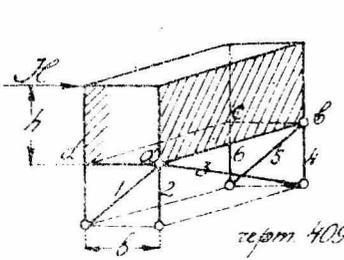


реpm. 407

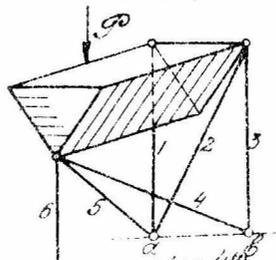


реpm. 408

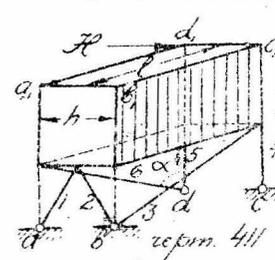




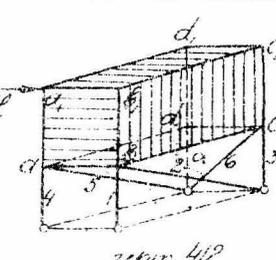
репр. 409



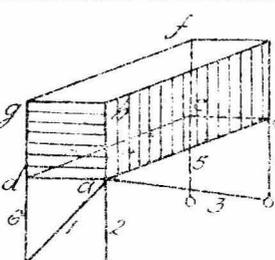
репр. 410



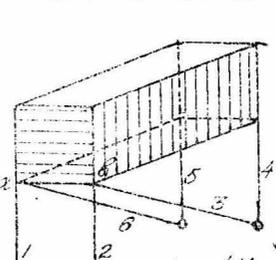
репр. 411



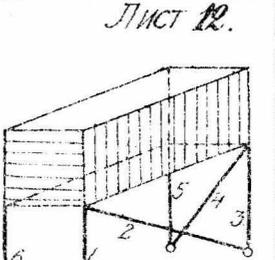
репр. 412



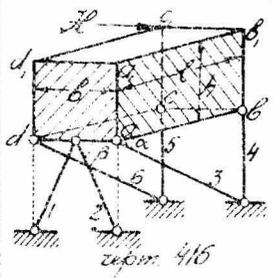
репр. 413



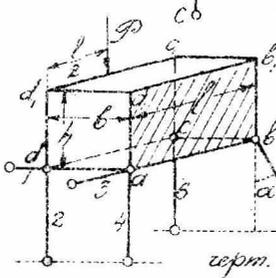
репр. 414



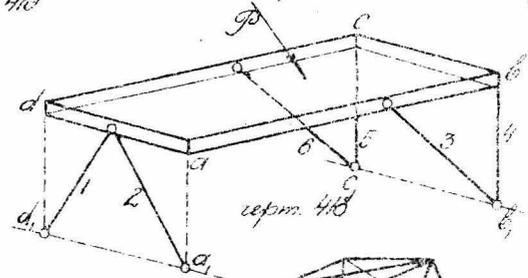
репр. 415



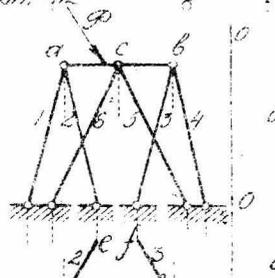
репр. 416



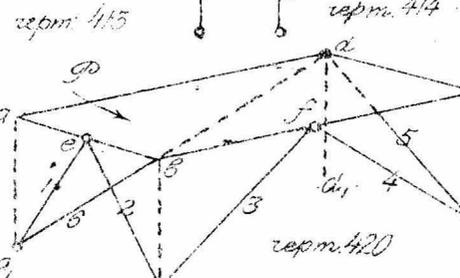
репр. 417



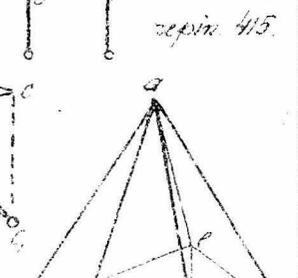
репр. 418



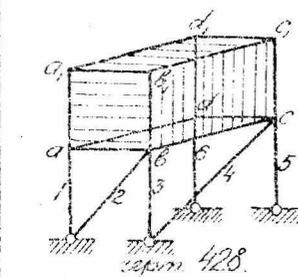
репр. 419



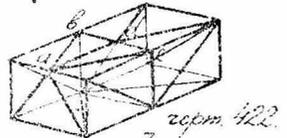
репр. 420



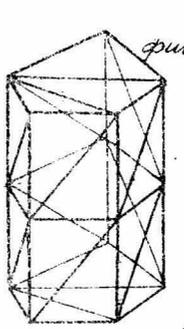
репр. 421



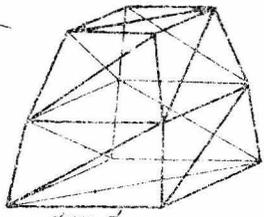
репр. 422



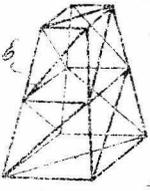
репр. 423



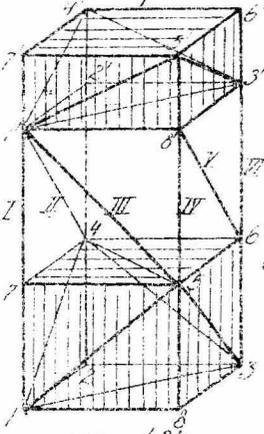
репр. 424



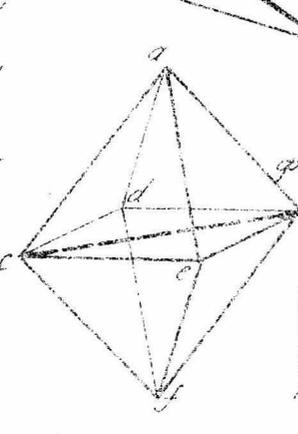
репр. 425



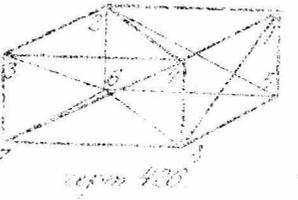
репр. 426



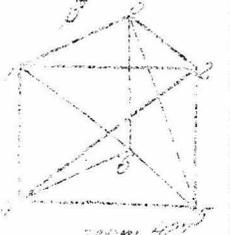
репр. 427



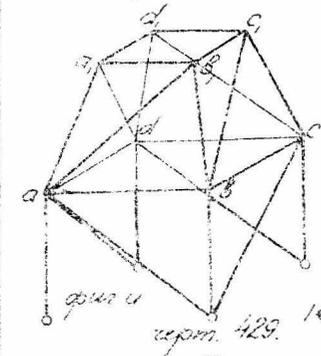
репр. 428



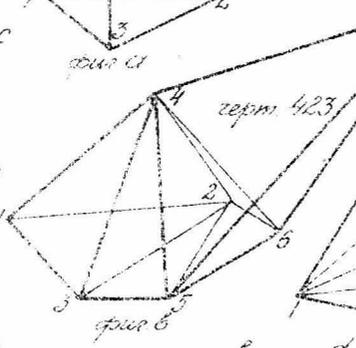
репр. 429



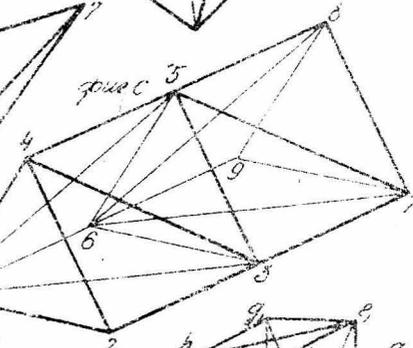
репр. 430



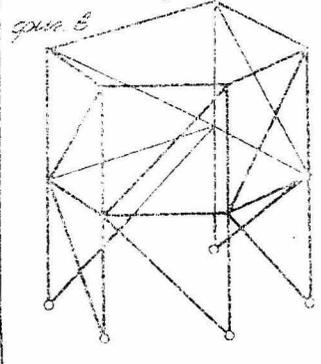
репр. 431



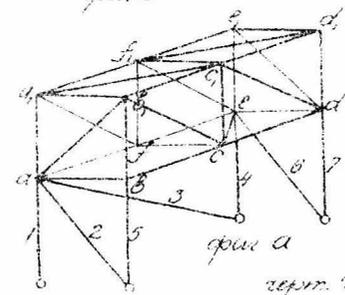
репр. 432



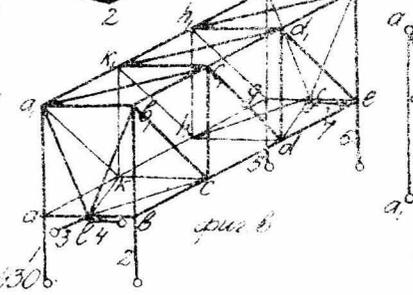
репр. 433



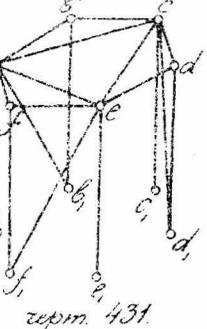
репр. 434



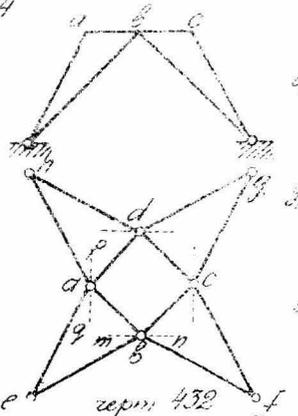
репр. 435



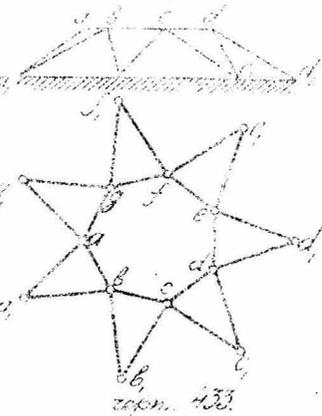
репр. 436



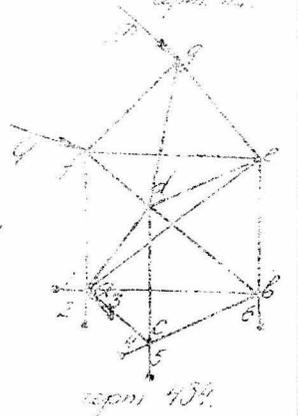
репр. 437



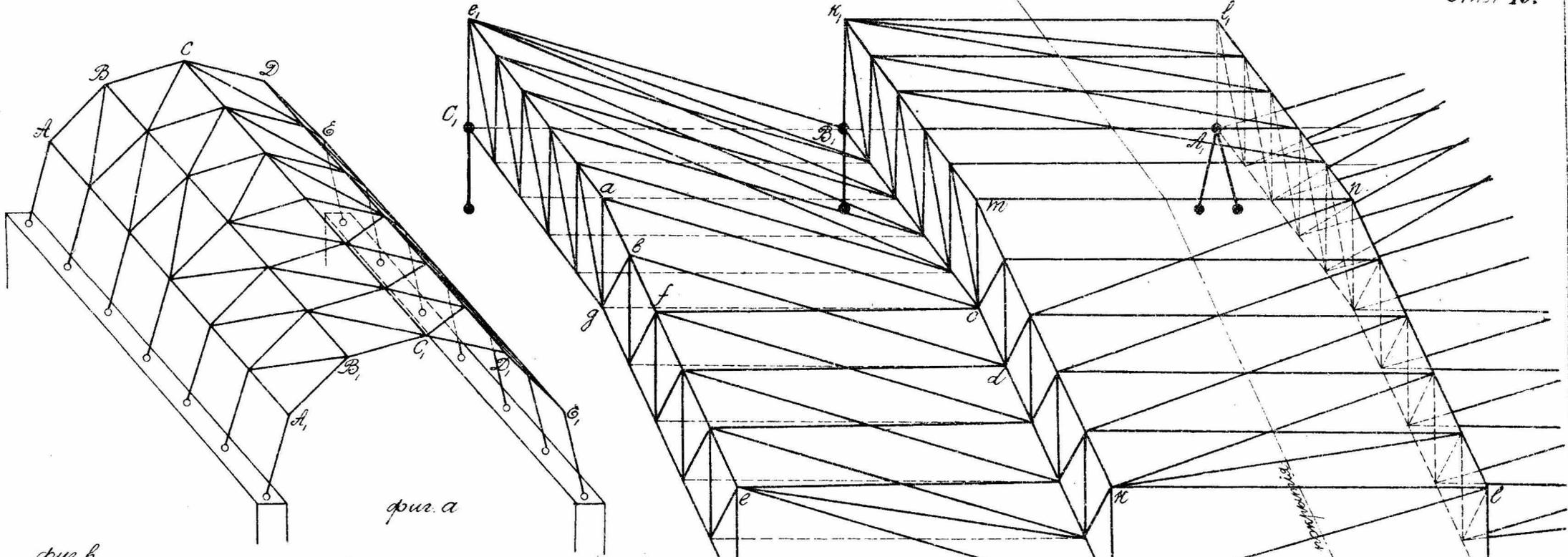
репр. 438



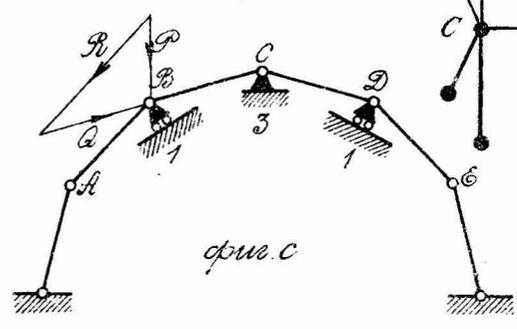
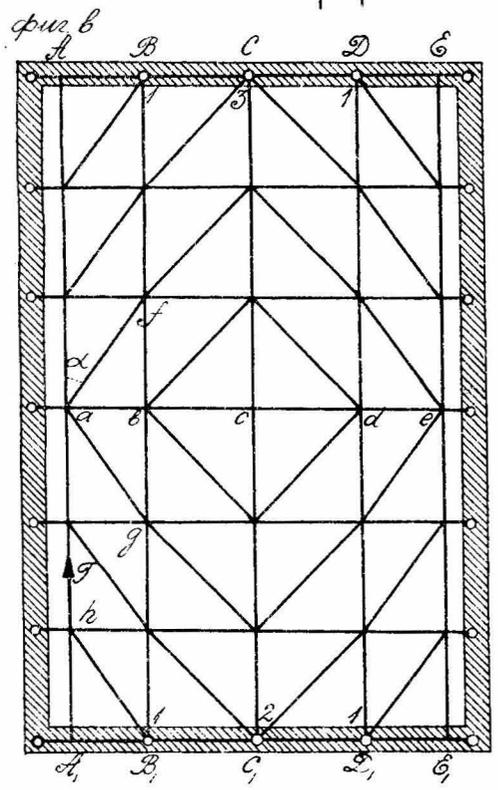
репр. 439



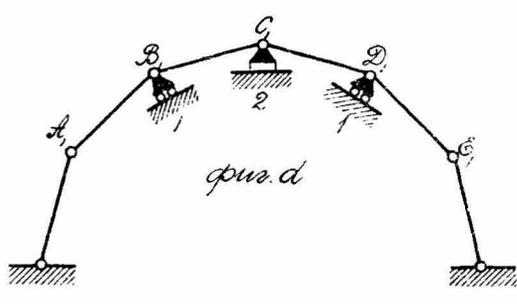
репр. 440



фиг. а

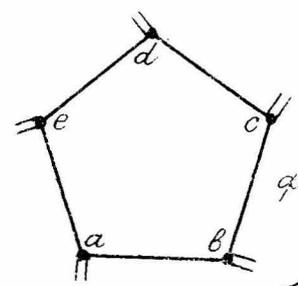


фиг. с

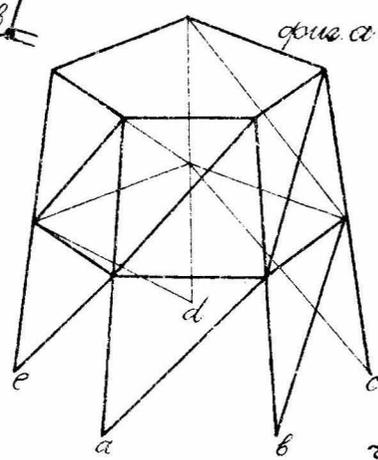


фиг. д

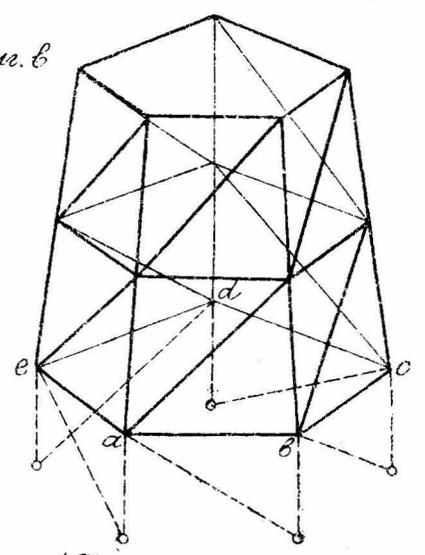
черт. 457.



фиг. е

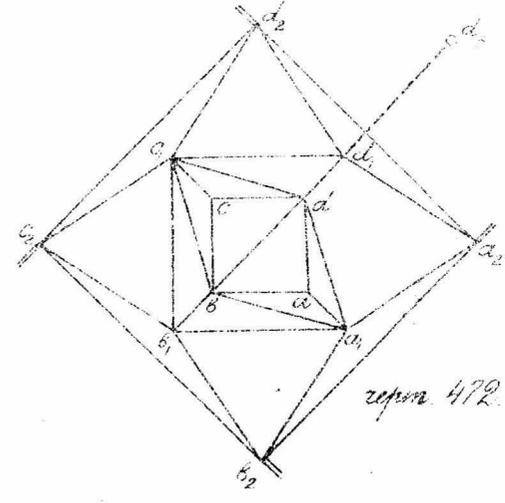
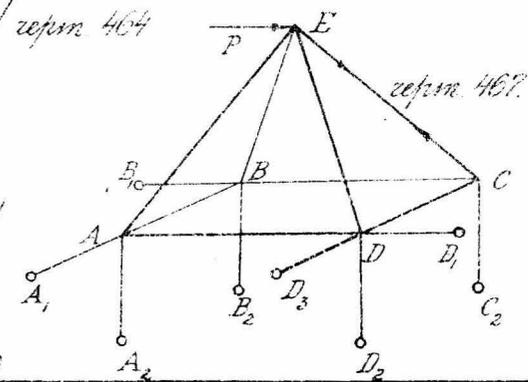
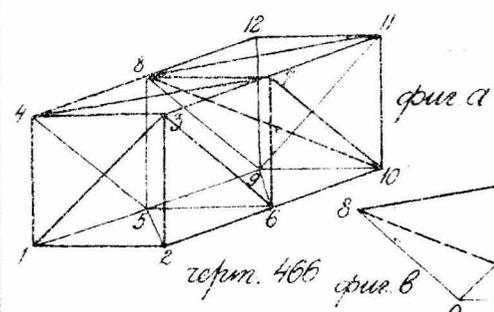
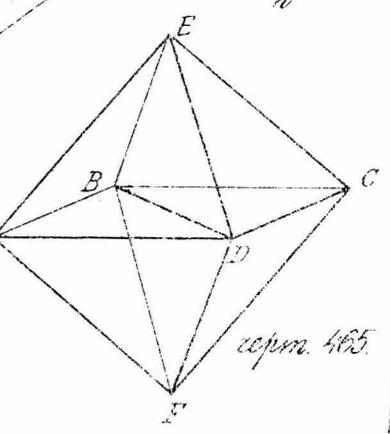
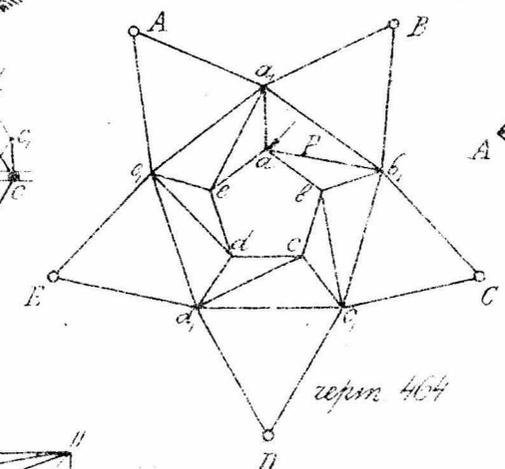
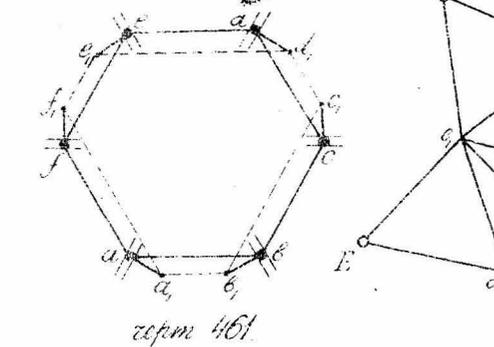
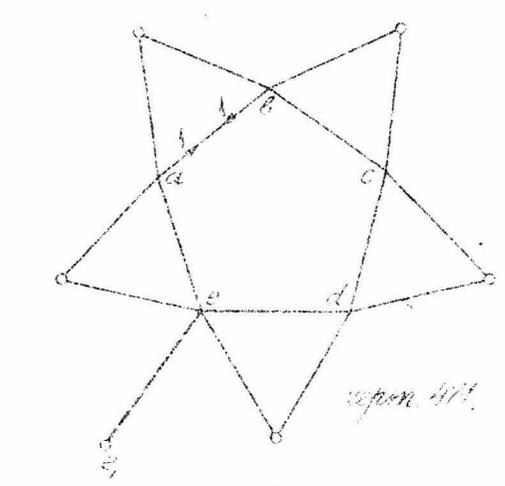
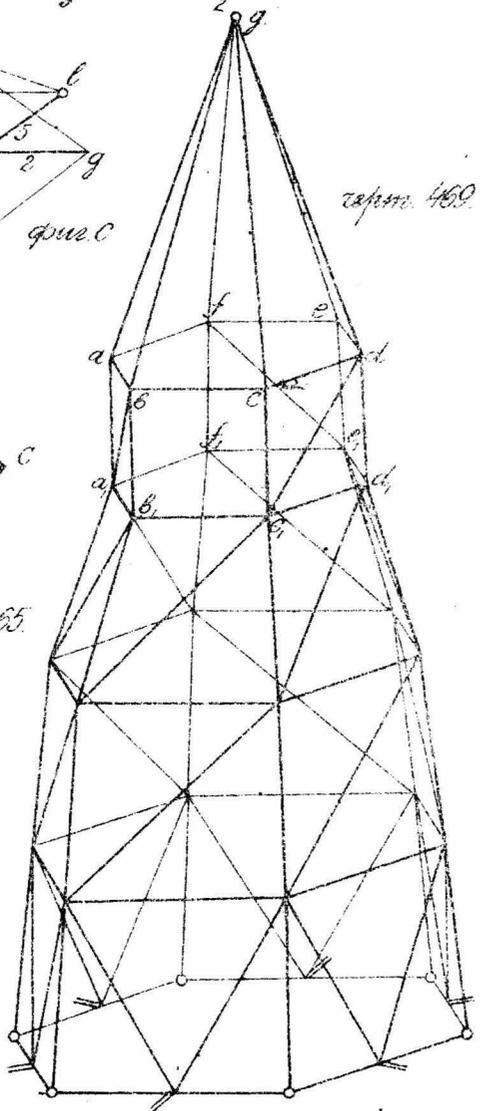
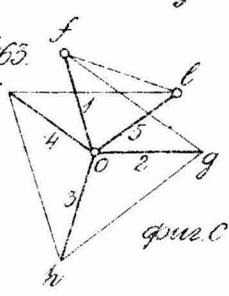
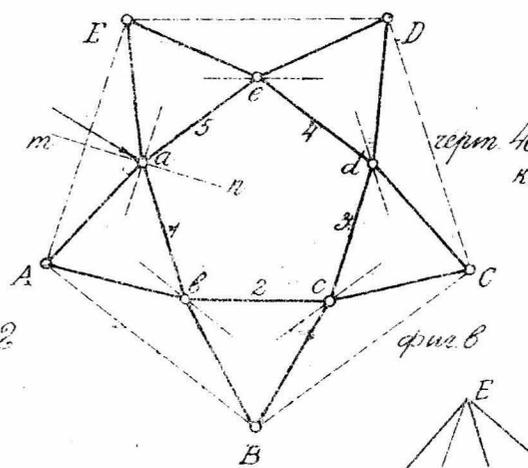
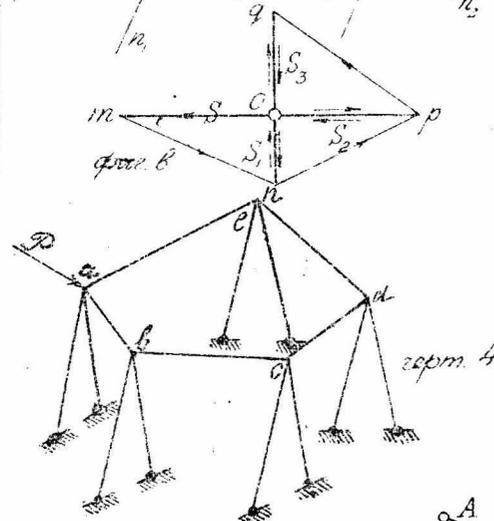
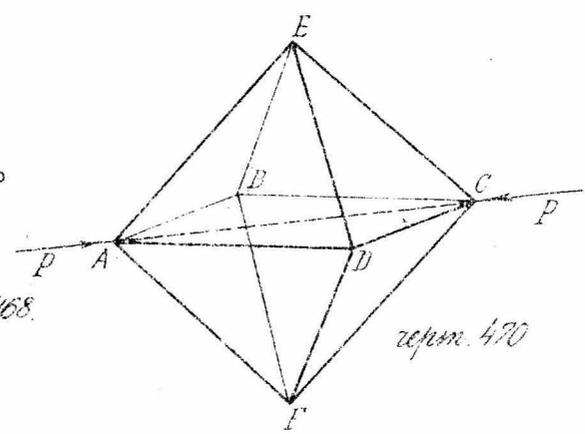
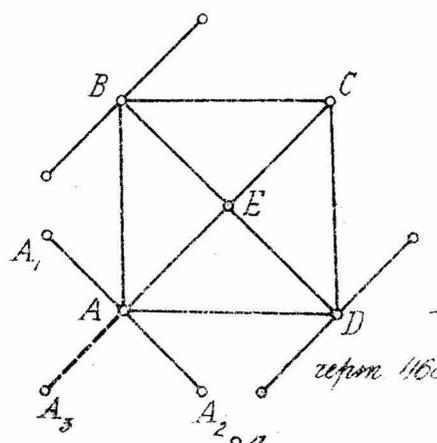
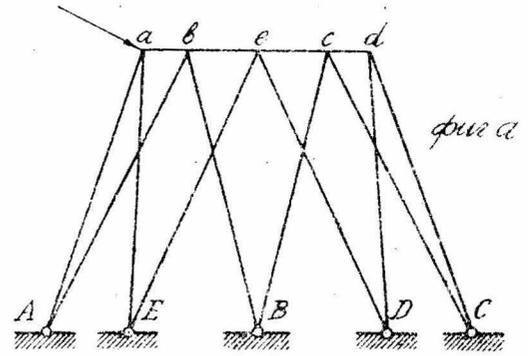
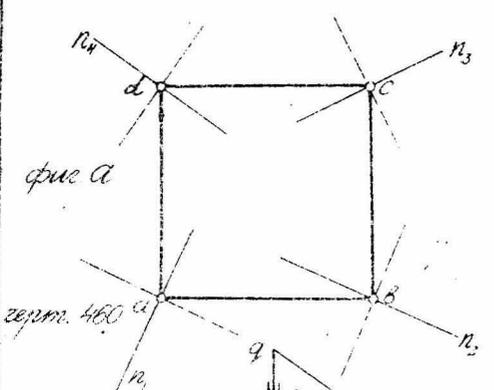


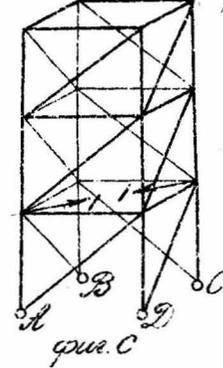
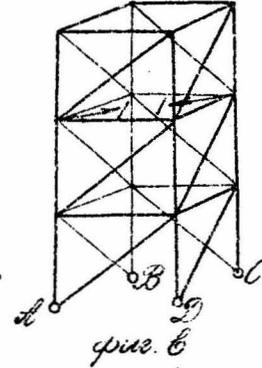
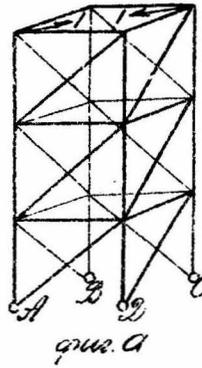
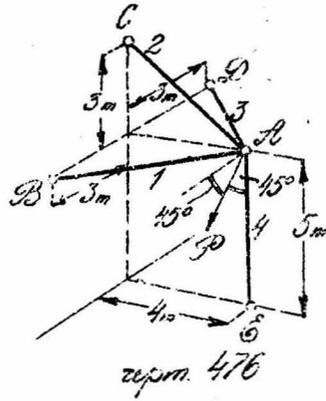
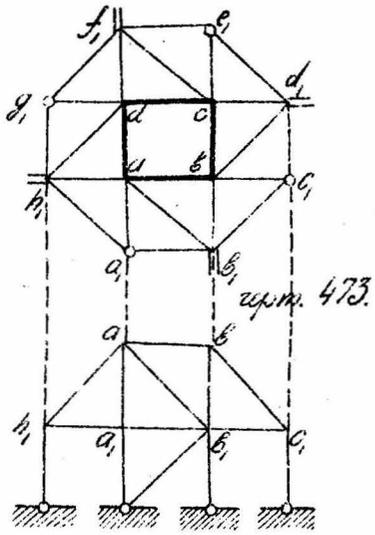
фиг. а



черт. 458.

фиг. б

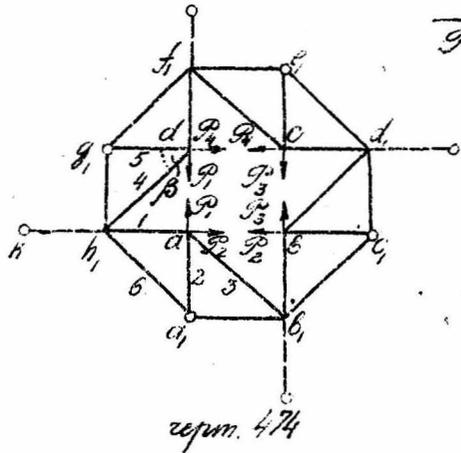




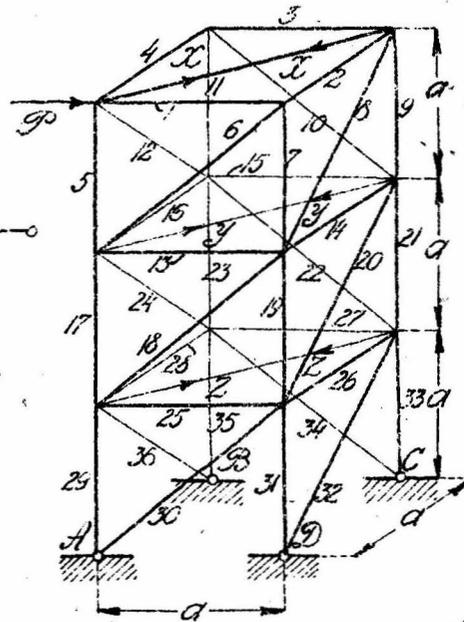
реpm. 478

Указание к реpm. 473

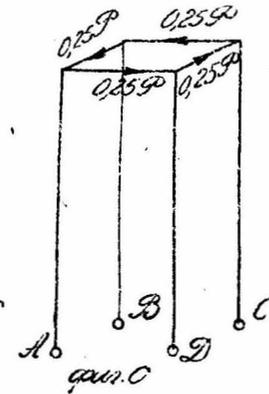
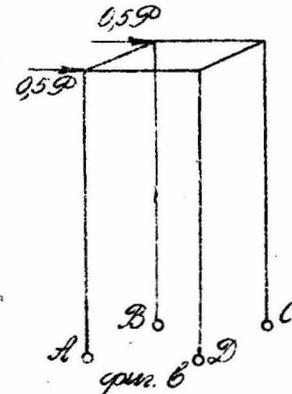
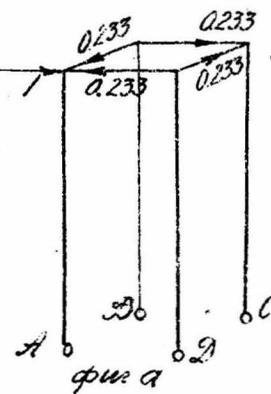
Листы	№№ реpm. 473	Табла	Листы	№№ реpm. 473	Табла
1	269 - 281	IV	10	378 - 388	V VI
2	282 - 286	IV	11	389 - 408	VI
3	287 - 297	IV	12	409 - 434	VI
4	298 - 310	IV	13	435 - 445	VI
5	311 - 326	IV	14	446 - 456	VI
6	327 - 343	V	15	457 - 459	VI
7	344 - 354	V	16	460 - 472	VI
8	355 - 367	V	17	473 - 479	VI
9	368 - 377	V	-	-	-



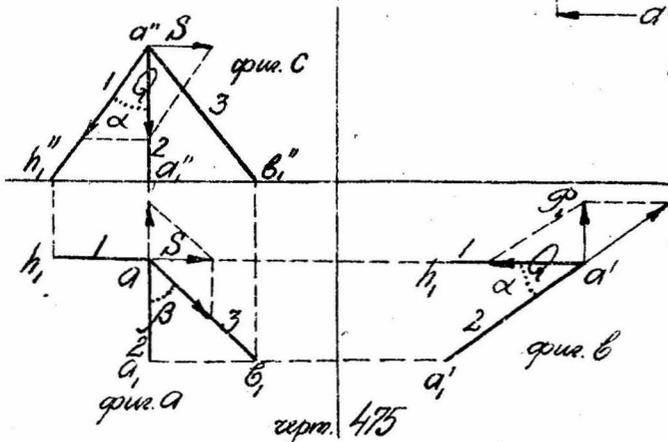
реpm. 474



реpm. 477



реpm. 479



реpm. 475

