1

СПРАВОЧНИК ПО НАДЕЖНОСТИ

RELIABILITY HANDBOOK

W. GRANT IRESON,
EDITOR-IN-CHIEF

EXECUTIVE HEAD
DEPARTMENT OF INDUSTRIAL ENGINEERING
STANFORD UNIVERSITY

McGRAW-HILL BOOK
COMPANY

NEW YORK SAN FRANCISCO
TORONTO LONDON SYDNEY
1966

СПРАВОЧНИК ПО НАДЕЖНОСТИ

ТОМ

I

Перевод с английского
Ю. Г. ЕПИШИНА и Б. А. СМИРЕНИНА

Под редакцией
Б. Р. ЛЕВИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА
1969

УДК 621.3.019.3

Эта книга — первая часть американского справочника по надежности, который в русском издании выходит в трех томах. Справочник составлен компетентными специалистами в области надежности и контроля качества.

Предлагаемый читателю первый том справочника содержит много полезных фактов и рекомендаций, расчетные формулы, сведения из теории вероятностей и математической статистики, вспомогательные таблицы и номограммы. Обстоятельно рассмотрены используемые на практике математические модели надежности, методы обработки результатов испытаний на надежность; большое внимание уделено анализу эксплуатационных данных.

Справочник предназначен для инженеров, разрабатывающих аппаратуру и изделия в различных областях народного хозяйства, для специалистов, связанных с производством, эксплуатацией и управлением, а также для научных работников, аспирантов, преподавателей и студентов технических вузов.

Редакция литературы по новой технике

Инд. 3-1-1
176-69

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРВОГО ТОМА РУССКОГО ИЗДАНИЯ СПРАВОЧНИКА

Одной из характерных примет научно-технического прогресса является резкое возрастание потока информации и связанное с ним развитие новых технических средств передачи, переработки и хранения информации. Постоянное усложнение этих технических средств, находящихся в прямой зависимости от многообразия и ответственности функций, выполняемых современными автоматизированными системами, выдвигает ряд проблем научной методологии, технического проектирования, технологии производства, испытаний опытных образцов и эксплуатации серийных или уникальных изделий. Центральное положение занимает комплексная проблема эффективности больших систем, неотъемлемую часть которой составляет проблема обеспечения надежности.

Проблема обеспечения надежности, четко сформулированная в ее современном виде примерно лет пятнадцать назад применительно к радиоэлектронным устройствам, построенным из большого числа элементов, состоит в разработке методов создания таких изделий, которые способны выполнять заданные функции в течение требуемого промежутка времени. В таком общем виде надежность является универсальным понятием, охватывающим любую техническую специализацию. Методы изучения и контроля надежности широко используются во многих отраслях промышленности. Обеспечение надежности выпускаемой продукции стало одной из важнейших общегосударственных задач прежде всего потому, что ненадежность наносит огромный экономический ущерб народному хозяйству, связанный с затратами на запасные части, ремонтное оборудование и содержание технического персонала, не говоря уже об угрозе безопасности и здоровью людей, о политических и моральных факторах, которые даже не поддаются оценке обычными экономическими показателями. Практический опыт показывает, что в большинстве случаев выгоднее затратить дополнительные средства на обеспечение надежности на этапе разработки изделия, чем расплачиваться ненадежностью изделия при его эксплуатации за кажущуюся экономию средств при проектировании.

Поэтому не случайно, что последние годы к проблеме надежности приковано внимание больших коллективов ученых и инженеров. В ряде промышленно-развитых стран в государственных масштабах созданы специальные службы надежности. Опубликовано огромное количество работ, посвященных вопросам надежности. Вместе с развитием теории и накоплением практического опыта в области надежности, ростом количества публикаций и специалистов, заинтересованных в непосредственном использовании достижений в указанной области, постоянно возникает необходимость в монографиях, обобщающих и систематизирующих результаты (в достаточно компактном виде). Если несколько лет назад существовал пробел в монографической литературе по надежности, то в настоящее время положение существенно изменилось. На русском языке нет теперь острого недостатка в подобных монографиях, способных удовлетворить интересы специалистов различных профилей и уровней. Издательство «Советское радио» начиная с 1966 г. выпускает специальную библиотеку инженера по надежности. Однако все еще мало работ, посвященных практическим методам обеспечения надежности при проектировании, производстве и эксплуатации, методам испытаний и отработки схем и конструкций. Важнейшей задачей является также издание учебных пособий, поскольку самостоятельные курсы надежности постепенно прочно внедряются в программы высшей школы и факультетов усовершенствования, и справочников, необходимых широкому кругу специалистов в их повседневной практической работе.

Предлагаемый русский перевод американского справочника по надежности, составленного высококомпетентными авторами, многие из которых известны по многочисленным публикациям в специальной периодической литературе и выступлениям на ежегодных американских симпозиумах по надежности и контролю качества, несомненно, привлечет внимание советских специалистов не только обширным собранием полезных фактов и рекомендаций, формул, вспомогательных таблиц и номограмм, но и обзором состояния проблемы надежности в США.

Из соображения удобства пользования весьма объемистый справочник при переводе был разделен на три тома, соответствующие приблизительно трем основным направлениям проблемы, которые отмечены в предисловии В. Айресона. Отбор и характер изложения материала во всех трех томах не соответствуют установившимся представлениям о построении справочников. Так, например, в первом томе «ортодоксально» справочными являются лишь четвертая глава и приложения, а остальные главы — обзорные статьи, которые содержат основные результаты, относящиеся к обсуждаемой теме.

Любой перевод научно-технической литературы с иностранного языка сопряжен с неизбежными трудностями, которые возникают в связи с расхождениями в терминологии и обозначениях, используемых в оригинале и принятых в отечественной литературе. В области надежности, как и во многих других «молодых» научных и технических дисциплинах, вопросы терминологии связаны не только и, возможно, не столько с семантическими аспектами, сколько с неустановившимися определениями понятий и количественных характеристик. Поскольку эти вопросы сосредоточены главным образом в первом томе предлагаемого перевода справочника, мы сочли уместным не ограничиться как неизменным элементом редакторского этикета лишь формальным упоминанием о сложности терминологической проблемы.

В начале 1958 г. на страницах журнала «Радиоэлектронная промышленность» была проведена широкая дискуссия по вопросам терминологии в теории надежности, итоги которой были подведены 25 июля того же года на заседании секции надежности Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова. Почти одновременно попытки точных определений надежности были предприняты в США. Как отмечает Райерсон (автор пятой главы настоящего справочника) в обзорной статье, посвященной 50-летию Института радиоинженеров [1]), «этот вопрос (терминологии. — *Б. Л.*) является, вероятно, одной из главных проблем в существующем положении с надежностью в нашей стране». При обсуждении проекта терминологии на IV американском симпозиуме по надежности и контролю качества (Вашингтон, 1958) выявилось, что почти каждое предлагаемое определение является спорным. Это обсуждение продолжалось на следующем симпозиуме, а тем временем по объединенной программе ряда ведомств США был выпущен временный словарь терминов и определений, связанных с надежной продукцией. Аналогичную задачу выполнил Комитет по терминологии АН СССР, опубликовав в 1962 г. терминологию по теории надежности в области радиоэлектроники. В настоящее время действует утвержденный Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР государственный стандарт «Надежность в технике. Термины» (ГОСТ, 13377-67, группа ТОО), содержащий 24 основных термина.

Определение значительного количества терминов в данном американском справочнике отличается от определения основных терминов, которые установлены упомянутым выше ГОСТом. Переводчики и редактор не ставили перед собой задачу строго

---

[1]) *Proc. IRE*, **50**, № 5, 1321—1339 (May 1962).

соблюдать рекомендации ГОСТа при переводе, так как для этого потребовалась бы существенная переработка, а в некоторых случаях и оригинальное творчество. Ни то, ни другое не представлялось возможным. Однако, имея в виду утилитарную роль этого справочника в повседневной практике инженера, мы считаем необходимым обратить внимание читателя здесь (а также в подстрочных примечаниях к переводу) на основное отличие терминологии, принятой в данном издании, от рекомендуемой ГОСТом.

Авторы справочника часто отождествляют определенное свойство изделия с соответствующей количественной характеристикой. Таковы, например, основополагающие определения в разд. 1.3д (курсив мой. — *Б. Л.*):

а) «Надежность — *вероятность* того, что система сохранит работоспособность по крайней мере на протяжении заданного промежутка времени при использовании ее в определенных условиях».

б) «Оперативная готовность — *вероятность* того, что в любой момент времени система либо работает удовлетворительно, либо готова к работе по требованию в заданных условиях эксплуатации».

в) «Ремонтоспособность — *вероятность* того, что неисправная система будет доведена до состояния работоспособности за данное время ремонта».

Некоторые термины размножаются добавлением эпитетов и не имеют эквивалентов в отечественной литературе (надежность при выполнении задачи, внутренняя готовность и др.). Иногда же, напротив, в одном термине объединяются несколько понятий. Таков, например, термин «время жизни», который может означать либо долговечность, либо ресурс, либо срок службы. В некоторых случаях при переводе пришлось отказаться от авторского термина для более точного воспроизведения смысла. Архаический термин «опасность отказов» заменен везде «интенсивностью отказов».

Следует отметить также и другую особенность справочника, которая относится к его методическому построению и состоит в том, что вопросы выбора моделей отказов, расчетов на стадии проектирования и испытаний изготовленной аппаратуры не разграничиваются отдельными главами. Эти вопросы рассматриваются параллельно в нескольких главах, иногда с различных принципиальных позиций. Читатель должен, хотя бы в самом общем виде, иметь четкие представления о принципиальной и практической стороне каждой из указанных групп вопросов.

Общепринято в современной теории надежности рассматривать отказ, т. е. нарушение работоспособности, как случайное событие. Для количественного описания отказов вводятся математические модели — функции распределения вероятностей различных интервалов времени, отражающих процессы функционирования изделий и их элементов. В настоящее время используется небольшое число математических моделей отказов, внезапных и постепенных (износовых), которые не охватывают всех, иногда даже и основных взаимосвязей (с точки зрения надежности), имеющих место в аппаратуре. Однако без таких моделей построение содержательной и конструктивной теории вообще невозможно. Пригодность модели отражает уровень наших знаний о физике отказов.

Расчет надежности на стадии проектирования, когда конструктор уже составил примерную схему устройства, возможен лишь в том случае, если математическая модель отказов задана полностью. Такой расчет авторы справочника называют предсказанием надежности, что, строго говоря, не совсем точно. На наш взгляд, предпочтительнее называть этот расчет априорным анализом надежности выбранной схемы по заранее принятой модели отказов. Продуктивность и реализуемость априорного анализа зависят от того, насколько модель близка к действительности и проста для практического использования. Даже в тех случаях, когда результаты априорного анализа в силу несовершенства модели не могут претендовать на хорошее соответствие истинным показателям надежности, ими нередко можно воспользоваться с целью сравнения различных вариантов построения или отыскания относительно «слабых» мест конструкции. Математическим аппаратом априорного анализа надежности является в основном теория вероятностей и теория случайных процессов, а для восстанавливаемых систем также и теория массового обслуживания.

В справочнике обстоятельно рассмотрены большинство используемых в настоящее время моделей надежности. Априорному анализу надежности отводится сравнительно мало места. Тем, кому потребуется произвести расчет надежности сложных резервированных систем (невосстанавливаемых или с восстановлением) и решать специальные задачи резервирования, необходимо будет воспользоваться дополнительной литературой, указанной в конце первого тома. Для получения сведений о методах априорного анализа постепенных отказов, расчета вероятности невыхода за границы поля (объема) допусков совокупности параметров изделия, определяющих его работоспособность на заданном интервале времени, также придется обратиться к другим источникам. Нет в справочнике указаний на методы оптимального синтеза системы из ненадежных элементов, обладающей заданными показателями надежности. Наконец, отсутствуют необходимые сведения о таком перспективном методе исследования функционирования и надежности сложных систем на стадии проектирования, доводки и модернизации, как вероятностное моделирование на электронных цифровых вычислительных машинах. Этому вопросу в последние годы посвящена обширная литература (см., например, § 4.5 и библиографию в книге И. А. Большакова, Л. С. Гуткина, Б. Р. Левина, Р. Л. Стратоновича «Математические основы современной радиоэлектроники», «Советское радио», 1968).

Большое внимание авторы справочника уделяют вопросам испытаний изделий на надежность и анализу эксплуатационных данных. Эти вопросы, пожалуй, выдвинуты на первый план и обсуждаются с различных точек зрения: теоретической, технической и организационной. Читатель обнаружит их в каждой главе первого тома, хотя здесь в соответствии с назначением этих глав содержатся главным образом статистические методы извлечения информации о показателях надежности из выборочных данных, получаемых в результате специальных испытаний, или из эксплуатационных данных. Они имеются и в большинстве глав второго и третьего томов. Как правило, речь идет о параметрических методах, которые указывают наилучшие (в смысле некоторого критерия качества) алгоритмы обработки наблюдаемых величин (так называемые статистики), позволяющие оценить неизвестные параметры модели отказов или принять решение о соответствии этих параметров заданным техническим условиям. Иначе говоря, и в этом случае модель отказов (т. е. функция распределения вероятностей) может быть известной, но не полностью, а лишь с точностью до некоторых неизвестных параметров, информация о которых в виде оценок или решений извлекается из конечной совокупности выборок. В справочнике содержатся краткие указания и на непараметрические методы (критерии согласия, порядковые статистики), которые могут быть использованы при отсутствии априорной информации о виде функции распределения вероятностей, определяющей модель отказов. Один из разделов (разд. 5.4.5) посвящен ускоренным испытаниям на надежность элементов, при которых создаются форсированные нагрузки, приводящие к повышенной частоте отказов, и устанавливаются соотношения, позволяющие расчетным путем перейти от количественных показателей надежности при форсированных нагрузках к показателям, соответствующим условиям нормальной эксплуатации.

Следует отметить, что положения, связанные с целесообразностью априорного и апостериорного (т. е. по результатам испытаний) анализа надежности, до сих пор в значительной мере остаются дискуссионными. Существуют еще диаметрально противоположные точки зрения: согласно одной из них, вероятностная количественная оценка показателей надежности некоторых технических устройств на отдельных этапах разработки принципиально невозможна, согласно другой, практически возможно дать такую оценку любым техническим устройствам. Даже в одном авторском коллективе американского справочника нет единого мнения по этому вопросу. Оптимизму К. Райерсона, утверждающему, что «большинство испытаний на надежность просты и осуществить их нетрудно, если поняты основные требования», противостоит умеренная осторожность Д. Деллинджера, который предупреждает, что без довольно обширной предварительной информации результаты испытаний «либо бесполезны, либо, что еще хуже, приводят к ошибочным заключениям».

Первый том содержит пять глав и приложения; остальные главы включены в последующие два тома справочника. Первая глава, хотя и называется «Эффективность систем», посвящена главным образом определениям основных понятий и количественных показателей надежности, связанных с безотказностью, готовностью и восстанавливаемостью. Дается несколько упрощенное определение эффективности как вероятности того, что система выполнит свое назначение на заданном интервале времени *при работе в определенных условиях*. При более полном определении вводится пространство состояний системы и распределение вероятностей состояний, причем для каждого состояния определяется функция, характеризующая показатель качества функционирования системы. Эффективность представляет среднее значение этого показателя по вероятностной мере в пространстве состояний. В конце первой главы приведены статистические данные, полученные при эксплуатации 24 однотипных радиолокационных станций.

Во второй главе обстоятельно рассмотрены математические модели отказов, включая распределение Вейбулла, гамма-распределение, нормальное, логарифмически нормальное, Гумбеля и др. Третья глава посвящена планированию испытаний на надежность. Здесь рассмотрены три этапа, предшествующие испытаниям: проверка однородности испытываемой партии изделий, в частности при экспоненциальном распределении, выбор вида математической модели отказов для проведения испытаний и, наконец, принятие одного из известных планов (процедур) испытаний на основании анализа рабочих характеристик планов применительно к конкретным задачам испытаний. К этой главе непосредственно примыкает пятая глава (включенная по этой причине в первый том; в оригинале это глава 15), в которой дается краткая характеристика различным видам приемочных испытаний на надежность и подробно излагаются статистические методы обработки результатов испытаний для трех групп изделий: элементов, аппаратуры, систем.

Четвертая глава представляет математический справочник (в строгом смысле) по теории вероятностей и математической статистике, составленный в очень удобной для использования форме, объем которого вполне достаточен для большинства инженерных расчетов. Ее хорошо дополняют приложения А (таблицы) и Б (графики). В конце приводится библиография по надежности, дополненная редактором перевода.

Следует отметить, что в оригинале имеется относительно большое число опечаток, пропусков и даже ошибочных формул и определений. Замеченные недостатки подобного рода исправлялись, конечно, при переводе, но было бы нереальным для редактора и переводчиков надеяться, что обнаружены все погрешности оригинала. Подавляющее большинство обозначений оставлено такими же, как и в оригинале, хотя не всегда эти обозначения удачны и многие не соответствуют привычным символам, используемым в отечественной литературе по надежности и математической статистике. Все ссылки на библиографические источники перенесены в конец соответствующих глав. Дополнительные ссылки, сделанные редактором, отмечены звездочкой. В некоторых случаях представлялись целесообразными небольшие сокращения в тексте. Предметный указатель ко всему справочнику помещен в конце третьего тома.

Перевод первого тома справочника выполнен Ю. Г. Епишиным (гл. 2, 4, 5, приложения) и Б. А. Смирениным (гл. 1, 3).

Б. Р. Левин

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Надежность как отдельное требование при проектировании и производстве и как самостоятельная дисциплина сформировалась сравнительно недавно, хотя изучение последствий отказов той или иной системы началось вместе с зарождением промышленности. Понятие «надежность» тогда не использовалось, однако изобретателей первого парохода интересовала способность котлов и двигателей выдерживать длительные трансатлантические рейсы. На случай отказа паровой машины предусматривался резерв в виде парусов. В городах не решались переходить на газовое освещение улиц и прокладывать газопроводы из-за опасения, что весь город погрузится в темноту при аварии на газовой магистрали. Предполагалось даже, что злоумышленники могут специально повредить газопровод с целью совершения преступлений в темноте.

Фирма «Додж Бразерз», придумав много лет назад лозунг «Доверие к Доджу», имела в виду надежность. Несмотря на то что в автомобилях американского производства давно применялся электростартер, они еще долго снабжались ручным стартером (например, автомобиль «Триумф ТР-3» выпуска 1960 г.). «Титаник» считался судном, которое не может затонуть, и, по-видимому, переоценка его надежности сыграла определенную роль в гибели корабля.

Вопросы, затронутые в этих примерах, аналогичны основным современным проблемам, связанным с обеспечением надежности. Будет ли аппаратура работать тогда, когда это понадобится? Будет ли она работать достаточно долго, выполняя требуемые функции? Сможет ли оператор или потребитель, устранив отказы и неисправности, выполнить намеченную программу? К каким затратам или издержкам приведет отказ? Какой ценой достигается снижение вероятности отказов или их предупреждение? Как долго может работать аппаратура без ремонта или профилактического обслуживания? Осуществляемые в настоящее время программы в области надежности должны, с одной стороны, ответить на поставленные вопросы, а с другой стороны, дать методы, гарантирующие достижение наиболее экономичного соотношения между затратами и выгодами при проектировании, разработке и производстве той или иной продукции.

Хотя еще в прошлом веке и первой четверти этого столетия, для которых был характерен неторопливый ритм жизни, эти проблемы являлись весьма серьезными, однако последствия отказов не были столь драматичны и столь катастрофичны, как в настоящее время. Появление мощной скоростной авиации и очень сложной военной техники, а также необходимость сокращения сроков разработки означают, что теперь нет времени на то, чтобы действовать старыми методами проектирования, проверки, повторного проектирования и повторной проверки до тех пор, пока будет получена вполне удовлетворительная продукция. В период с 1945 по 1951 г. стало очевидно, что существующие методы проектирования, разработки и производства необходимо изменить с тем, чтобы исключительно сложные системы, зачастую требующие принципиально новых научно-технических решений, можно было проектировать и изготавливать в относительно короткие сроки, обеспечивая при этом высокую вероятность удовлетворительного выполнения требуемых функций. Таким образом, надежность обусловливается практической необходимостью.

Как и при развитии любой новой области исследований, цели в области надежности были сформулированы достаточно ясно, однако не было единого мнения о методах их достижения. К тому же промышленные организации и правительственные комитеты внезапно были поставлены перед необходимостью осуществлять реальные программы в области надежности. Эти программы требовали не только строгого соблюдения сроков выпуска сложнейших систем, но и количественного измерения показателей надежности. Крайне необходимо было дать количественное определение понятия надежности системы. С этой целью было накоплено много данных в виде математических и статистических моделей. Однако количественное измерение успеха той или иной программы мало помогало в решении вопроса о том, какие разделы следовало бы включить в программу обеспечения надежности. Инженеры, ученые и специалисты в области промышленного производства не получали почти никаких указаний относительно того, каким образом им следует добиваться необходимой надежности. Руководители предприятий, ответственные за осуществление конкретных программ, также получали мало помощи в вопросе правильного распределения имеющихся в их распоряжении средств, отпущенных для повышения надежности продукции. В 50-е годы по этому вопросу высказывалось множество различных мнений. Однако и сейчас между специалистами в области надежности и контроля качества, конструкторами, учеными и руководителями предприятий продолжаются дискуссии о методах достижения желаемых результатов.

В этом справочнике делается попытка помочь в преодолении указанных трудностей с помощью конкретных предложений по программам исследования надежности. Хотя эта книга готовилась как справочник для руководителей предприятий, ученых и инженеров, занимающихся контролем качества или вопросами надежности, проектированием и выпуском продукции, в нее включено достаточно много пояснительного материала, который могут использовать студенты старших курсов или аспиранты первого года обучения. Инженер найдет здесь необходимую ему информацию о частных задачах, а студент сможет познакомиться с основными положениями теории и практики надежности. Даже сравнительно неискушенный читатель сможет уяснить основные проблемы и методы их разрешения.

Справочник был задуман для достижения двух основных целей. Во-первых, он должен был служить обширным обобщением опыта в области надежности, систематически изложенного, с тем чтобы инженеры, ученые и руководители предприятий при минимальных затратах усилий смогли познакомиться с достижениями в области обеспечения высокой надежности сложных систем. Заранее было решено, что ни одной точке зрения не будет отдано предпочтения и что все противоречивые мнения будут изложены объективно, без каких-либо комментариев редактора. Читатель может оценить изложенный здесь опыт с точки зрения своей собственной задачи и выбрать те методы, которые, по его мнению, обеспечивают наилучшее решение. Кроме того, эта книга должна дать справочный материал всем специалистам, занимающимся вопросами надежности. В справочник включено большое число понятий, определений, примеров, таблиц, данных о надежности, статистических и математических моделей и таблиц, формул, графиков и методов анализа.

Первые главы посвящены математическим и статистическим моделям. Здесь рассматриваются такие вопросы, как эффективность систем, законы распределения и модели долговечности, основные математические и статистические методы, прогнозы надежности и выбор критериев для проверки надежности. Далее излагается основное содержание программы исследования надежности: система сбора данных о надежности, программы испытаний, анализ неисправностей и отказов, проектирование и разработка систем, обслуживаемость, роль факторов инженерной психологии в обеспечении надежности. Рассматриваются понятия и принципы, используемые при исследовании надежности; эти принципы иллюстрируются на рекомендуемых методах и примерах. Здесь же даются конкретные указания по планированию различных элементов программы исследования надежности. Последние главы справочника посвящены организационным вопросам в области надежности: формулировка требований, поставка оборудования и приемка продукции, экономические аспекты программы обеспечения надежности и контроля качества, организационные работы по обеспечению надежности и качества.

Все элементы программы исследования надежности взаимосвязаны, поэтому для полного их изложения нередко приходится одни и те же вопросы рассматривать в двух и более главах.

Создание такого объемного справочника было бы немыслимо без совместного сотрудничества ряда лиц и организаций. Авторы уделили много времени и внимания подготовке материалов. Они известны своими опубликованными работами по вопросам надежности, и каждый из них является специалистом в той области, которой посвящена написанная им глава.

В. Айресон

ГЛАВА 1

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМЫ

Э. Уелкер

Everett L. Welker

Manager, System Effectiveness Analysis Program,
The General Electric Company,
Tempo, Center for Advanced Studies
Santa Barbara, California

1.1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМЫ КАК ЭЛЕМЕНТ ЕЕ ЦЕННОСТИ

Решение о выборе одного из нескольких вариантов изделий (или систем) принимается на основе оценки ценности каждого из них. Ценность изделия является сложным критерием и определяется многими элементами: техническими и экономическими характеристиками, степенью выполнения требований инженерной психологии и т. д., которые не являются независимыми.

В этой главе, посвященной эффективности системы, излагаются те аспекты понятия ценности изделия или системы, которые тесно связаны с особенностями разработки и производства. В данном разделе эффективность системы рассматривается сначала как часть общей ценности системы. Затем подробно описываются основные элементы, из которых составляется сама эффективность системы. Во избежание многих хорошо известных в этой области трудностей семантического характера сначала даются определения некоторых понятий. Затем рассматриваются соотношения между различными факторами, связанными с эффективностью, в частности, и ценностью системы вообще.

Хотя полное рассмотрение понятия ценности системы здесь не предусматривается, все же целесообразно указать ее основные элементы и место, занимаемое среди них эффективностью системы. Факторы, определяющие ценность системы, можно разделить на четыре класса: стоимость в денежном выражении, трудоемкость, сроки поставок и эффективность. Стоимость в денежном выражении слагается из первоначальной стоимости приобретения, стоимости эксплуатации и расходов, предназначенных для компенсации износа. Трудоемкость определяется числом и квалификацией операторов, обслуживающего и руководящего персонала. Сроки поставок связывают производственные мощности, необходимые для изготовления системы, с нуждами потребителя. Наконец, эффективность системы определяется ее способностью выполнять свое назначение с учетом частоты отказов, сложности обслуживания и ремонта и пригодности для выполнения необходимых функций (если она работает в соответствии с заложенными при конструировании принципами).

1.1a. Эффективность системы как функция эксплуатационных требований, ее возможных состояний и технических характеристик. Выше было указано, что эффективность системы тесно связана с ее способностью выполнять функции, для которых она предназначена. Часто случается, что конструктор, поставщик и потребитель имеют совершенно различные точки зрения относительно функций, для выполнения которых предназначена система. В конечном счете должна преобладать точка зрения потребителя; однако представления конструктора все же оказывают значительное влияние, так как определяют свойства поставляемой системы. Можно сказать, что потребитель задает условия эксплуатации, конструктор определяет структуру, а эффективность системы является функцией каждого из этих факторов, а также их взаимного влияния друг на друга.

Для более точного описания эффективности необходимо учесть фактор времени как дополнение к условиям эксплуатации и структуре. Необходимо проанализировать во времени эксплуатационные требования, предъявляемые к системе, а также изучить возможные ее состояния во времени с учетом технических характеристик, условий эксплуатации и требований к качеству работы. Эту классификацию во времени можно кратко представить следующим образом.

Эксплуатационные требования

1. Система должна функционировать.
2. Система не должна функционировать.
   - 2.1. Работа не предусмотрена.
   - 2.2. Система является резервной.

Состояния системы

1. Система находится в работоспособном состоянии.
2. Система находится в неработоспособном состоянии.
   - 2.1. Планируется выполнение ремонта.
   - 2.2. Выполняется ремонт.
     - 2.2.1. Подготовка ремонта.
     - 2.2.2. Отыскание неисправности.
     - 2.2.3. Устранение неисправности.
     - 2.2.4. Проверка после ремонта.
   - 2.3. Выполнение ремонта отложено.
     - 2.3.1. Ожидание деталей.
     - 2.3.2. Ремонтная мастерская закрыта согласно нормальному распорядку работы.
     - 2.3.3. Задержка с выполнением ремонта из-за наличия более срочной работы.

Конечно, приведенный выше перечень категорий является ориентировочным. В некоторых случаях он может быть менее подробным; иногда же может потребоваться бо́льшая детализация.

Третьим элементом, определяющим эффективность системы, является качество ее работы. Этот элемент характеризуется не только пригодностью системы для выполнения намеченных функций при нормальной работе оборудования. Критерий качества работы сам по себе является довольно сложным, и его нелегко определить в общем виде. Чаще всего приходится указывать свой критерий для каждой конкретной системы. Несомненно, прежде всего требуется безотказность системы, но важно учитывать также, что подразумевается под степенью качества в более широком смысле. Следует рассмотреть также и случай пониженного качества работы, причем снижение качества работы можно оценить как уменьшение эффективности системы.

Данная глава посвящена рассмотрению логической структуры этих трех элементов — эксплуатационных требований, состояния системы и показателей качества работы — в зависимости от времени с целью получения более точного определения понятия эффективности системы. Будут введены понятия оперативной готовности, готовности, обслуживаемости, надежности и т. д. Раньше эти термины приводили к многочисленным семантическим проблемам, так как каждому из них придавалось множество значений. В связи с этим настоящая глава содержит полный набор определений терминов, охватывающий основные факторы, относящиеся к понятию эффективности системы.

1.1б. Эффективность системы как функция оперативной готовности, надежности при выполнении задачи и пригодности конструкции. Задачу, возникающую при анализе эффективности системы, можно в общем виде сформулировать в виде трех основных вопросов.

1. Готова ли система для работы, когда это потребуется?

2. Будет ли система сохранять работоспособность на протяжении необходимого интервала времени в предположении утвердительного ответа на первый вопрос?

3. Выполнит ли система поставленную задачу в предположении утвердительного ответа на два первых вопроса?

Первый вопрос связан с оперативной готовностью (operational readiness), второй — с надежностью при выполнении задачи (mission reliability) и третий — с пригодностью конструкции (design adequacy). Каждое из этих трех понятий связано с требованиями эксплуатации, состоянием оборудования и техническими характеристиками. Время имеет решающее значение при оценке оперативной готовности и надежности выполнения задачи; оно имеет меньшее значение при оценке пригодности конструкции. Таким образом, необходимо рассмотреть, как влияет время, а для этого нужно проанализировать совместно и по отдельности эксплуатационные требования и состояние оборудования.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕРВАЛОВ ВРЕМЕНИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ТРЕБОВАНИЙ И СОСТОЯНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ

Ниже даны определения различных видов интервалов времени и рассмотрены взаимосвязи между ними.

В зависимости от эксплуатационных требований календарное время классифицируется следующим образом:

1. *Время работы* — интервал времени, на протяжении которого оборудование работает безотказно. Этот интервал времени является основным с точки зрения надежности. Время работы на самом деле является понятием, связанным с состоянием оборудования.

2. *Запланированное время работы* — интервал времени, в течение которого оборудование должно работать. На протяжении этого интервала времени оборудование будет работать, если оно находится в исправном состоянии.

3. *Запланированное время простоя* — интервал времени, в течение которого не предусматривается работа оборудования (например, телефонная станция учреждения ночью или камеры телевизионной студии в период, когда нет передач).

4. *Время хранения* — интервал времени, на протяжении которого оборудование является запасным, т. е. дополнительным оборудованием, используемым только при необходимости замены.

Ниже перечисляются виды интервалов времени, связанные с состоянием оборудования:

1. *Время исправного состояния* — интервал времени, на протяжении которого оборудование работает или могло бы работать.

2. *Время работы* (было определено выше) — интервал времени, в течение которого оборудование работает безотказно.

3. *Время неисправного состояния* — интервал времени, на протяжении которого оборудование находится в неисправном состоянии, — оно может работать лишь после какого-либо ремонта или обслуживания.

4. *Организационное время* — интервал времени, на протяжении которого подготавливаются мероприятия по обслуживанию. В него входят все организационные задержки до и после фактического выполнения работ по обслуживанию.

5. *Время ремонта* — интервал времени, в течение которого выполняются действия, связанные с фактическим ремонтом: разборка, обнаружение неисправности, выполнение ремонта, испытание и проверка оборудования.

6. *Время снабжения* — интервал времени, на протяжении которого фактический ремонт откладывается в ожидании получения запасных частей.

1.3. ПОНЯТИЯ, С ПОМОЩЬЮ КОТОРЫХ ИССЛЕДУЕТСЯ И ОЦЕНИВАЕТСЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМЫ

Очевидно, что рассмотрение всех перечисленных выше видов интервалов времени имеет существенное значение при оценке эффективности любой системы, конечно, с учетом исследования пригодности конструкции, которая позволяет судить о способности системы выполнить поставленную задачу при ее безотказной работе. Это рассмотрение облегчается при введении понятий, характеризующих различные виды интервалов времени, таких, как средние значения, отношения интервалов и распределения, включая и взаимосвязи между различными видами интервалов. Хотя и будет дано количественное определение этих характеристик, следует помнить, что полную количественную оценку эффективности системы нельзя получить только путем оценки каждой из этих величин обособленно. Ряд соотношений и специальные условия играют первостепенную роль при оценке эффективности каждой частной системы.

1.3а. Связь между характеристиками. Взаимные связи между различными характеристиками схематически показаны на фиг. 1.1; это может облегчить понимание приводимых ниже определений.

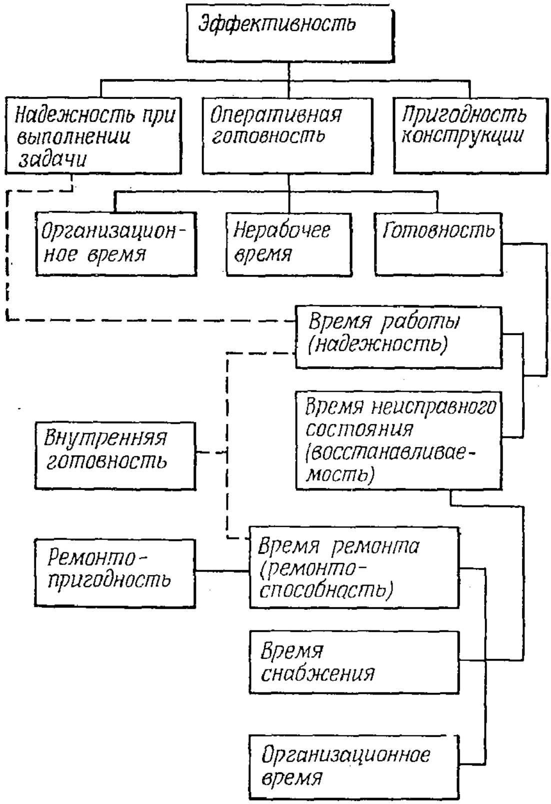
1.3б. Понятия, основанные на учете одного вида интервала времени. Прежде всего рассмотрим понятие надежности, которое развивалось на протяжении многих лет. Надежность системы или элемента оборудования — это вероятность того, что оборудование будет сохранять работоспособность по крайней мере на протяжении заданного интервала времени при использовании его в определенных условиях[1]. Функция надежности $R(t)$ представляет выражение этой вероятности как функции длины интервала времени от 0 до t. Таким образом, надежность определяется с помощью интегральной функции распределения. Соответствующая плотность вероятности называется плотностью

[1] В ГОСТ 13377-67 дано следующее определение понятия надежности: «Свойство изделия выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки». — *Прим. ред.*

вероятности времени работы до отказа и обозначается через $u(t)$. Эти две функции связаны соотношением

$$u(t) = -\frac{dR(t)}{dt}.$$

Можно определить понятия, характеризующие другие интервалы времени. Ремонтоспособность (repairability) — это вероят-



Фиг. 1.1. Понятия, связанные с эффективностью системы.

ность того, что отказавший элемент оборудования будет доведен до рабочего состояния за время ремонта, не превышающее заданное, при выполнении ремонта в определенных условиях. Ремонтоспособность вычисляется по плотности вероятности длительности ремонта. Восстанавливаемость (maintainability) представляет вероятность того, что отказавший элемент оборудования будет приведен в рабочее состояние за время неисправного состояния, не превышающее заданное время, при определенных условиях восстановления и организации. Конечно, существует соответствующая плотность вероятности времени неисправного состояния. Очевидно, что аналогичные вероятности и плотности вероятности могут быть рассмотрены и для организационного времени, времени снабжения и других видов интервалов времени, хотя специальные термины ранее и не предлагались.

1.3в. Понятия, основанные на отношениях интервалов времени. Как уже указывалось выше, распределения интервалов времени различных видов дают не полную, а лишь частичную картину. Существует ряд взаимосвязанных понятий, которые необходимо учесть, и, кроме того, имеются еще другие важные характеристики, которые можно выразить через отношения интервалов времени. Особое значение имеют три из этих характеристик: внутренняя готовность (intrinsic availability), готовность (availability) и оперативная готовность (operational readiness). Применение этих терминов не стандартизовано, что создавало существенные трудности. Например, многие применяют термины «готовность» и «оперативная готовность» как взаимозаменяемые; а другие авторы различают эти термины. Для некоторых читателей термин «внутренняя готовность» может оказаться совершенно новым. Чтобы решить эти семантические проблемы, необходимы объединенные усилия; можно надеяться, что данное рассмотрение внесет некоторый вклад в достижение этой цели.

Прежде чем дать формальные определения этих терминов, полезно описать их качественно. Каждое из рассматриваемых понятий связано с отношением времени исправного состояния ко всему времени или, быть может, к сумме времени исправного состояния и какого-то времени неисправного состояния. Таким образом, каждое из этих понятий характеризует долю (или вероятность) времени, в течение которого существует удовлетворительное состояние. Очевидно, что под «хорошим» временем в этом смысле можно понимать либо время, в течение которого оборудование сохраняет работоспособность, либо время, когда оно исправно, но не используется, либо сумму этих двух промежутков времени. Под «плохим» временем можно понимать либо время, в течение которого выполняется ремонт, либо время неисправного состояния, либо некоторую комбинацию интервалов времени других видов. Можно также иметь в виду полный промежуток времени, например все время, за исключением длительности хранения, либо все время за исключением времени хранения и времени, когда оборудование не используется, либо полное календарное время. Таким образом, для определения каждого из понятий необходимо указать смысл «хорошего» и полного времени.

На основании приведенного выше общего рассуждения можно дать определения понятий через отношения интервалов времени следующим образом:

$$\text{Внутренняя готовность} = \frac{\text{Время работы}}{\text{Время работы} + \text{Время ремонта}},$$

$$\text{Готовность} = \frac{\text{Время работы}}{\text{Время работы} + \text{Время неисправного состояния}},$$

$$\text{Оперативная готовность} = \frac{\text{Полное время исправного состояния}}{\text{Полное календарное время}},$$

где полное время исправного состояния равно сумме времени, в течение которого оборудование работает, и времени, когда оно не работает, но исправно и может быть при необходимости использовано.

Два прямоугольника на диаграмме фиг. 1.1 относятся к понятиям, тесно связанным с выполнением определенной задачи, поставленной потребителем системы; это надежность при выполнении задачи и пригодность конструкции. *Надежность при выполнении задачи* определяется как вероятность того, что система будет работать соответствующим образом на протяжении всего периода выполнения задачи при определенных условиях и в предположении, что в начале указанного периода она была в работоспособном состоянии. Проще говоря, надежность при выполнении задачи есть вероятность того, что за период выполнения задачи не возникнет отказов системы, если она находилась в работоспособном состоянии в начальный момент. *Пригодность конструкции* есть вероятность того, что система успешно выполнит задачу, если она будет работать в соответствии с техническими условиями. Таким образом, пригодность конструкции связана с внутренней способностью системы выполнить свои функции, если она находится в работоспособном состоянии.

1.3г. Ремонтопригодность. Указанные выше соотношения между интервалами времени, технические характеристики и пригодность конструкции являются показателями качества работы конструкции; эти показатели совместно определяют эффективность системы. Остается рассмотреть еще одну особенность конструкции, которую будем называть ремонтопригодностью (serviceability). Качественно она характеризует трудность или легкость выполнения ремонта системы. Очевидно, что ремонтопригодность существенно зависит от состояния ремонтной мастерской. Грубо говоря, можно представить, что соотношение между ремонтопригодностью и восстанавливаемостью такое же, как между пригодностью конструкции и требованиями, связанными с выполнением поставленной задачи. Однако имеются и некоторые различия. Имеющийся опыт и простота рассматриваемых понятий позволяют проводить количественный анализ пригодности конструкции. Ниже будет дан количественный анализ ремонтопригодности, но на данном этапе ограничимся качественной характеристикой этого понятия.

Теперь можно резюмировать изложенное выше в виде следующего перечня формальных определений.

1.3д. Определения

Эффективность системы — вероятность того, что система выполнит свое назначение в заданном интервале времени при работе в определенных условиях.

Эффективность системы (для одноразового устройства, например для ракеты) — вероятность того, что система (ракета) выполнит свое назначение (поразит цель), когда это понадобится, работая в определенных условиях.

Надежность — вероятность того, что система сохранит работоспособность по крайней мере на протяжении заданного промежутка времени при использовании ее в определенных условиях.

Надежность при выполнении задачи — вероятность того, что при заданных условиях система будет работать так, как это предусмотрено конструкцией (т. е. безотказно), на протяжении всего периода выполнения задачи, если она находилась в работоспособном состоянии в начале указанного периода.

Оперативная готовность — вероятность того, что в любой момент система либо работает удовлетворительно, либо готова к работе по требованию в заданных условиях эксплуатации, включая допустимое время предупреждения. Таким образом, основой для вычисления оперативной готовности является полное календарное время.

Готовность — вероятность того, что система будет работать удовлетворительно в любой момент в определенных условиях эксплуатации, причем под полным временем понимается время работы, время ремонта, организационное время и время снабжения.

Внутренняя готовность — вероятность того, что система будет работать удовлетворительно в любой момент в определенных условиях эксплуатации, причем рассматриваемое время состоит из времени работы и времени ремонта.

Пригодность конструкции — вероятность того, что система выполнит задачу при работе в соответствии с техническими условиями.

Восстанавливаемость (обслуживаемость) — вероятность того, что при обслуживании в определенных условиях неисправная система будет доведена до состояния работоспособности за заданное полное время перерыва в работе.

Ремонтоспособность — вероятность того, что неисправная система будет доведена до состояния работоспособности за заданное время ремонта.

Ремонтопригодность — степень трудности или простоты выполнения ремонта.

1.4. АНАЛИЗ ИНТЕРВАЛОВ ВРЕМЕНИ НА ОСНОВЕ ДВУХ КРИТЕРИЕВ

Выше было отмечено, что виды интервалов времени определяются двумя факторами: эксплуатационными требованиями и состоянием оборудования. В целях упрощения и получения возможности ввести необходимую терминологию количественный анализ интервалов времени с учетом этих двух критериев одновременно будет проведен позднее. Сначала будет дана двойная классификация промежутков времени и проведено сопоставление с определенными выше понятиями. Классификация интервалов времени с учетом двух критериев приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Классификация интервалов времени на основе двух критериев

<table>
<tr><th rowspan="3">Состояние оборудования</th><th colspan="3">Эксплуатационные требования</th></tr>
<tr><th rowspan="2">должно функционировать</th><th colspan="2">не должно функционировать</th></tr>
<tr><th>нерабочее время</th><th>время хранения</th></tr>
<tr><td>Система работоспособна (время исправного состояния)</td><td>Проблем нет</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Система неработоспособна (время неисправного состояния):
Организационное время (планирование ремонта)
Время ремонта
Выполнение ремонта откладывается:
Время снабжения
Организационное время (цех закрыт — более срочная работа)</td><td>Проблемы существуют, и эффективность системы уменьшается</td><td colspan="2">Проблемы существуют, *но* эффективность системы не уменьшается</td></tr>
</table>

Таблица показывает, как важна двойная классификация интервалов времени при определении эффективности системы. По данным испытаний в реальных условиях и вычисленным долям полного времени и средним значениям промежутков времени для каждого из видов интервалов при двойной классификации могут быть получены многие показатели, полезные для исследования эффективности системы.

Возможно, до подробного рассмотрения количественных соотношений целесообразно отметить некоторые качественные и очевидные особенности табл. 1.1. Ухудшения эффективности системы никогда не может быть, если система не должна функционировать, и, конечно, не имеет места, если система находится в работоспособном состоянии. Неприятности возникают только тогда, когда система неисправна и должна функционировать, т. е. когда время неисправности перекрывается с потребным временем работы. Возможно, что при таком качественном рассмотрении наиболее важно то обстоятельство, что высокая степень оперативной готовности является следствием прежде всего наличия излишне большого времени, когда система не функционирует, и времени хранения. Неиспользуемое оборудование обычно можно содержать в исправном состоянии! Недоиспользование оборудования может быть следствием прежде всего излишне большого нерабочего времени, а также избытка оборудования, что приводит к большому времени хранения; этими обстоятельствами можно воспользоваться, как «костылями», позволяющими «прожить» с плохим оборудованием. Таким образом, высокий уровень оперативной готовности не является обязательно указанием на отсутствие проблемы качества оборудования.

С другой стороны, табл. 1.1 указывает на важность планирования ремонтов. Основные задачи, возникающие при ремонте, решаются, если можно обеспечить отсутствие пересечений периодов неисправного состояния с периодами, когда требуется функционирование оборудования. Этого можно достигнуть, предусмотрев обслуживание в нерабочее время и обеспечив достаточное количество запасных частей, чтобы сделать возможным передачу исправного оборудования из резерва в эксплуатацию, а неисправного — из эксплуатации в резерв.

В свете этого замечания очевидно, что для получения оценки эффективности системы необходимо рассмотреть в двойной классификации *все* указанные интервалы промежутков времени. Во всяком случае, слишком частые отказы и большое время ремонта всегда нежелательны. Идеальным выходом является уменьшение числа отказов и улучшение методов ремонта. Вместо этого можно увеличить нерабочее время или предусмотреть время хранения. Худшим выходом является снижение требований к качеству работы и (или) улучшение метода использования.

1.5. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Существует несколько характеристик, которые необходимо вычислить в связи с двойной классификацией интервалов времени. Если известно, что система находится в интервале времени определенного вида, то желательно узнать вероятность ее пребывания в этом интервале по крайней мере на протяжении заданного времени, т. е. интегральную функцию распределения. С помощью интегральных функций можно вычислить плотности вероятности, средние значения, дисперсии и т. д. Необходимо также количественно определить некоторые отношения интервалов времени различного вида с учетом двух критериев. Эти отношения связаны с такими понятиями, как внутренняя готовность и оперативная готовность. Некоторые из этих характеристик будут рассмотрены более подробно с постановкой математических задач и применением количественных критериев принятия решений.

1.5а. Количественные характеристики интервала времени. Рассмотрим в качестве примера время выполнения ремонта независимо от эксплуатационных требований. Это время определяется свойствами самого оборудования, количеством и квалификацией обслуживающего персонала и имеющимися условиями обслуживания. Описание интервала времени выполнения ремонта будет полным, если дано выражение его плотности вероятности, определены доля от всего времени, затраченная на ремонт, и корреляция любого вида между интервалом времени выполнения ремонта и другими интервалами времени по отдельности и в совокупности. Следует отметить, что не все эти характеристики обычно учитываются при исследовании системы. Некоторые исследования основываются только на среднем времени ремонта, другие — на доле всего времени, отводимой на выполнение ремонта, а иногда учитывается и то и другое. Редко при исследовании приводится соответствующая плотность вероятности.

Чаще всего используется плотность вероятности времени выполнения ремонта, которая аналогична плотности логарифмически нормального распределения: она начинается в начале координат, возрастает до максимума при модальном значении и продолжается в виде длинного «хвоста». Нередко используются плотности вероятности, более сложные по сравнению с логарифмически нормальной, когда исходной точкой является не нулевая длительность, а некоторое минимальное время выполнения ремонта, например 10 *мин*.

Тогда с точки зрения обслуживания не бывает ремонтов, выполняемых за время, меньшее указанного минимума, далее вероятность выполнения ремонта постепенно увеличивается до некоторого модального значения, а затем, постепенно убывая, продолжается в виде хвоста, показывающего, что некоторые виды ремонта занимают очень много времени. Существует несколько видов распределений, обладающих такими общими особенностями, например гамма-распределение.

Естественно, могут встретиться и другие виды плотности вероятности времени выполнения ремонта. У некоторых плотностей имеется несколько мод, одни из которых расположены на малых интервалах времени, а другие — на существенно бóльших интервалах. В таком случае ремонт выполняется либо относительно быстро и легко, либо он гораздо сложнее и требует больших затрат времени.

1.5б. Количественные характеристики отношений интервалов времени. Для описания отношения интервалов времени, например отношения рабочего времени к сумме рабочего времени и времени выполнения ремонта, которое называется внутренней готовностью, не существует простого показателя. Действительно, для всех технических, эксплуатационных и организационных характеристик системы, входящих в определение этого отношения, совершенно необходимы несколько показателей. Попытаемся описать эти характеристики и привести некоторые из них в качестве примеров, встречающихся при оценке эффективности системы с помощью отношений интервалов времени. Это должно показать, что эффективность системы является сложным многомерным вектором и что ее нельзя рассматривать путем простого анализа с применением небольшого числа хорошо определенных показателей. Напротив, к исследованию эффективности системы следует подходить в каждом случае как к новой и сложной статистической задаче, которая требует своеобразного математического метода рассмотрения и изобретательности со стороны исследователя, а не использования простого и заранее установленного набора формул.

Существует общее впечатление или надежда, что внутренняя готовность определяется прежде всего техническими свойствами изделий. Это, конечно, верно, если для системы указаны соответствующие эксплуатационные требования и условия ее использования и если в достаточной степени обеспечены возможности ремонта и обслуживающий персонал. Вследствие этого предполагается, что внутренняя готовность является свойством, которое характеризует заложенную в систему способность обеспечивать непрерывную работу при правильном ее использовании и обслуживании. В таком случае она представляет основную меру успеха, достигнутого конструктором в осуществлении намеченных целей, — меру того «наилучшего», которое по праву ожидает потребитель, не затрагивая вопроса пригодности конструкции для выполнения поставленной задачи при правильном ее функционировании. Внутренняя готовность характеризует также наилучшее, что может ожидать потребитель при исключении из рассмотрения всех интервалов времени, затрачиваемых на организацию и снабжение.

Очевидным показателем внутренней готовности является отношение среднего времени безотказной работы к сумме среднего времени безотказной работы и среднего времени ремонта. Это отношение эквивалентно вероятности того, что система находится в работоспособном состоянии с учетом временных интервалов работы и выполнения ремонта. Однако наличие интервалов времени неиспользования оборудования и его хранения усложняет даже этот простой показатель. Действительно, время выполнения ремонта не приводит к снижению эффективности, если он выполняется, когда оборудование не функционирует, а также когда наличие запасной системы может обеспечить непрерывную работу или работу с небольшими задержками, вызванными доставкой резервной системы. Таким образом, может оказаться важнее другая форма показателя внутренней готовности, полученная путем замены времени выполнения ремонта только той частью времени ремонта, в течение которой требуется работа системы.

С другой стороны, следует признать, что чисто техническая сторона дела более полно характеризуется первой формой показателя. Это можно пояснить следующим образом. Если требуется непрерывная работа и резерв отсутствует, то оба отношения эквивалентны. В этом случае внутренняя готовность полностью характеризует важный аспект качества системы, определяемый главным образом техническими характеристиками и нагрузками, возникающими при определенных условиях эксплуатации (см. т. II, гл. 1, и т. III, гл. 2).

Характеристики системы можно также рассмотреть иным методом; технические свойства могут повлиять на взаимосвязь между временем работы и временем ремонта таким способом, который не учитывается ни одним из рассмотренных выше отношений. Кроме того, эта взаимосвязь может иметь значение для оценки вероятности отказа системы за время выполнения определенной функции, если учесть имеющиеся данные по затратам времени на выполнение ремонта.

Для некоторых видов оборудования имеет место корреляция между временем выполнения ремонта и возникновением после этого отказов. Например, можно надеяться, что машинка для подстригания газона, холодильник, автомобиль или иное оборудование будут работать с относительно небольшим числом отказов в течение некоторого времени после полного технического осмотра.

Математически эти идеи можно представить следующим образом. Пусть t_i означает время работы между $(i-1)$-м и i-м ремонтами, а x_i — время выполнения ремонта при устранении i-го отказа. Можно постулировать несколько видов корреляции между t и x. Наиболее очевидными являются:

1. Корреляция между t_i и x_{i-1}.
2. Корреляция между t_i и x_i.

Первый вид корреляции связывает рабочее время с продолжительностью непосредственно предшествующего ремонта, а второй вид — с временем непосредственно следующего ремонта. При полном анализе внутренней готовности, особенно с точки зрения предсказания вероятности безотказного решения поставленной задачи, требуется рассмотрение всех подобных корреляций. К сожалению, число исследований, выполненных в этом направлении, еще слишком мало для того, чтобы дать существенную информацию.

Обычно рассматривается лишь один показатель внутренней готовности в виде отношения

$$\frac{\bar{t}}{\bar{t}+\bar{x}},$$

где $\bar{t}$ и $\bar{x}$ — средние значения времени безотказной работы t_i и времени выполнения ремонта x_i. Несомненно, этот показатель весьма полезен, однако можно получить дополнительную информацию, зная плотность вероятности случайной величины y, равной

$$y=\frac{t}{t+x},$$

где t и x представляют зависимые интервалы времени безотказной работы и выполнения ремонта. Другими словами, t может означать t_i, а x может означать либо x_i, либо x_{i-1}. Очевидно, что среднее значение величины y обычно не будет равно

$$\frac{\bar{t}}{\bar{t}+\bar{x}}.$$

Для того чтобы проиллюстрировать метод анализа внутренней готовности с помощью плотности вероятности, рассмотрим два простых и, конечно, идеализированных предположения:

1. Время работы и время ремонта независимы.
2. Каждый из этих интервалов времени характеризуется экспоненциальным распределением. Если обозначить время

работы через t и время ремонта через x, то задача состоит в отыскании плотности вероятности величины

$$y = \frac{t}{t+x}.$$

Пусть средние значения равны

$$\bar{t} = a, \quad \bar{x} = b.$$

Тогда совместная плотность вероятности независимых величин t и x имеет вид

$$\frac{1}{ab} e^{-t/a} e^{-x/b}.$$

Плотность вероятности величины y можно найти, выполнив замену переменных

$$y = \frac{t}{t+x}, \qquad z = x,$$

найдя совместное распределение величин y и z и проинтегрировав по z. Эта операция выполняется следующим образом.

Обратное преобразование можно представить в виде

$$t = \frac{yz}{1-y}, \qquad x = z.$$

Якобиан преобразования равен

$$\frac{\partial (t, x)}{\partial (y, z)} = \frac{z}{(1-y)^2}.$$

Отсюда находим плотность вероятности $g(y)$ величины y:

$$g(y) = \int_0^\infty \frac{1}{ab} \exp\left\{\left[-\frac{1}{a}\left(\frac{yz}{1-y}\right) - \frac{z}{b}\right]\right\} \frac{z\,dz}{(1-y)^2} =$$

$$= \frac{1}{ab(1-y)^2} \int_0^\infty z \exp\left\{-z\left[\frac{y}{a(1-y)} + \frac{1}{b}\right]\right\} dz =$$

$$= \frac{1}{ab(1-y)^2} \frac{1}{\left[\frac{y}{a(1-y)} + \frac{1}{b}\right]^2} = \frac{ab}{[by + a(1-y)]^2} = \frac{ab}{[a+(b-a)y]^2},$$

$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Среднее значение величины y равно:

$$\bar{y} = \int_0^1 \frac{aby}{[a+(b-a)y]^2} dy = \frac{ab}{b-a} \int_0^1 \left[\frac{-a}{[a+(b-a)y]^2} + \frac{1}{a+(b-a)y}\right] dy =$$

$$= \frac{ab}{(b-a)^2} \left\{\frac{a}{a+(b-a)y} + \ln[a+(b-a)y]\right\}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{ab}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{b} - 1 + \ln b - \ln a\right) = \frac{a}{a-b} + \frac{ab}{(a-b)^2} \ln \frac{b}{a}.$$

Плотность $g(y)$ является функцией отношения b/a. Таким образом, если $ac = b$, то

$$g(y) = \frac{c}{[1+(c-1)\,y]^2}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{1-c} + \frac{c}{(1-c)^2}\ln c.$$

При выполнении приведенных выше вычислений требовалось, чтобы $a \neq b$ и $c \neq 1$, так как производилось деление на $b - a$. Следовательно, чтобы найти $g(y)$ при $a = b$, необходимо вернуться к исходному выражению. В этом случае

$$g(y) = \int_0^\infty \frac{1}{a^2}\left\{\exp\left[-\frac{z}{a}\left(\frac{y}{1-y}+1\right)\right]\right\}\frac{z}{(1-y)^2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \left\{\exp\left[-\frac{z}{a(1-y)}\right]\right\}\frac{z}{(1-y)^2}\,dz = 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

и

$$\bar{y} = 0{,}5.$$

Сравнение среднего значения $\bar{y}$

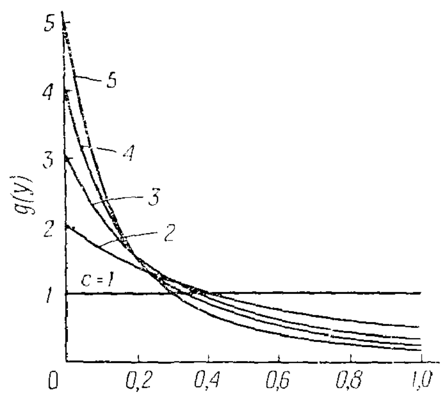
$$\bar{y} = \frac{1}{1-c} + \frac{c}{(1-c)^2}\ln c, \qquad c \neq 1,$$

$$\bar{y} = 0{,}5,\ c = 1,$$

с коэффициентом, равным отношению средних значений, т. е. с коэффициентом $1/(1+c)$, показывает, что эти коэффициенты равны только при $c = 1$. Во всех остальных случаях $1/(1+c)$ представляет смещенную оценку среднего значения $\bar{y}$.

На фиг. 1.2 представлены графики плотности вероятности $g(y)$ для различных значений параметра c. Вид этих кривых можно описать с помощью следующей характеристики. Производная $g(y)$ по y равна

$$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{2c(1-c)}{[1+(c-1)\,y]^3}.$$



Фиг. 1.2. Распределение величины y для ряда значений параметра c.

Наклон кривых изменяется от $2c(1-c)$ при $y = 0$ до $2(1-c)/c^2$ при $y = 1$. Наклон отрицателен при $c > 1$ и положителен для $c < 1$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Кривая для $c = k$ является просто зеркальным изображением кривой для $c = 1/k$ относительно линии $y = 1/2$. Следовательно, кривые на фиг. 1.2 можно использовать для отыскания значений плотности вероятности также и для $c = 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5$.

1.5в. Определение случайной величины. Предшествующее рассмотрение внутренней готовности выявило одну из важнейших ступеней в анализе эффективности системы: определение случайной величины как количественной меры исследуемой характеристики системы. На этой основе нетрудно разработать план работы по собиранию данных и определить коэффициенты, плотности вероятности, средние значения и другие величины, необходимые для описания этой характеристики.

Определить случайную величину для отдельного вида интервала времени просто. Она определяется как интервал времени от момента входа системы в этот интервал до момента выхода из него. В некоторых случаях может оказаться желательным не учитывать интервалы некоторых других видов. Например, при изучении надежности рассматривается рабочее время, когда система должна функционировать и находиться в работоспособном состоянии. Вполне может оказаться желательным исключение из рассмотрения нерабочего времени, когда перерыв в работе вызывается не отказом системы, а просто перерывом в необходимости ее использования. Это обычно определяется как рабочее время между отказами. Аналогичным образом при рассмотрении ремонтоспособности как технической характеристики системы время выполнения ремонта следует определять, исключая промежутки времени, когда ремонт прерывался по причинам, не связанным с ремонтоспособностью. Таким образом, даже в тех случаях, когда случайная величина легко выявляется, все же важно дать ей точное определение для того, чтобы рациональным образом связать ее со свойствами оборудования и (или) с условиями эксплуатации.

Как указано выше, случайную величину труднее определить при рассмотрении отношений интервалов времени. Может представиться много вариантов при изучении даже такого простого отношения, как внутренняя готовность. С характеристиками системы связаны различные случайные величины, а полное исследование эффективности системы может потребовать учета их всех, или по крайней мере тех, которые имеют существенное значение.

1.6. ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С РАСЧЕТОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Обычно важнее заранее рассчитать эффективность системы и определяющие ее факторы, чем измерить их. Это естественно вытекает из желания выбрать из группы систем наилучшую; эффективность системы и определяющие ее факторы являются критерием выбора. При исследованиях и разработках системы до ее производства расчет[1]) является необходимым, а измерение невозможно. Действительно, такой расчет — основа для одобрения или отклонения идеи конструкции до того, как будут выделены средства на ее создание. Методику расчета легче всего описать для случая исследования и разработки. Следует предположить, что нет готовой системы, и рассчитать каждый из факторов, связанных с эффективностью системы.

С самого начала очевидно, что необходимо отыскать какой-то способ использования предыдущего опыта применительно к новой системе — системе, которая еще не построена и для которой, следовательно, не существует никаких данных. Необходимо использовать знания, полученные при эксплуатации подобных систем или путем теоретического изучения новой системы. Таким образом, приходится экстраполировать и интерполировать имеющиеся данные с учетом новых и часто неизвестных обстоятельств. Обычно для этого система разбивается на функциональные части, анализируются характеристики этих частей и на основании результата подобного анализа рассчитываются ожидаемые характеристики системы. Логическим обоснованием такого метода является соображение, что многие новые системы представляют в значительной степени новые комбинации известных частей. Часто лишь небольшое число этих частей является радикально новыми конструкциями, и их можно подвергнуть специальной обработке и даже специальным испытаниям для получения необходимых данных. Для лучшего понимания изложенного метода рассмотрим сначала методику расчета надежности, по которой имеется больше всего опыта (см. т. II, гл. 2—4).

1.6а. Расчет надежности. При расчете предполагается, что ему предшествуют два этапа: вывод формулы, выражающей характеристику системы через характеристики ее частей, и сбор имеющихся данных о параметрах этих частей для подстановки в формулу. Здесь основное внимание будет уделено первому этапу; подробно процесс расчета излагается в последующих главах (см. ст. II, гл. 1). При расчете надежности основным параметром является рабочее время (фиг. 1.1). Пока рассмотрение специальных условий, относящихся к изучаемому рабочему времени, будет опущено; они должны быть очень точно определены в каждом частном случае.

Расчет надежности похож на расчет точности, при котором входные величины подставляются в передаточные функции и вычисляются выходные параметры. Обычно при таком расчете используются номинальные значения входных параметров. Если

[1]) Имеется в виду априорный расчет. — *Прим. ред.*

входные величины рассматривать как случайные и характеризовать их плотностями вероятности, то можно одновременно рассчитать и надежность, и качество работы. Практически этот метод обычно не применяется вследствие того, что при замене номинальных значений плотностями вероятности входных параметров вычисления становятся слишком сложными. Вместо этого входные параметры разбиваются на два класса:

1. Входной параметр лежит в допустимых пределах.

2. Входной параметр выходит за допустимые пределы; это состояние считается отказом.

При таком упрощении вычисления обычно становятся достаточно простыми.

Очевидно, что в этом случае можно описать влияние отказов. Для каждой части системы дается определение «отказа» (возможно, даже для каждой детали), которое затем сопоставляется с системой в целом — реакцией системы в виде «отказа» или «исправности», включая оценку ухудшения качества работы. Не следует уменьшать сложность проблем, возникающих при выполнении подобного анализа влияния отказов. Имеются затруднения, связанные с определением того, что является отказом детали или элемента, с определением взаимодействия детали и части системы, с установлением определенных причин отказов системы, с обработкой большого объема данных, проводимой при выполнении подобного анализа сложной системы, и т. д. Однако можно утверждать, что конструкция не продумана и, быть может, даже не закончена, пока не проведен анализ влияния отказов. Несомненно, следует согласиться с утверждением, что это техническая работа, представляющая существенный этап расчета надежности.

Вывод формулы для расчета надежности системы облегчается, если подготовить наглядную картину анализа влияния отказов — так называемую блок-схему надежности. На этой блок-схеме определяются те части системы, отказ которых вызывает отказ системы (последовательные элементы), и те части системы, отказ которых приводит лишь к увеличению вероятности отказа системы (параллельные элементы). При параллельном соединении элементов отказ системы происходит лишь при совмещении отказов частей системы. Другими словами, блок-схема надежности представляет вероятностную задачу в виде схемы. Решением этой вероятностной задачи является выражение вероятности отказа системы через вероятности отказов рассматриваемых ее частей.

Как уже было отмечено, в этой главе не будут рассматриваться задачи, связанные с расчетом характеристик. Подчеркивается лишь тот факт, что данные должны быть собраны в виде, соответствующем поставленным целям; они должны отражать существенные характеристики. При расчете надежности это обычно означает лишь, что должны быть выбраны соответствующие уровни внутренних и внешних нагрузок. Выбор уровней нагрузок обычно приводит к необходимости выполнения экстраполяций и интерполяций для учета каких-либо новых условий конструирования. Необходимость подобного корректирования входных данных является одним из главных обстоятельств, отличающих расчет от измерения или оценки.

1.6б. Связь отказов системы с отказами ее элементов. При расчете надежности подразумевается, что причину каждого отказа системы можно выявить и приписать некоторому определенному элементу или части системы. Очевидно, что это является сильным упрощением; в действительности положение гораздо сложнее. Некоторые отказы получаются вследствие постепенного изменения или отказа многих элементов, при этом ремонт выполняется путем регулировки и (или) замены этих элементов. В основном задача состоит в определении отказа элемента, части системы и системы в целом, и необходимо рассмотреть способы формулирования этих определений, чтобы облегчить оценки эффективности системы.

По существу возникают две задачи: 1) оценка частоты перерывов в эксплуатации системы из-за неисправностей и 2) оценка объема снабжения или потребности в запасных деталях. Обе эти задачи решаются с учетом двух различных видов отказов. Отказы системы, устраняемые только регулировкой и не требующие замены деталей, учитываются при решении первой задачи, но не учитываются при решении второй. С другой стороны, замена нескольких деталей при одном ремонте рассматривается как один отказ системы в задаче 1 и как несколько отказов в задаче 2. Это определяет лишь рамки задачи определения отказов. При каждом анализе надежности системы должны использоваться те критерии отказа, которые соответствуют поставленной при выполнении анализа задаче. И здесь в лучшем случае можно лишь установить некоторые общие принципы определения отказов элементов, частей системы и даже системы в целом (см. т. II, гл. 1).

Для оценки частоты отказов системы необходимо, чтобы исходные данные отражали все отказы системы, включая отказы, устраняемые путем регулировки без замены деталей. В некоторых случаях это приводит к довольно своеобразному толкованию причин отказов системы из-за отказов элементов или больших частей системы таким образом, чтобы полученная суммарная оценка отказов для какой-либо новой системы была несмещенной. Если число ремонтов при помощи регулировок довольно велико, то трактовка отказов элементов как причин отказов системы может привести к неправильному представлению об источниках затруднений. Некоторым элементам может быть несправедливо приписана роль элементов, вызывающих отказы, тогда как на другие не будет обращено внимание, которого они заслуживают. Несмотря на это, процедура установления соответствия между отказами системы и отказами элементов оказалась полезной, и получаемые расхождения в большинстве случаев не слишком велики. При наличии особых требований расчет может быть основан на данных, соответствующих другим критериям.

1.6в. Расчет характеристик для других видов интервалов времени. Метод расчета для показателей, связанных с другими интервалами времени, можно рассмотреть на примере одного из них, например восстанавливаемости, используя классификацию нерабочего времени. Восстанавливаемость определяется как вероятность того, что при восстановлении в определенных условиях отказавшая система будет приведена в состояние работоспособности за определенное время нерабочего состояния. Для того чтобы рассчитать восстанавливаемость системы, необходимо получить интегральную функцию распределения или плотность вероятности или какую-либо другую вероятностную характеристику на основании имеющегося опыта. Если используется метод, аналогичный методу надежности, то система подразделяется на части и берутся данные о нерабочем времени, полученные с такими же или аналогичными частями других систем.

При расчете надежности все внимание сосредоточивается на зависящей от времени вероятности отказа каждой части системы с точки зрения влияния ее на вероятность отказа системы. При расчете восстанавливаемости приходится рассматривать две величины: вероятность того, что отказ системы вызван отказом определенной ее части, и плотность вероятности времени неисправности отказавшей части.

Можно написать непосредственно формулу для расчета времени неисправности системы в простом случае, когда отказ системы всегда вызывается отказом лишь одной из N частей, составляющих всю систему. При этом совокупность параллельных элементов можно определить как одну часть. Пусть p_i представляет вероятность того, что отказ системы является следствием отказа i-й части. Обозначим через $f_i(t)$ плотность вероятности интервала времени неисправности для этой части. Тогда плотность вероятности интервала времени неисправности системы будет равна

$$\sum_{i=1}^{N} p_i f_i(t).$$

Эту величину можно представить как взвешенное среднее значение плотностей вероятностей интервалов времени неисправности частей системы, причем веса равны вероятностям отказов частей при условии отказа системы.

От допущения, что каждый отказ системы в какой-либо момент происходит вследствие отказа лишь одной из частей и не более, легко отказаться. Единственной значимой величиной является относительная частота отказов частей, т. е. величина p_i в записанной выше формуле. Если имеющиеся данные позволяют оценить относительные частоты отказов частей системы на один отказ системы, то применима та же формула. Разница в том, что при предположении об отказе в любой момент только одной части системы имеем

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1,$$

а если возможны одновременно отказы нескольких частей, то

$$\sum_{i=1}^{N} p_i > 1.$$

В последнем случае плотности вероятностей интервалов времени неисправности должны относиться и к отказам отдельных частей системы, и к отказам одновременно нескольких частей.

1.6г. Расчет величин отношений интервалов времени. Можно предположить, что расчет характеристик, основанных на отношениях интервалов времени, можно выполнить таким же методом, который использовался при расчете плотности вероятности отдельных видов интервалов времени. Конечно, в некотором отношении это верно, но в более общем смысле характеристики, основанные на отношениях интервалов времени, гораздо сложнее. Как было указано выше, основная трудность состоит в определении соответствующей случайной величины. Действительно, обычно приходится рассматривать несколько случайных величин, которые связаны с исследуемой характеристикой, имеющей вид отношения.

Рассмотрим, например, систему, которая должна функционировать непрерывно, и предположим, что ремонт начинается сразу же после отказа системы. В этом случае нет времени простоя и при отсутствии необходимости в запасных частях нет времени хранения. Тогда оперативная готовность совпадает с готовностью и подходящей характеристикой является величина A, определенная формулой

$$A = \frac{t_0}{t_0 + t_r},$$

где t_0 — полное рабочее время, а t_r — полное время ремонта на протяжении заданного интервала времени.

Готовность системы на самом деле характеризуется величиной A, но имеются некоторые особые характеристики или допущения, присущие A; это коэффициент готовности в ограниченном, но очень важном смысле. Если предположить, что ремонт может восстановить — и на самом деле восстанавливает — систему, делая ее «новой», то A показывает вероятность того, что система пригодна к работе в любой произвольно выбранный момент времени на протяжении заданного интервала. При этом считается, что A не зависит от времени (исключая небольшие изменения, появляющиеся, если рассматривается неудачно выбранный интервал времени, например начинающийся и заканчивающийся непосредственно после отказа). С другой стороны, если предположить, что ремонт не восстанавливает систему до исходного состояния, а вероятность отказа увеличивается со временем, т. е. после каждого ремонта, то величина A зависит от времени и ее значение для интервала времени от t до $t + h$ уменьшается с ростом t при постоянном h и увеличивается с ростом h при постоянном t. Таким образом, вообще говоря, величина A на самом деле является функцией t и h, где t — время начала интервала, а h — длина интервала, в котором рассматривается готовность системы.

Обычно показатель A применяется в предположении независимости от времени восстановления отказавшего оборудования до исходного состояния. При этих условиях расчет легко провести; достаточно заметить, что величину A можно вычислить по формуле

$$A = \frac{\bar{t}_0}{\bar{t}_0 + \bar{t}_r},$$

где $\bar{t}_0$ и $\bar{t}_r$ — среднее время безотказной работы и среднее время ремонта на один отказ соответственно. Тогда расчет производится путем установления средних значений $\bar{t}_0$ и $\bar{t}_r$ на основе имеющегося опыта, как было указано выше, и подстановки их в формулу. Такой коэффициент готовности является оценкой вероятности того, что система будет исправной в любой случайно выбранный момент времени при отмеченных выше допущениях.

Однако, как уже указывалось выше, время устранения неисправности вполне может оказаться коррелированным различными способами с временем работы. Пусть $t_{0,i}$ представляет время работы между $(i-1)$-м и i-м отказами, и пусть $t_{r,i}$ — время ремонта системы непосредственно после i-го отказа. Можно рассматривать много видов корреляции, как, например, корреляции между следующими парами переменных:

1) $t_{0,i}$ и $t_{r,i-1}$;
2) $t_{0,i}$ и $t_{r,i}$;
3) $t_{0,i+1}$ и $\bar{t}_{r,i}$
и т. д.,

где $\bar{t}_{r,i}$ — среднее время ремонта при первых i ремонтах.

Для каждой такой пары величин можно определить случайную величину y по формуле

$$y=\frac{t_0}{t_0+t_r},$$

где t_0 и t_r представляют указанные выше комбинации: 1, 2 или 3. Затем рассматривается плотность вероятности случайной величины y. Расчет плотности вероятности основан на подборе данных в соответствии с определением используемой случайной величины y. В первом случае случайная величина имеет значение при описании готовности, если имеется информация об интервале времени, потребовавшемся для выполнения последнего ремонта. Во втором случае величина y будет полезна для оценки времени ремонта, если известно предшествующее время работы. Третья случайная величина y окажется полезной при оценке времени работы, если имеется информация о длительности всех предшествующих ремонтов.

Следует подчеркнуть еще раз, что среднее значение величины y в любом случае, аналогичном приведенным выше, вообще говоря, не совпадает с коэффициентом готовности, определенным формулой $A=\bar{t}_0/(\bar{t}_0+\bar{t}_r)$. Это обстоятельство показывает, что коэффициент A дает лишь частичное описание готовности системы. Однако до настоящего времени случайные величины типа y использовались редко, и невозможно в настоящее время представить в приемлемом виде способ и примеры их применения. Эта область может оказаться плодотворной в новых работах. Таким образом, в настоящее время расчет готовности основывается только на возможности определять надежность системы и плотность вероятности времени ремонта и вычислять средние значения для подстановки в формулу для величины A.

1.7. УЧЕТ ПРИГОДНОСТИ КОНСТРУКЦИИ

Обычно рассматривают несколько видов работы системы, причем каждому из них присущ свой уровень качества. Вид работы может зависеть от выбора оператора и (или) наличия в системе некоторых типов отказов. Учет различных уровней пригодности основывается на измерении уровней и оценке частоты применения того вида работы, которому соответствует данный уровень. Конечно, в таком случае пригодность конструкции должна рассматриваться как любая другая функция выигрыша и потерь или функция стоимости. Целесообразно вычислить сумму ряда произведений, каждое из которых включает два фактора: численную меру стоимости или степени успешного выполнения назначения системы и вероятность достижения заданного уровня. Таким образом, рассматривается среднее значение в общепринятом математическом смысле.

Помимо среднего значения, для конструктора системы весьма важное значение имеют величины отдельных слагаемых. Модификация конструкции должна планироваться с учетом уменьшения или увеличения частоты применения данного вида работы системы. Так, низкий уровень успешного выполнения системой своего назначения не имеет первостепенного значения, если данный вид работы маловероятен; в этом случае модификации с целью снижения вероятности применения данного вида работы будет уделяться мало внимания. С другой стороны, модификации будет придаваться большое значение, если низкая (высокая) степень успешного выполнения назначения связана с высокой (малой) вероятностью применения соответствующего вида работы системы. Таким образом, ясно, что полное рассмотрение пригодности конструкции требует исследования видов работы системы с точки зрения степени полноты выполнения задачи и относительной частоты использования различных видов работы как по отдельности, так и совместно.

1.8. УЧЕТ РЕМОНТОПРИГОДНОСТИ

Ремонтопригодность определяется как степень простоты или сложности выполнения ремонта системы. Таким образом, ремонтопригодность сама по себе не является временной категорией, хотя и оказывает большое влияние на фактическое время выполнения ремонта: чем лучше ремонтопригодность, тем короче время выполнения ремонта. Следовательно, в качестве показателя ремонтопригодности можно использовать функции времени выполнения ремонта; однако при описании самой ремонтопригодности приходится более непосредственным образом заниматься теми конструктивными особенностями изделий, которые усложняют или облегчают проведение ремонта. Например, этими конструктивными особенностями могут быть встроенные выводы для проверки, индикаторы неисправности, доступность, модульное построение, разъемные соединения и т. п. (см. т. II, гл. 4).

Попытки количественной оценки ремонтопригодности до сих пор не были полностью успешными и здесь не будут рассматриваться. Однако можно проводить сравнение различных видов оборудования при помощи ведомостей проверок основных особенностей конструкций и использовать эти ведомости при оценке экспериментальных образцов. Некоторые мероприятия, повышающие ремонтопригодность, можно осуществить при минимальных затратах средств, веса и т. д.; другие же вообще не требуют затрат. Чтобы помочь руководству принять решение о целесообразности проведения подобных мероприятий, связанных с затратами средств, необходимо ввести функции стоимости.

Исследования по количественной оценке ремонтопригодности следует продолжать. Разумно допустить, что соответствующие методы могут быть разработаны. В то же время целесообразно стремиться к введению в каждую конструкцию по возможности больше технических средств, повышающих ремонтопригодность, в пределах допустимого времени, стоимости и т. д.

1.9. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ИНТЕРВАЛАМИ ВРЕМЕНИ

Выше было указано, что эффективность системы определяется многими параметрами; были определены соответствующие понятия и кратко рассмотрены методы их количественной оценки. Теперь необходимо рассмотреть соотношения между ними и метод использования их руководителями при разработке критериев для выбора решений. Очевидно, что эффективность системы определяется комплексом всех параметров, но руководство должно учитывать гораздо больше обстоятельств, чем содержится в этом комплексе: оно должно рассматривать параметры по отдельности, учитывать взаимозаменяемость одних характеристик другими, возможность улучшения при помощи изменения конструкции и другие факторы, определяющие ценность системы. Важно также учитывать повышение эффективности путем улучшения условий эксплуатации, обслуживания и управления. Другими словами, руководство должно использовать эти понятия для выделения и количественной оценки участков, создающих трудности, и распределить ответственность за выполнение улучшений. Ниже будут указаны некоторые пути решения такой задачи.

Прежде всего целесообразно определить эффективность системы с учетом требований потребителя, эксплуатирующего эту систему. С точки зрения потребителя эффективность системы определяется ответом на следующий вопрос: насколько хорошо система выполняет требуемые функции, независимо от стоимости, требуемого персонала и затруднений, связанных с поставками производителя? При такой формулировке, очевидно, потребитель системы может принимать различные решения. Например, он может согласиться с довольно частыми отказами, если ремонт прост и выполняется за короткое время. С другой стороны, если перерыв в работе даже на короткое время приводит к серьезным последствиям или если выполнение ремонта связано с большими трудностями и огромными затратами времени, то даже редко встречающиеся отказы заставляют задуматься и снижают приемлемость системы для потребителя. Например, частые отказы машинки для подстригания газонов не имеют серьезного значения, если ремонт прост, но отказ шасси самолета является катастрофой независимо от легкости выполнения ремонта.

Эти примеры приводят к таким характеристикам эффективности системы, как оперативная готовность, готовность и пригодность конструкции. Высокая оперативная готовность желательна, но важно знать, каким путем она достигается. Если она обеспечивается высокой степенью готовности, то это хорошо: время неисправности мало по сравнению с временем безотказной работы — ремонт не вызывает излишних задержек. Если, однако, высокая оперативная готовность обеспечивается прежде всего редким применением оборудования (нерабочее время) или путем поддержания наличия избыточного оборудования (время хранения), а готовность низка, то нерабочее время и время хранения играют роль «костылей», позволяющих работать при плохом оборудовании.

В отношении пригодности конструкции следует учитывать качество или степень удовлетворения потребителя работой системы. Так, неспособность машинки хорошо подстригать траву неприятна и в некоторой степени снижает оценку пригодности конструкции; однако плохое качество шасси самолета сводит оценку пригодности конструкции к нулю. Последний случай представляет совершенно неприемлемую ситуацию. Изменение вида работы (дискретная или непрерывная) приводит к различным оценкам пригодности конструкции. Можно вполне согласиться на ухудшение качества работы как на компенсацию за большую надежность или облегчение ремонта или на то и на другое одновременно.

Если время неисправности слишком велико, следует выяснить причину. Конструкция оказывает существенное влияние на время выполнения ремонта. Время снабжения в большой мере определяется снабженческой политикой, которая устанавливается руководством. Организационное время в большинстве случаев лежит на ответственности руководства. Таким образом, желательно подробно рассмотреть все виды интервалов времени, так как эффективность системы можно повысить или понизить, видоизменяя конструкцию системы, политику руководства, методы управления и условия эксплуатации.

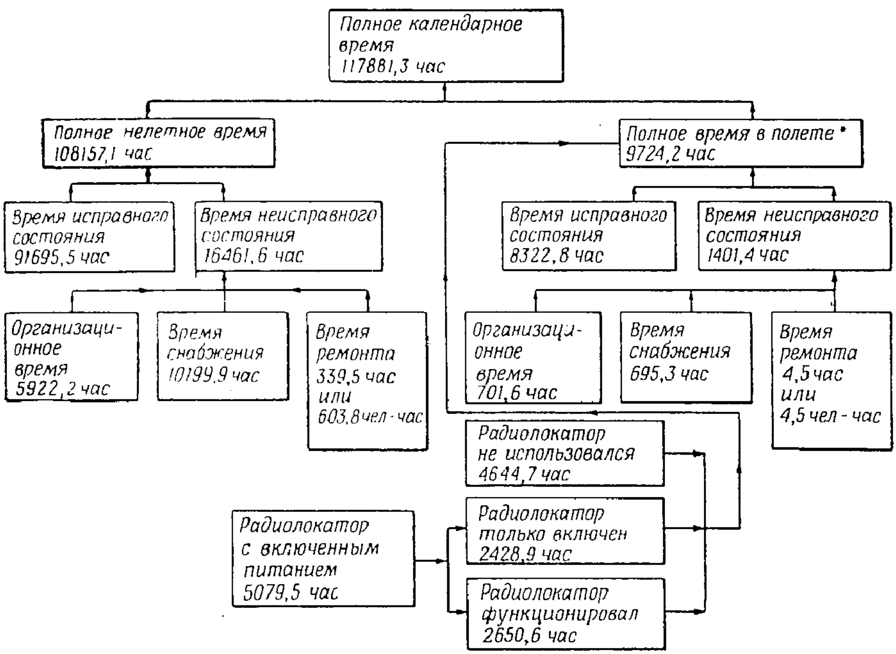
Статистические задачи, с которыми приходится сталкиваться при рассмотрении показателей или параметров, влияющих на эффективность системы, аналогичны задачам, встречающимся в любом статистическом исследовании. Необходимо соответствующим образом интерпретировать числовые показатели, что в данном случае означает необходимость их перевода на язык понятий, связанных с эффективностью системы. Например, система, готовность которой равна 90%, может быть совершенно неудовлетворительной, тогда как другая система, готовность которой равна 80%, может оказаться вполне приемлемой даже для выполнения той же задачи. 90%-ная готовность может соответствовать низкой надежности и короткому времени ремонта. Тогда при 80%-ной готовности вероятность выполнения задания может оказаться более высокой, если в начальный момент система была исправна. Любой параметр невозможно интерпретировать в отрыве от других.

Очень трудная статистическая задача связана с включением в рассмотрение нерабочего времени и времени хранения. Эти два параметра совместно часто придают системе вид хорошей системы. Все же эта задача не столь важна, как задача правильного использования этих интервалов времени для улучшения эффективности системы. Если обслуживание можно спланировать таким образом, чтобы оно захватывало нерабочее время и время хранения, то можно свести к минимуму ухудшение эффективности из-за работ по ремонту. Таким образом, желательно рассматривать меру готовности, основанную на той доле времени неисправности, когда необходимо функционирование, возможно, в дополнение к мере, учитывающей все время неисправности. Это лучше всего осуществляется при помощи системы сбора данных, использующей классификацию интервалов времени по двум критериям. Конечно, можно получить приближенную оценку путем какого-либо приемлемого сопоставления времени неисправности и времени функционирования.

Математические методы, изложенные в гл. 2—4, конечно, проясняют намеченные здесь статистические проблемы. Данное краткое рассмотрение не ставит задачу полного охвата всех методов, которые может применить исследователь.

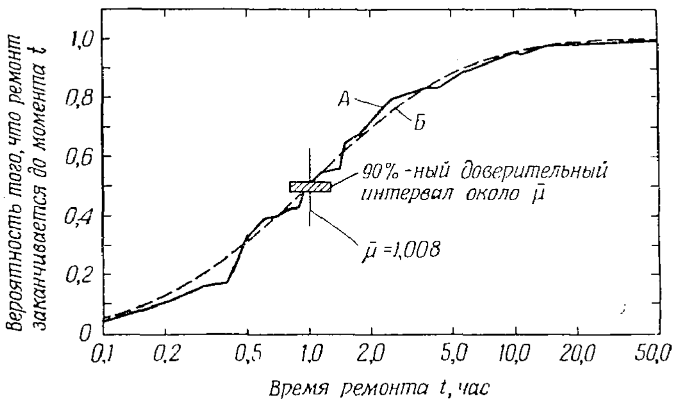
1.10. ПРИМЕР

Для лучшего понимания вычислений, выполняемых при исследовании эффективности системы, в данной главе приводится крайне упрощенный пример, основанный на данных, полученных при эксплуатации в действительных условиях системы военного назначения — радиолокатора AN/APS-20E. Эта система представляет самолетную бортовую импульсную обзорную радиолокационную станцию довольно большой мощности, которая на протяжении нескольких лет применялась Военно-воздушными силами и Военно-морским флотом США. Данные получены при эксплуатации 24 станций. В данном случае выполняемые задачи не полностью соответствовали назначению



Фиг. 1.3. Распределение всего отчетного времени использования 24 радиолокаторов AN/APS-20E в двух эскадрильях с августа 1958 г. по март 1959 г.

* Для получения полного летного времени учитывается один, а не оба промежутка времени.



Фиг. 1.4. Наблюденная (*А*) и теоретическая (*Б*) кривые функции ремонтопригодности радиолокатора AN/APS-20E.

$$M_R(t) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma) \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma^2}\,dx,$$

где $x = \lg t$, ξ — среднее значение x, σ — стандартное отклонение x, $\bar{\mu} = \operatorname{antilog} \xi$, 95%-ный доверительный интервал около $\bar{\mu} = \operatorname{antilog}(\xi \pm 1{,}96\sigma/\sqrt{n})$, где n — число наблюдений, $\bar{\mu} = 1{,}008$, $\xi = 0{,}0037$, $\sigma = 0{,}5891$, $n = 135$ проверок, $\bar{t} = (\sum t_i)/n = 2{,}52$ *час*.

системы, и обзор пространства не производился таким образом, чтобы можно было обоснованно оценить конструкцию системы. Поэтому данный пример иллюстрирует только метод и не приводит к оценке фактической эффективности.

На фиг. 1.3 показано распределение всего календарного времени наблюдений на интервалы различных видов, рассмотренных ранее. В табл. 1.2 дана та же информация о распределении времени, но интервалы времени представлены как доли некоторых основных видов промежутков времени. Ряд дополнительных сведений о количестве операций и наблюдавшихся при выполнении обзора неисправностях представлен в табл. 1.3. На фиг. 1.4 приведена одна из соответствующих кривых — закон распределения времени ремонта. Здесь изображены как наблюденные данные, так и основанная на них логарифмически нормальная кривая распределения вероятностей.

В табл. 1.4 представлены некоторые дополнительные данные, имеющие значение при оценке системы. Приводится средняя наработка на отказ для различных видов интервалов времени, а также средние значения интервалов, составляющих время неисправности. Необходимая для обслуживания трудоемкость выражена в человеко-часах на час полета и в человеко-часах на операцию, в которой применялся радиолокатор. Показатель

Таблица 1.2

Интервалы времени в процентах от некоторых основных видов времени
(Соответствует данным фиг. 1.3)

Интервал времени	Процент от календарного времени	Процент от нелетного времени	Процент от времени неисправности вне полета
Нелетное время			
Организационное время	5,02	5,47	35,98
Время снабжения	8,65	9,43	61,96
Время работы	0,29	0,32	2,06
Полное время неисправности	13,96	15,22	100,00
Полное время исправности	77,79	84,78	
Полное нелетное время	91,75	100,00	

Интервал времени	Процент от календарного времени	Процент от летного времени	Процент от времени неисправности в полете
Время в полете [1]			
Организационное время	0,60	7,21	50,06
Время снабжения	0,59	7,15	49,62
Время работы	0,003	0,05	0,32
Полное время неисправности	1,19	14,41	100,00
Полное время исправности	7,06	85,59	
Полное время в полете	8,25	100,00	

Интервал времени	Процент от календарного времени	Процент от летного времени	
Время в полете [1]			
Радиолокатор не использовался	3,94	47,76	
Радиолокатор только включен	2,06	24,98	
Радиолокатор функционировал	2,25	27,26	
Полное время в полете	8,25	100,00	
Полное календарное время	100,00		

[1]) Каждая из этих разновидностей времени в полете должна учитываться в отдельности при рассмотрении общего календарного времени

Таблица 1.3

Число отказов и полетов

Число полетов или заданий	2068
Число заданий, в которых радиолокатор использовали или пытались использовать	1067
Средняя длительность выполнения задания, *час*	4,70
Число отказов, обнаруженных в полете радистом	96
Число отказов, обнаруженных на земле техником	86
Полное число отказов системы	182
Полное число ремонтов	135

Таблица 1.4

Показатели надежности и восстанавливаемости
(Вычислены по данным фиг. 1.3 и табл. 1.3)

Среднее время между отказами (СВМО):	
Календарные часы	647,7
Часы на самолете или в полете	53,4
Часы включения питания	27,9
Часы излучения	14,6
Время неисправности вне полета на один ремонт:	
Среднее организационное время, *час*	43,9
Среднее время снабжения, *час*	75,6
Среднее активное время, человеко-часы	4,5
Медианное значение времени работы, *час*	1,0
Требуемая трудоемкость обслуживания	
Человеко-часы на 1 *час* полета	0,062
Человеко-часы на операцию с использованием радиолокатора	0,57
Показатель трудоемкости восстановления	
Человеко-часы на 1000 *час* включенного питания	118,9
Человеко-часы на 1000 *час* излучения	227,8

трудоемкости восстановления вычислен для времени включения питания и для времени излучения. Все эти величины характеризуют некоторые фазы эксплуатации или обслуживания системы, и исследователь должен выбрать из них те, которые пригодны для решения частной задачи при оценке эффективности системы.

1.11. ТРЕБОВАНИЯ К ДАЛЬНЕЙШИМ ИССЛЕДОВАНИЯМ

Вопрос количественного определения эффективности систем и связанных с нею понятий требует дальнейших исследований. Несмотря на большое внимание, уделявшееся ранее надежности, и имеющийся опыт, все же необходимы новые методы исследования и сбора данных для того, чтобы понять характеристики отказов элементов, частей и систем в целом. Недостаток методов и данных даже еще важнее в вопросах, связанных с временем ремонта, нерабочим временем, пригодностью конструкции и т. п. Имеется очень мало сведений о виде математических функций для отдельных видов интервалов времени и еще меньше для их отношений. Это очень усложняет теоретические аспекты использования выборочного метода.

По-видимому, лучше всего могут помочь непараметрические методы. Особенно они полезны при описании основных понятий и соответствующих математических методов исследования. Большое внимание должно быть обращено на разработку и изучение соотношений, устанавливающих связь между различными параметрами. Проведенные ранее исследования основывались главным образом на арифметических средних, а не на рассмотрении плотностей вероятностей и, следовательно, на довольно грубых приближениях. Моделирование на вычислительных машинах представляется многообещающим, и следует продолжать исследования в этом направлении. Наконец, необходимо связать эффективность и ценность системы. Выше, при рассмотрении ценности системы, учитывались четыре характеристики. Можно взять и большее число характеристик. В любом случае следует выработать общее представление о ценности системы и определить связанные с ним понятия при помощи соответствующего исследования сложного критерия для выбора решений.

ГЛАВА 2

МОДЕЛИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

Дж. Као

John H. K. Kao

Associate Professor of Industrial Engineering,
New York University

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование отказов при анализе долговечности изделий целесообразно проводить в двух случаях: 1) при совершенствовании нового изделия; 2) в новых условиях применения изделия. В обоих случаях инженера интересуют законы распределения показателей долговечности, поскольку номинальные технические характеристики изделия не гарантируют работоспособность изделия. Наряду с оценкой изменения показателей долговечности изделия вследствие технического совершенствования или новых условий применения (прямая задача) необходимо выяснение обратных закономерностей влияния изменения показателей долговечности на технико-экономический эффект производства изделий.

Для получения оптимального технико-экономического эффекта необходимо обеспечить выполнение технических требований и удовлетворительные показатели надежности при приемлемом объеме затрат. Нельзя экономить за счет существенного снижения надежности и качества, но нельзя допускать и чрезмерного увеличения расходов, веса, объема и т. п. Для лучшего понимания и использования указанных выше обратных закономерностей инженер должен знать методы выражения данных об отказах с помощью моделей долговечности.

Другое важное направление исследования закономерностей отказов — получение коэффициентов учета нагрузки в различных условиях применения элемента. Эта задача часто возникает при разработке технических условий на военную аппаратуру. Несмотря на то что в военной промышленности производство элементов контролируется чрезвычайно строгими техническими условиями и полученные элементы, как правило, являются лучшими из тех, которые может предложить изготовитель при существующем уровне производства, они все же иногда недостаточно хороши. В подобных случаях инженеры, применяющие эти элементы в разрабатываемой военной аппаратуре, обычно стремятся уменьшить рабочие нагрузки на элементы, чтобы сдать аппаратуру в соответствии с повышенными требованиями к ее функциям. Важно решение следующего вопроса: насколько следует уменьшить нагрузку на элементы и какого увеличения надежности от этого можно ожидать? Исчерпывающим решением служат кривые влияния нагрузки, которые можно получить с помощью моделей зависимости показателей долговечности элемента от уровня нагрузки.

2.2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА — ОСНОВА ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ПО ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

Если случайная выборка образцов (образцом может быть и элемент, и система — см. следующий раздел), полученная из статистически однородной совокупности, проходит испытания в заданных условиях, то образцы будут последовательно один за другим отказывать во времени. Полученные таким образом выборочные данные представляют собой множество неотрицательных чисел — наработки до отказа каждого из образцов.

Методически удобно рассматривать образец как систему, если он восстанавливается, и как элемент, если он не восстанавливается. При таком определении опрессованные конденсаторы, сопротивления, полупроводниковые триоды, электровакуумные приборы и т. п. являются элементами, тогда как стиральные машины, автомобили, самолеты и т. п. — системами. Однако необходимо заметить, что в противоположность обычной терминологии катушку реле будем считать системой, если она восстанавливается путем перемотки, в то же время ракету будем классифицировать как элемент, поскольку после запуска она не может восстанавливаться.

Такое разделение на элементы и системы подчеркивает тот факт, что основные принципы проектирования и математического анализа восстанавливаемых и невосстанавливаемых образцов существенно различаются. Например, удачная конструкция для восстанавливаемого образца (системы) характеризуется малым объемом обслуживания (и если это необходимо, легкодоступностью мест обслуживания). Надежность в этом случае оценивается средней наработкой между отказами. Вместе с тем удачная конструкция невосстанавливаемого образца (элемента) характеризуется долговечностью в максимально жестких условиях, причем долговечность оценивается средним временем до отказа. Понятия средней наработки между отказами и средней наработки до отказа, несомненно, различны по значению, однако часто они ошибочно используются как синонимы. В этой главе закон распределения ресурса будет рассмотрен только применительно к невосстанавливаемым образцам (элементам).

Для восстанавливаемых образцов (систем) закон распределения ресурса будет рассмотрен в гл. 2 (т. III) с привлечением теории восстановления.

Если испытания проводить до отказа всех образцов выборки, то результаты испытаний будут представлять собой случайную, но упорядоченную выборку наблюдений[1]) — моментов отказа очередного образца. Эти эмпирические данные отражают истинный закон (интегральную функцию, см. гл. 4) распределения ресурса элемента $F(x)$ и позволяют получить его «образ» — эмпирический закон $\hat{F}(x)$:

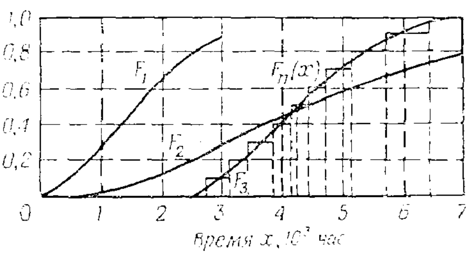
$$\hat{F}(x)=\frac{i}{n}, \qquad x_i<x<x_{i+1}, \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$x_0=0, \qquad x_{n+1}=\infty, \qquad 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n<\infty. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим, например, следующее множество выборочных данных из 10 наблюдений: 2750, 3100, 3400, 3800, 4100, 4400, 4700, 5100, 5700 и 6400. Эмпирический закон распределения показан на фиг. 2.1. Предположим, что объем выборки n (в примере $n = 10$) неограниченно возрастает; тогда $\hat{F}(x)$ стремится к закону распределения совокупности $F(x)$, который определяется формулой (см. гл. 4):

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}. \quad (2.2)$$



Фиг. 2.1. Закон распределения совокупности и эмпирический закон распределения.

Закон распределения (для рассмотренного примера F_3 на фиг. 2.1) служит моделью долговечности и содержит в себе всю информацию о долговечности указанных образцов. Если, например, F_2 для всех значений аргумента меньше F_1 (фиг. 2.1), то образцы с законом распределения ресурса F_2 более надежны, чем образцы, характеризуемые законом F_1. Однако эти рассуждения неприменимы для сравнения образцов с пересекающимися в точке x_0 кривыми F_2 и F_3. Для ресурса, меньшего x_0, образцы с законом F_3 надежнее образцов с законом F_2, в то время как для ресурса, большего x_0, справедливо обратное. Далее для этого случая будет указан точный метод сравнения.

---

[1]) Если выборочные значения расположены в порядке возрастания, то упорядоченная таким образом выборка называется вариационным рядом, а каждый член этого ряда — порядковой статистикой. — *Прим. ред.*

К сожалению, практически не всегда возможно или экономически невыгодно увеличивать объем выборки для уточнения закона распределения. В то же время, если ввести некоторые предположения о форме кривой распределения, то даже по относительно малой выборке можно многое сказать о долговечности[1]. Однако предположение о том, что истинное распределение принадлежит определенному семейству распределений с заданным набором характеризующих параметров, требует специального теоретического обоснования. Этому посвящен следующий раздел.

2.3. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНЫЕ СЕМЕЙСТВА ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА

Ресурс представляет собой непрерывную случайную величину, которая характеризуется законом распределения или интегральной функцией распределения $F(x)$ и ее первой производной — плотностью распределения $f(x)$ (см. гл. 4). Следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1 - R(x). \tag{2.3}$$

Функцию $R(x)$ называют функцией надежности. Для $a < b$

$$P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a) = R(a) - R(b). \tag{2.4}$$

2.3а. Понятие интенсивности отказов. Для любой случайной величины, определенной в области $\gamma \leqslant x < \infty$ (где γ — нижняя граница значений) с функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$, условная вероятность отказа $G(x, T)$, отнесенная к периоду T, следующему за моментом x, определяется формулой

$$G(x,\ T) = \frac{\int_{x}^{x+T} f(t)\,dt}{T\,[1 - F(x)]} = \frac{F(x+T) - F(x)}{T} \cdot \frac{1}{R(x)}. \tag{2.5}$$

В формуле (2.5) интеграл представляет собой математическое ожидание доли отказавших за период $(x, x+T)$ образцов от

---

[1]) В ГОСТ 13377-67 долговечность определяется как свойство изделия сохранять работоспособность до предельного состояния, а ресурс — как наработка изделия до предельного состояния. Автор этой главы по существу отождествляет понятия долговечности и безотказности, ресурса и наработки до отказа. — *Прим. ред.*

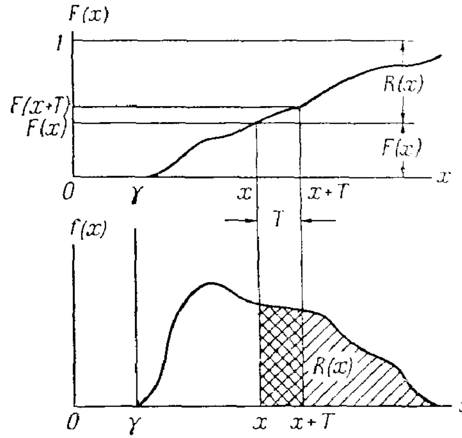
их начального количества, а $1 - F(x) = R(x)$ означает долю неотказавших за время x образцов. Следовательно, отношение этих долей, деленное на T, представляет собой условную вероятность отказов, отнесенную к периоду T, следующему за моментом x.

Введение параметра γ — некоторого конечного значения времени, до которого отказы невозможны, означает, что при $x < \gamma$ функция $F(x) = 0$. Отрицательная величина γ соответствует тому, что образец может отказать до начала эксплуатации в период хранения (например, батарея, электролитический конденсатор, электронная лампа, фотопленка, консервированные продукты и т. п.). Когда $x = \gamma$, функцию $G(\gamma, T)$ называют начальной интенсивностью отказов. Будем предполагать, что $F(\gamma) = 0$, $R(\gamma) = 1$, тогда

$$G(\gamma, T) = \frac{F(\gamma + T)}{T}. \quad (2.6)$$

Для $\gamma = 0$ начальная интенсивность отказов будет

$$G(0, T) = \frac{F(T)}{T}, \quad (2.7)$$



Фиг. 2.2. Определение функции $G(x, T)$.

что представляет собой частный вид интенсивности отказов. Тем не менее многие авторы ошибочно используют это выражение в качестве общего определения интенсивности отказов. Как будет далее показано, формула (2.7) верна для всех значений x только в случае экспоненциального закона распределения ресурса.

Мгновенная интенсивность отказов или просто интенсивность отказов $Z(x)$ определяется предельным значением $G(x, T)$ при $T \to 0$. Следовательно,

$$Z(x) = \lim_{T \to 0} \left[\frac{F(x+T) - F(x)}{T}\right] \frac{1}{R(x)} = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{-R'(x)}{R(x)}. \quad (2.8)$$

Выражение $R(x)$ через $Z(x)$ можно получить путем преобразования формулы (2.8):

$$-Z(x) = \frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{d}{dx}[\ln R(x)]. \quad (2.9)$$

Умножив на dx и интегрируя в пределах $(-\infty, x)$, получим

$$-\int_{-\infty}^{\gamma} Z(t)\,dt - \int_{\gamma}^{x} Z(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\gamma} d[\ln R(x)] + \int_{\gamma}^{x} d[\ln R(x)]. \quad (2.10)$$

Поскольку для $-\infty < x \leqslant \gamma$, $Z(x) = 0$, $R(x) = 1$, имеем

$$-\int_{\gamma}^{x} Z(t)\,dt = \ln R(x), \qquad x \geqslant \gamma, \quad (2.11)$$

или

$$R(x) = \exp\left[-\int_{\gamma}^{x} Z(t)\,dt\right]. \quad (2.12)$$

Следовательно, для интегральной функции распределения ресурса получим

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\int_{\gamma}^{x} Z(t)\,dt\right], \qquad x \geqslant \gamma. \quad (2.13)$$

Первая производная от $F(x)$ по x — плотность распределения ресурса — равна

$$f(x) = Z(x)\exp\left[-\int_{\gamma}^{x} Z(t)\,dt\right], \qquad x \geqslant \gamma. \quad (2.14)$$

Если интенсивность отказов $Z(x)$ постоянна и равна λ, то

$$\lambda \int_{\gamma}^{x} dt = \lambda(x-\gamma),$$

а функции $f(x)$ и $F(x)$ описывают хорошо известное двухпараметрическое экспоненциальное распределение

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\frac{x-\gamma}{\theta}\right], \qquad x \geqslant \gamma, \quad (2.15)$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left[-\frac{x-\gamma}{\theta}\right], \qquad x \geqslant \gamma, \quad (2.16)$$

где $\lambda = 1/\theta$.

Если интенсивность отказов $Z(x)$ является степенной функцией, например

$$\int_{\gamma}^{x} Z(t)\,dt = \left[\frac{x-\gamma}{\eta}\right]^{\beta},$$

то функции $F(x)$ и $f(x)$ описывают в этом случае трехпараметрическое распределение Вейбулла:

$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right], \qquad x\geqslant\gamma, \tag{2.17}$$

$$f(x)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right], \qquad x\geqslant\gamma. \tag{2.18}$$

Тремя параметрами закона Вейбулла служат

η — параметр масштаба,

β — параметр формы,

γ — параметр положения.

Интенсивность отказов в случае закона Вейбулла

$$Z(x)=\frac{\beta}{\eta}\left[\frac{x-\gamma}{\eta}\right]^{\beta-1}$$

является возрастающей (убывающей) функцией $x-\gamma$, если $\beta>1$ $(\beta<1)$ и равна постоянной величине $1/\eta$, при $\beta=1$, когда имеет место частная форма закона Вейбулла — экспоненциальное распределение. Возможность представления с помощью закона Вейбулла интенсивности отказов $Z(x)$ в виде простой монотонной функции объясняет интерес, который проявляется к этой аналитической форме описания закономерностей отказов.

2.3б. Модель слабейшего звена. В соответствии с этой моделью отказов каждый элемент считается составленным из некоторых звеньев, подобно звеньям цепи. Тогда модель долговечности элемента (цепи) эквивалентна модели долговечности звена, отказавшего первым, т. е. звена, оказавшегося слабейшим. В предположении, что ресурсы всех звеньев — независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же закону $F(x)$ с плотностью $f(x)$, ресурс элемента определяется законом распределения наименьшей порядковой статистики выборки объема n:

$$F_1(x)=1-[1-F(x)]^n \tag{2.19}$$

и

$$f_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x). \tag{2.20}$$

Если, например, распределение ресурса звена подчиняется закону Вейбулла [(2.17) и (2.18)], то распределение ресурса элемента описывается функциями

$$F_1(x)=1-\exp\left[-n\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right], \tag{2.21}$$

$$f_1(x)=\frac{n\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-n\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right]. \tag{2.22}$$

Формулы (2.21) и (2.22) отражают свойство самовоспроизведения закона распределения Вейбулла для наименьшей порядковой статистики выборки из совокупности, распределенной по закону Вейбулла (в том числе и по экспоненциальному). Следует напомнить, что закон распределения выборочного среднего при нормальном законе распределения слагаемых также обладает свойством самовоспроизведения.

На практике число звеньев n может быть мало, как, например, число слоев диэлектрика в бумажном конденсаторе. Такой конденсатор отказывает при пробое любого слоя (звена). Если отказы каждого из слоев внезапны, т. е. имеют постоянную интенсивность, и распределены по экспоненциальному закону, то и отказы конденсатора будут распределены по экспоненциальному закону. С другой стороны, число звеньев n может быть очень большим, как, например, в модели усталостной прочности металлической детали. Под звеном в этом случае подразумеваются два соседних слоя металлической структуры крайне малой толщины, между которыми возникает усталостная трещина. Для больших значений n распределение наименьшей порядковой статистики аппроксимируется следующим образом.

Используем результат Крамера, утверждающий, что для случайной величины $Y = nF(X)$ плотность вероятности $g_1(y)$ наименьшей порядковой статистики для Y стремится к e^{-y}, когда $n \to \infty$. Тогда плотность вероятности наименьшей порядковой статистики X может быть получена по обычным формулам перехода от переменных Y к X в функции распределения. Предположим, например, что ресурс звена распределен по закону $F(x) = \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$ для $\beta > 0$ и $\gamma < x < \gamma + \eta$, что является частным случаем бета-распределения. С ростом числа звеньев $g_1(y) \to e^{-y}$ для $y > 0$ и $f_1(x) = g_1(y)\,|dy/dx|$. Так как $y = nF(x)$ и $|dy/dx| = nf(x) = n\beta/\eta[(x-\gamma)/\eta]^{\beta-1}$, то

$$f_1(x) = \frac{n\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-n\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right], \qquad x > \gamma. \tag{2.23}$$

Следует отметить, что формулы (2.22) и (2.23) совпадают, несмотря на то что они выведены из различных предположений относительно законов распределения звеньев. Формула (2.22) справедлива для любого n, если ресурс звена распределен по закону Вейбулла, в то время как формула (2.23) справедлива только для больших n, если ресурс звена имеет бета-распределение. Возникает вопрос: существуют ли другие совокупности, которые также приводят к распределению Вейбулла для элемента в модели слабейшего звена? Положительный ответ на этот вопрос получили Фишер и Типпет [1]. Они показали, что при некоторых условиях регулярности для многих распределений, включая нормальное, наименьшая порядковая статистика выборки при достаточно большом n имеет распределение одного из трех типов:

$$\text{I.}\quad F_1(x)=1-\exp\left\{-\exp\frac{x-\gamma}{\eta}\right\}\quad \text{для}\quad -\infty<x<\infty, \tag{2.24}$$

$$\text{II.}\quad F_1(x)=1-\exp\left\{\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{-\beta}\right\}\quad \text{для}\quad -\infty<x<\gamma, \tag{2.25}$$

$$\text{III.}\quad F_1(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right\}\quad \text{для}\quad \gamma<x<\infty. \tag{2.26}$$

Так как для распределения типа II $-\infty<x<\gamma$, то сомнительно, чтобы оно было полезно при анализе отказов. Распределение типа III — распределение Вейбулла. Фишер и Типпет назвали распределения типа II и III распределениями «промежуточной» формы, а распределение типа I — распределением «окончательной» формы, так как в предположении нормального распределения совокупности распределение крайних членов выборки с ростом n вначале принимает форму распределений типа II или III, а затем типа I. Гумбель в известной работе [2] описал все три типа распределения и для максимального члена выборки использовал распределение типа I. Более того, если распределение X соответствует формулам (2.24) и (2.26), то легко показать, что распределение наименьшей порядковой статистики при любом n имеет ту же форму с единственным отличием — сдвигом параметра положения на величину $\ln n$ (для распределения типа I) или наличием масштабного множителя $1/n^{\beta}$ (для распределения типа III). Это свойство самовоспроизведения объясняет, почему распределения этих трех типов называют распределениями крайних значений выборки.

2.3в. Модель резервированных звеньев. В противоположность модели слабейшего звена эта модель отказов предполагает, что каждый элемент состоит из многих звеньев, как канат состоит из многих нитей. Канат не оборвется до тех пор, пока не оборвутся все нити. Поэтому модель распределения резервированных звеньев представляет собой свертку законов распределения ресурсов всех n звеньев элемента. В предположении, что ресурсы звеньев независимы и одинаково распределены с плотностью $f(x)$, получим, что плотность распределения ресурса элемента $g(x)$ является n-кратной сверткой $f(x)$, т. е.

$$g(x)=[f(x)]^{n*}=f(x)*[f(x)]^{(n-1)*}=[f(x)]^{2*}*[f(x)]^{(n-2)*}=\ldots, \tag{2.27}$$

$$[f(x)]^{2*}=[f(x)]*[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,f(x-t)\,dt. \tag{2.28}$$

Пусть, например, ресурс звена распределен по закону

$$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, \qquad x>0,$$

т. е. имеет однопараметрическую экспоненциальную плотность распределения. Так как

$$[f(x)]^{2*}=\frac{1}{\theta^2}\int_0^x e^{-t/\theta}e^{-(x-t)/\theta}\,dt=\frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta},$$

то

$$[f(x)]^{3*}=\frac{x^2}{2\theta^3}e^{-x/\theta}$$

и по индукции

$$g(x)=[f(x)]^{n*}=\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)\,\theta^n}e^{-x/\theta}, \qquad x>0, \tag{2.29}$$

что представляет собой плотность гамма-распределения с параметром формы n и параметром масштаба θ, который характеризовал также плотность распределения каждого звена. Когда число таких звеньев становится большим, распределение ресурса элемента $g(x)$ стремится к нормальному со средним значением $n\theta$ и дисперсией $n\theta^2$. Это соответствует известному свойству асимптотической нормальности (с ростом параметра формы) гамма-распределения. Более того, согласно центральной предельной теореме, сумма X любых одинаково распределенных (не только экспоненциально) ресурсов со средним μ_x и дисперсией σ_x^2, будучи нормирована и представлена в форме $(X-\mu_x)/\sigma_x$, имеет асимптотически нормальное распределение, когда число слагаемых $n\to\infty$. Сравнивая модели резервированных звеньев и слабейшего звена, убеждаемся в том, что гамма-распределение и распределение Вейбулла имеют форму «промежуточного» распределения, а нормальное распределение и распределение Гумбеля типа I имеют смысл «окончательного» распределения.

Тот факт, что распределение Вейбулла и гамма-распределение (промежуточные) меняют свою форму в зависимости от параметра формы, тогда как распределение Гумбеля типа I и нормальное (окончательные) являются распределениями с фиксированной формой, является интересным дополнительным результатом сравнения двух рассмотренных моделей отказов. В заключение необходимо отметить, что все четыре выделенных распределения являются «формозащищенными», т. е. самовоспроизводятся в моделях отказа, которым они соответствуют. Как отмечалось выше, наименьшая порядковая статистика выборки с распределением Вейбулла (и Гумбеля типа 1) подчиняется таким же законам распределения, что и выборка; сумма ресурсов, имеющих гамма-распределение (и нормальное), также следует закону распределения слагаемых.

2.3г. Модель пропорционального эффекта. Пусть $X_1 < X_2 < \ldots$ $\ldots < X_n$ представляет собой последовательность случайных величин, например размеров усталостной трещины на последовательных этапах ее роста. Когда величина трещины достигает значения X_n, элемент отказывает. В модели пропорционального эффекта предполагается, что увеличение трещины на каждом этапе $X_i - X_{i-1}$ пропорционально уже достигнутой за все предыдущие этапы величине X_{i-1}, т. е.

$$X_i - X_{i-1} = \delta_i X_{i-1}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{2.30}$$

где X_0 — начальная величина трещины в элементе — микроскопические нарушения структуры, пустоты, инородные включения и т. п., а δ_1, δ_2, ... — независимые положительные случайные величины, законы распределения которых могут быть одинаковыми или различными.

В соответствии с формулой (2.30) получаем

$$X_i = (1 + \delta_i) X_{i-1} = (1 + \delta_i)(1 + \delta_{i-1}) \ldots (1 + \delta_1) X_0. \tag{2.31}$$

Так как предполагается, что элемент отказывает, когда величина трещины достигает значения X_n, то модель распределения ресурса элемента представляет собой распределение величины X_n. Полагая в формуле (2.31) $i = n$, получаем X_n в виде произведения независимых положительных случайных величин. Логарифм X_n равен сумме логарифмов сомножителей. Согласно центральной предельной теореме, $\ln X_n$ имеет асимптотически нормальное распределение, т. е. величина X_n распределена по логарифмически нормальному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad x > 0. \tag{2.32}$$

Графики, соответствующие формуле (2.32), которые приведены в работе [3], показывают, что μ — параметр положения для нормально распределенной случайной величины $\ln X$ — ведет себя скорее как параметр масштаба для логарифмически нормально распределенной случайной величины X, а σ — параметр масштаба для $\ln X$ — как параметр формы для X. Эти изменения в поведении параметров при переходе от нормального к логарифмически нормальному распределению еще раз подчеркивают связь законов Гумбеля типа I и Вейбулла. Действительно, можно показать, что если $\ln X$ имеет распределение Гумбеля типа I, то величина X распределена по закону Вейбулла. Это иллюстрируется следующим образом.

Предположим, что величина X имеет распределение Вейбулла в соответствии с формулой (2.17). Если $Y = \ln(X - \gamma)$, то $a = \ln \eta$, $b = 1/\beta$ и $[(x - \gamma)/\eta]^{\beta} = \exp[(y - a)/b]$; следовательно, величина Y распределена по закону

$$F(y) = 1 - \exp[-\exp(y - a)/b], \qquad -\infty < y < \infty. \tag{2.33}$$

Эта формула эквивалентна формуле (2.24), описывающей распределение Гумбеля типа I. Параметр положения a (или параметр масштаба b) в формуле (2.33) ведет себя как параметр масштаба $\ln \eta$ (или как параметр формы $1/\beta$) в формуле (2.17). Отсюда вновь следует, что логарифмически нормальное распределение и распределение Вейбулла являются промежуточными, а соответствующие им предельные распределения — нормальное и Гумбеля типа I, имеют фиксированную форму.

Рассмотренные четыре модели отказов позволяют выделить ряд законов распределения: логарифмически нормальный, Вейбулла (включающий экспоненциальный при $\beta = 1$ и Релея при $\beta = 2$), гамма-распределение (включающий экспоненциальный при $n = 1$), нормальный и Гумбеля типа I, которые можно положить в основу построения моделей долговечности невосстанавливаемых образцов, названных здесь элементами. В следующих разделах описаны методы применения этих законов.

2.4. ПОСТРОЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ БУМАГИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

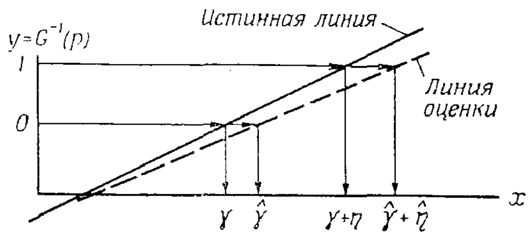
2.4а. Общие замечания. Как следует из предыдущих разделов, распределение ресурса можно характеризовать параметрами положения, масштаба и формы. Ряд законов распределения: нормальный, Гумбеля типа I, экспоненциальный и Релея, имеют фиксированную форму и не требуют в явном виде параметра формы. Другие законы распределения: логарифмически нормальный, Вейбулла, гамма-распределение, Стьюдента, F-распределение и бета-распределение, имеют один и более параметров формы, что позволяет более точно подобрать вид распределения для описания выборочных данных. Независимо от наличия у распределения параметра формы выборочные данные можно с достаточной точностью описать путем подбора подходящих значений параметров положения и масштаба. Это достигается с помощью следующего линейного преобразования:

$$Y = \frac{X - \gamma}{\eta} \quad \text{или} \quad X = \gamma + \eta Y. \tag{2.34}$$

Тогда, полагая $p = F(x) = G(y)$ при $0 < p < 1$, получим нормированную функцию G, не содержащую параметров положения и масштаба. Для обратной функции G^{-1} справедливо соотношение

$$y = G^{-1}(p) = G^{-1}[F(x)]. \tag{2.35}$$

Вместо построения графика $F(x)$ как функции x (см. фиг. 2.1) иногда целесообразно построение графика x как функции $F(x)$, т. е. $G^{-1}[F(x)]$, которая обозначена через y. Из формулы (2.34) следует, что зависимость между x и y линейная. Название вероятностной бумаги связано с методом масштабирования оси y; закон распределения $F(x)$, определяющий тип вероятностной бумаги, представляется на этой бумаге в виде прямой линии, которая зависит от параметров положения и масштаба и имеет положительный угловой коэффициент (фиг. 2.3). Нанеся данные на вероятностную бумагу, можно приближенно оценить их соответствие предполагаемому закону и, кроме того, получить графические оценки параметров положения и масштаба путем проведения прямой линии через выборочные точки.



Фиг. 2.3. Построение вероятностной бумаги.

При нанесении выборочных точек требуется оценить неизвестную функцию $p = F(x)$. Одной из возможных оценок является эмпирическое распределение [см. (2.1)]. Однако у этой оценки имеются свои недостатки. Если $F(\infty) = G(\infty) = 1$, что справедливо для всех моделей долговечности, рассматриваемых в этой главе, то $y = G^{-1}(1) = \infty$. Это означает, что величина y бесконечна при $p = 1$. Эмпирический закон распределения имеет вид $\hat{F}(x) = n/n = 1$ для $x \geqslant x_n$, в частности для наибольшего выборочного значения. Следовательно, наибольшее выборочное значение x_n нельзя отразить на вероятностной бумаге. Приведем ряд эмпирических оценок $\hat{F}(x)$ для $F(x)$, имеющих широкое применение:

1. Эмпирический закон распределения i/n.
2. Симметричный эмпирический закон распределения $(i - {}^1/_2)/n$.
3. Распределение среднего ранга[1]).

[1]) Рангом элемента выборки называют порядковый номер этого элемента в вариационном ряду. — *Прим. ред.*

4. Распределение моды эмпирического закона распределения.

5. Распределение медианы эмпирического закона распределения.

6. Распределения для

$$M\{X_i\}, \quad F\{M\{X_i\}\} = G\{M\{Y_i\}\}.$$

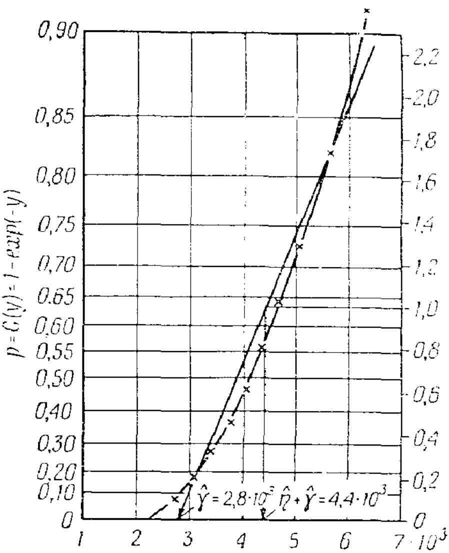
7. Оценки Блома [6] $(i - \alpha_i)/(n - \alpha_i - \beta_i + 1)$.

Оценки 1—4 для функции $p = F(x)$ удобны в практической работе, так как не требуют каких-либо таблиц. Для оценки 5 необходимо использование таблиц неполной бета-функции, имеющихся в [4], [5]. Оценка 6 является несмещенной для параметров масштаба и положения. К сожалению, таблицы для $M\{Y_i\}$ имеются только для небольшой группы распределений (экспоненциального, нормального, гамма-распределения и в ограниченном диапазоне для закона Гумбеля типа I). Оценка 7, предложенная Бломом [6], представляет собой усовершенствованный вариант оценки 3 и обладает многими полезными статистическими свойствами: она почти несмещенная и имеет минимальную среднеквадратическую ошибку. В модифицированном варианте оценки Блома α_i и β_i не зависят от n и i. В последнем случае оценка 7 превращается в оценку 1 при $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$; в оценку 2 — при $\alpha_i = \beta_i = 1/2$; в оценку 3 — при $\alpha_i = \beta_i = 0$ и в оценку 4 — при $\alpha_i = \beta_i = 1$.

Для ряда распределений Блом указал также «оптимальные» значения α_i и β_i. Например, $\alpha_i = \beta_i = 3/8$ для нормального распределения; $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1/2$ для экспоненциального распределения; $\alpha_i = 1/4$, $\beta_i = 1/2$ для распределения Гумбеля типа I; $\alpha_i = 0{,}52(1 - b)$, $\beta_i = 0{,}5 - 0{,}2(1 - b)$ для распределения Вейбулла с параметром формы, равным $1/b$. Заметим, что эти значения α_i и β_i для распределения Вейбулла включают как специальный случай экспоненциальное распределение при $\alpha_i = 0$ и $\beta_i = 1/2$ с единичным параметром формы.

Другой интересный факт для распределения Вейбулла можно обнаружить, если положить $\alpha_i = \beta_i$. Тогда $0{,}52\ (1 - b) = 0{,}5 - 0{,}2(1 - b)$, и параметр формы для распределения Вейбулла $1/b$ принимает значение, равное 3,27, для которого распределение Вейбулла можно считать приближенно нормальным (см. фиг. 1 в работе [12] для $\beta = 3^1/_3$). Когда параметр формы распределения Вейбулла равен 3,27, получим $\alpha_i = \beta_i \approx 3/8{,}3$, что весьма близко к значениям $\alpha_i = \beta_i = 3/8$, найденным Бломом для нормального распределения. Конечно, оценка 7 по сравнению с оценками 5 и 6 имеет то преимущество, что подобно оценкам 1—4 не требует каких-либо специальных таблиц. В сравнении с 6 оценка 7 почти сохраняет несмещенность оценки 6.

Следует указать, что для получения G^{-1} по формуле (2.35) должен быть известен параметр формы для распределения F (и, следовательно, G, так как замена переменных (2.34) не влияет на форму). Другими словами, для каждого данного значения параметра формы существует свое масштабирование оси y. Это справедливо для гамма-распределения и распределения Вейбулла. Если исследователь не намерен вводить каких-либо предположений относительно значения параметра формы, он может построить несколько шкал y по формуле (2.35), каждая из которых будет соответствовать определенному значению параметра формы. Путем соединения точек с равными значениями p на этих рядом расположенных шкалах y можно получить практически неограниченное число таких шкал. Таким образом возможно графически оценить параметр формы, выбирая то значение параметра, которое соответствует наилучшей линейности графика на вероятностной бумаге. Этот метод будет использован ниже.



Фиг. 2.4. Экспоненциальный закон.

2.4б. Экспоненциальное распределение. Интегральная функция экспоненциального распределения $F(x)$ определяется формулой (2.15), которую заменой переменной (2.34) приводим к виду

$$G(y) = 1 - e^{-y}, \qquad y > 0. \tag{2.36}$$

Полагая $G(y) = p$ и разрешая относительно y, получаем

$$y = G^{-1}(p) = -\ln(1-p). \tag{2.37}$$

На фиг. 2.4 приведен график, построенный по тем же данным, что и график на фиг. 2.1, однако для эмпирического закона распределения использована оценка 3 и ось y масштабирована в соответствии с формулой (2.37). Как следует из фиг. 2.4, для более точного описания данных рассмотренного примера экспоненциальный закон распределения следует заменить другим законом. Если провести прямую, аппроксимирующую эмпирические точки графика, можно получить оценки параметра положения $\hat{\gamma} = 2800$ *час* и параметра масштаба $\hat{\eta} = 4400 - 2800 = 1600$ *час*.

Среднее значение и дисперсия экспоненциального закона распределения с параметрами положения γ и масштаба η определяются формулами

$$\text{Среднее значение} = \gamma + \eta, \tag{2.38}$$

$$\text{Дисперсия} = \eta^2. \tag{2.39}$$

Используя найденные значения $\hat{\gamma}$, получим оценки

$$\text{Среднее значение} = 4400 \text{ час}, \tag{2.40}$$

$$\text{Дисперсия} = 256 \cdot 10^4 \text{ час}^2. \tag{2.41}$$

2.4в. Гамма-распределение. Плотность гамма-распределения, характеризующаяся параметром положения γ, параметром масштаба η и параметром формы β, определяется формулой

$$f(x) = \frac{(x-\gamma)^{\beta-1} \exp[-(x-\gamma)/\eta]}{\eta^\beta \Gamma(\beta)}, \quad x > \gamma, \ \gamma > 0, \ \beta > 0, \ \eta > 0. \tag{2.42}$$

Легко убедиться в том, что формула (2.29) является частным случаем общей формулы (2.42), когда $\gamma = 0$, а формула (2.16) описывает другой частный случай — плотность экспоненциального распределения, который следует из (2.42) при $\beta = 1$. С помощью соотношения (2.34) представим выражение (2.42) в форме нормированной плотности гамма-распределения:

$$g(y) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-y}, \qquad y > 0, \quad \beta > 0. \tag{2.43}$$

Нормированная интегральная функция гамма-распределения имеет вид

$$G(y) = \int_0^y \frac{z^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-z} \, dz. \tag{2.44}$$

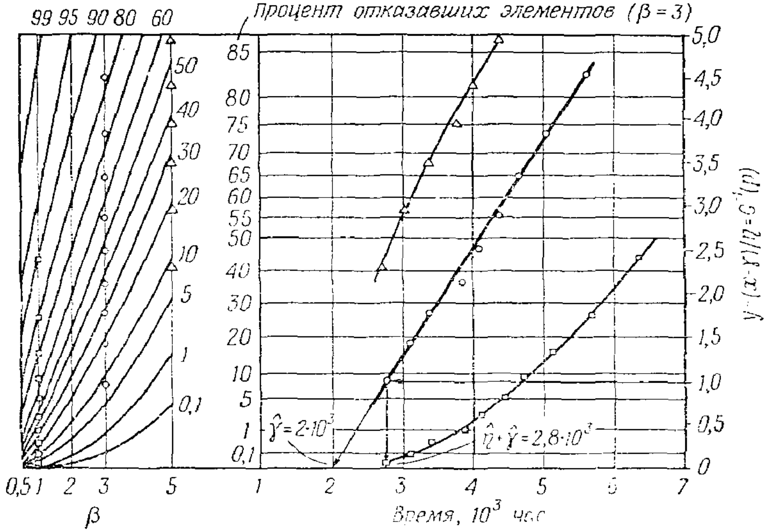
В случае, когда β представляет собой целое положительное число, интеграл (2.44) легко вычисляется:

$$G(y) = 1 - \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{y^k}{k!} e^{-y} =$$

$$= 1 - e^{-y}[1 + y + y^2/2! + y^3/3! + \ldots + y^{\beta-1}/(\beta-1)!]. \tag{2.45}$$

Из формулы (2.45), полагая $\beta = 1$, получаем нормированную интегральную функцию экспоненциального распределения

$G(y) = 1 - e^{-y}$. За исключением случая $\beta = 1$ обратная функция G^{-1} не имеет замкнутой аналитической формы. Однако значения $y = G^{-1}(p)$ табулированы для различных значений параметра формы β, причем в таблицах гамма-распределения и χ^2-распределения даны p%-ные точки [7]. С помощью этих таблиц можно соответствующим образом масштабировать ось y и на полученной вероятностной бумаге строить графики. На фиг. 2.5 показаны такие графики (причем вновь используется эмпирический закон распределения вида 3), построенные по данным фиг. 2.1. Значения параметра формы β найдены методом последовательного приближения путем линеаризации графиков. Для рассматриваемых данных при $\beta = 1$ и $\beta = 5$ получаем кривые с противоположной кривизной, а значению $\beta = 3$ соответствует приближенно линейный график. С помощью найденных оценок параметров гамма-распределения $\hat{\gamma} = 2000$ *час*, $\hat{\eta} = 2800 - 2000 = 800$ *час* и $\hat{\beta} = 3$ можно получить оценки среднего значения и дисперсии:



Фиг. 2.5. Гамма-распределение.

$$\text{Среднее значение} = \hat{\gamma} + \hat{\beta}\hat{\eta} = 2000 + 3 \cdot 800 = 4400 \text{ час}, \tag{2.46}$$

$$\text{Дисперсия} = \hat{\beta}\hat{\eta}^2 = 3 \cdot (800)^2 = 192 \cdot 10^4 \text{ час}^2. \tag{2.47}$$

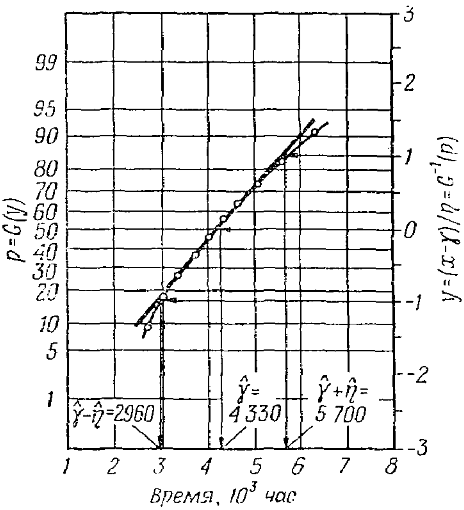
2.4г. Нормальное распределение. Двухпараметрическая плотность нормального распределения с параметром положения μ

и параметром формы σ хорошо известна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad (2.48)$$
$$\sigma > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty.$$

С помощью замены переменной $y = (x - \mu)/\sigma$ [в соответствии с (2.34)] формула (2.48) позволяет получить нормированную плотность нормального распределения

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad (2.49)$$
$$-\infty < y < \infty.$$



Фиг. 2.6. Нормальное распределение.

Подобно случаю гамма-распределения, обратная функция G^{-1} нормального распределения не имеет замкнутой аналитической формы. Поэтому для построения нормальной вероятностной бумаги будем масштабировать ось y с помощью таблиц $y = G^{-1}(p)$. В работе [8] табулированы величины $Y + 5$. Часть этой таблицы приведена в книге Хальда [9]. Фиг. 2.6 иллюстрирует построение на вероятностной нормальной бумаге графика по данным фиг. 2.1 с использованием эмпирического закона распределения вида 3. Аппроксимирующая данные прямая линия дает оценки для параметров нормального распределения:

$$\text{Среднее аначение} = \hat{\mu} = 4330 \text{ час}, \quad (2.50)$$
$$\text{Дисперсия} = \hat{\sigma}^2 = (5700 - 4330)^2 = 1370^2 = 188 \cdot 10^4 \text{ час}^2. \quad (2.51)$$

Другая оценка дисперсии по данным графика равна $(4330—-2960)^2 = 1370^2$ $час^2$, что совпадает с (2.51).

2.4д. Логарифмически нормальное распределение. Если $Z = \ln X$ и Z имеет нормальное распределение с параметром положения μ и параметром масштаба σ, то распределение X называют логарифмически нормальным и определяют из соотношения $f_X(\cdot) = f_Z(\cdot)\,|J|$. Якобиан J равен $dz/dx = 1/x$; следовательно, плотность логарифмически нормального распределения имеет следующий вид:

$$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right],\qquad x>0,\quad \sigma>0,\quad (2.52)$$

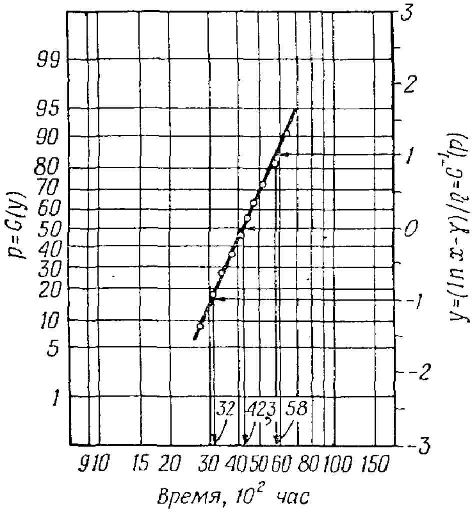
что совпадает с формулой (2.32). Так как $(\ln x-\mu)/\sigma$ можно переписать в виде $\ln[(x/e^{\mu})^{-1/\sigma}]$, то μ будет вести себя как параметр масштаба, а σ — как параметр формы (см. графики на стр. 10 в работе [3]). Можно ввести новый параметр положения τ, задавая плотность логарифмически нормального распределения трехпараметрической функцией:

$$f(x)=\frac{1}{(x-\tau)\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\ln^2\left[\left(\frac{x-\tau}{e^{\mu}}\right)^{-1/\sigma}\right]\right\},x>\tau,\ \sigma>0.\quad (2.53)$$

Тогда формула (2.52) будет частным случаем (2.53) при $\tau=0$. Произведя в (2.53) замену переменной $Y=(x-\tau)/e^{\mu}$, согласно (2.34), получаем нормированную логарифмически нормальную плотность (с параметром формы σ):

$$g(y)=\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}[(\ln y)/\sigma]^2},\quad (2.54)$$

$$y>0,\quad \sigma>0.$$



Фиг. 2.7. Логарифмически нормальное распределение.

Обратная функция G^{-1} не имеет замкнутой аналитической формы решения. Хуже того, для $G^{-1}(p)=y$ нет таблиц. Поэтому нелегко построить вероятностную бумагу для логарифмически нормального распределения, которая позволяла бы проводить графические оценки параметров положения τ и масштаба μ (через e^{μ}) для каждого выбранного значения параметра формы σ. Однако, если известно, что $\tau=0$ или это предполагается, то $\ln X=Z$ по определению является нормально распределенным, и в этом случае можно использовать вероятностную сетку нормального распределения, приведенную на фиг. 2.6, при условии, что случайная величина откладывается по оси абсцисс в логарифмическом масштабе.

Фиг. 2.7 иллюстрирует построение графика по данным фиг. 2.1 с использованием эмпирического закона распределения вида 3 на логарифмически нормальной вероятностной бумаге. Параметр положения τ можно оценить методом последовательных приближений. Если окажется, что «лучшая» линейность достигается в том случае, когда $\hat{\tau}$ вычитают из каждого наблюдения и наносят на график уточненные данные, то $\hat{\tau}$ оценивают как параметр положения. Здесь $\hat{\tau}=0$, и для остальных параметров получаем:

$$\hat{\mu}=\ln 42{,}3=3{,}74,$$

$$\hat{\sigma}=\ln 58-\ln 42{,}3=4{,}06-3{,}74=0{,}32$$

или

$$\hat{\sigma}=\ln 42{,}3-\ln 32=3{,}74-3{,}43=0{,}31.$$

Это позволяет оценить среднее значение и дисперсию:

$$\text{Среднее значение}=\exp\left[\hat{\mu}+(\hat{\sigma}^2/2)\right]=\exp(3{,}79)=44{,}3 \quad (\text{или}\ 4430\ \textit{час}), \tag{2.55}$$

$$\text{Дисперсия}=\exp\left[2(\hat{\mu}+\hat{\sigma}^2)\right]-\left[\exp(\hat{\mu}+\hat{\sigma}^2/2)\right]^2=$$
$$=\exp(7{,}68)-(44{,}3)^2=210\quad [\text{или}\ 210\cdot 10^4\ \textit{час}^2]. \tag{2.56}$$

2.4е. Распределение Гумбеля типа I. Распределение Гумбеля типа I, полученное для наименьшей порядковой статистики выборки, задается формулой (2.24). Плотность распределения Гумбеля типа I имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\eta}\exp\left[\frac{x-\gamma}{\eta}-\exp\frac{x-\gamma}{\eta}\right],\qquad x>\gamma,\quad \gamma>0,\quad \eta>0. \tag{2.57}$$

Применяя соотношения (2.57) и (2.34), получаем нормированную плотность

$$g(y)=\exp\left[y-e^y\right],\qquad -\infty<y<\infty, \tag{2.58}$$

и нормированную интегральную функцию распределения Гумбеля типа I

$$G(y)=1-\exp\left[-e^y\right],\qquad -\infty<y<\infty. \tag{2.59}$$

Полагая $G(y)=p$ и разрешая относительно y, находим

$$y=\ln\left[-\ln(1-p)\right]. \tag{2.60}$$

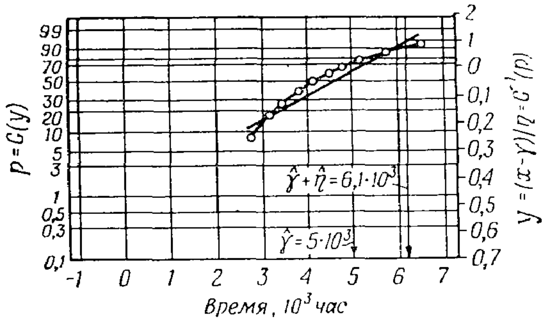
Значения y по формуле (2.60) приведены в табл. [10]. Функцию y получаем из таблиц для

$$Y=-\ln(-\ln\Phi\hat{y}) \tag{2.61}$$

путем замены $1-p$ на $\Phi\hat{y}$. На фиг. 2.8 ось y масштабирована в соответствии с формулой (2.60) и построен график по данным фиг. 2.1 с использованием эмпирического закона распределения вида 3. Если через данные точки провести прямую, то получим оценки параметров положения и масштаба: $\hat{\gamma} = 5000$ *час*, $\hat{\tau} = 6100 - 5000 = 1100$ *час*. Далее находим оценки среднего и дисперсии (используя постоянную Эйлера $C = 0{,}5771\ \ldots$):

$$\text{Среднее значение} = \hat{\gamma} - C\hat{\tau} = 5000 - 0{,}577 \cdot 1100 = 4370 \text{ час}, \quad (2.62)$$

$$\text{Дисперсия} = (\pi^2/6)\,\hat{\tau}^2 = (9{,}9/6) \cdot 1100^2 = 199 \cdot 10^4 \text{ час}^2. \quad (2.63)$$



Фиг. 2.8. Распределение Гумбеля типа I.

2.4ж. Распределение Вейбулла. Если в формуле (2.17) для интегральной функции распределения Вейбулла произвести замену переменной в соответствии с (2.34), то получим

$$G(y) = 1 - \exp[-y^{\beta}], \qquad y > 0, \quad \beta > 0. \quad (2.64)$$

Полагая $G(y) = p$ и разрешая относительно y, находим

$$y = [-\ln(1-p)]^{b}, \qquad b = 1/\beta. \quad (2.65)$$

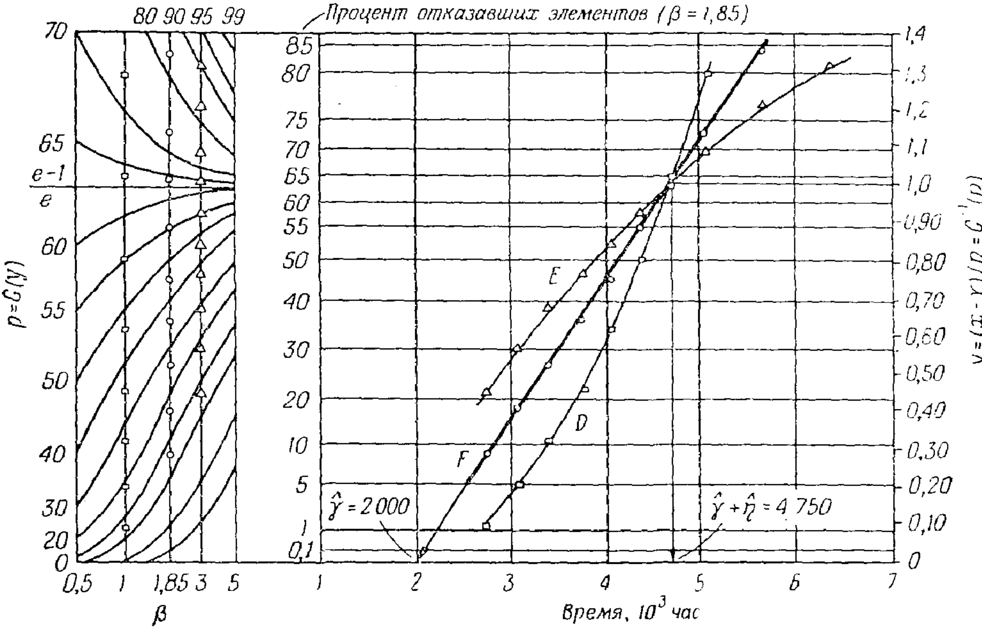
Таблица значений y, рассчитанных по параметру β с помощью формулы (2.65), приведена в работе [11] для $\beta = 0{,}1\,(0{,}1)\,4$. Графики на фиг. 2.9 аналогичны графикам фиг. 5 из [12]. Так как масштабирование оси y, согласно (2.65), зависит от β, то необходимо провести масштабирование для каждого значения β. Для $\beta = 1$ и $\beta = 3$ получаем графики D и E с противоположной кривизной. Методом последовательных приближений находим почти линейную кривую F, соответствующую значению параметра $\beta = 1{,}85$. Продолжая эту кривую вниз, получаем $\hat{\gamma} = 2000$ *час*, $\hat{\tau} = 4750 - 2000 = 2750$ *час*. Следовательно, оценками для среднего и дисперсии будут:

$$\text{Среднее значение} = \hat{\gamma} + \hat{\tau}\Gamma(\hat{b}+1) = 2000 + 2750 \cdot 0{,}888 = 4442 \text{ час}, \quad (2.66)$$

$$\text{Дисперсия} = \hat{\tau}^2[\Gamma(2\hat{b}+1) - \Gamma^2(\hat{b}+1)] = 2750^2\,(0{,}25) = 189 \cdot 10^4 \text{ час}^2. \quad (2.67)$$

Рассмотрим другой метод оценки.

Как было отмечено в разд. 2,3г, распределение Гумбеля типа I можно считать распределением логарифма случайной величины, подчиняющейся закону Вейбулла. Другими словами, если $Z = \ln X$ имеет распределение Гумбеля типа I с параметром положения a и параметром масштаба b, то X распределено по закону Вейбулла с параметром масштаба $\eta = e^a$ и параметром

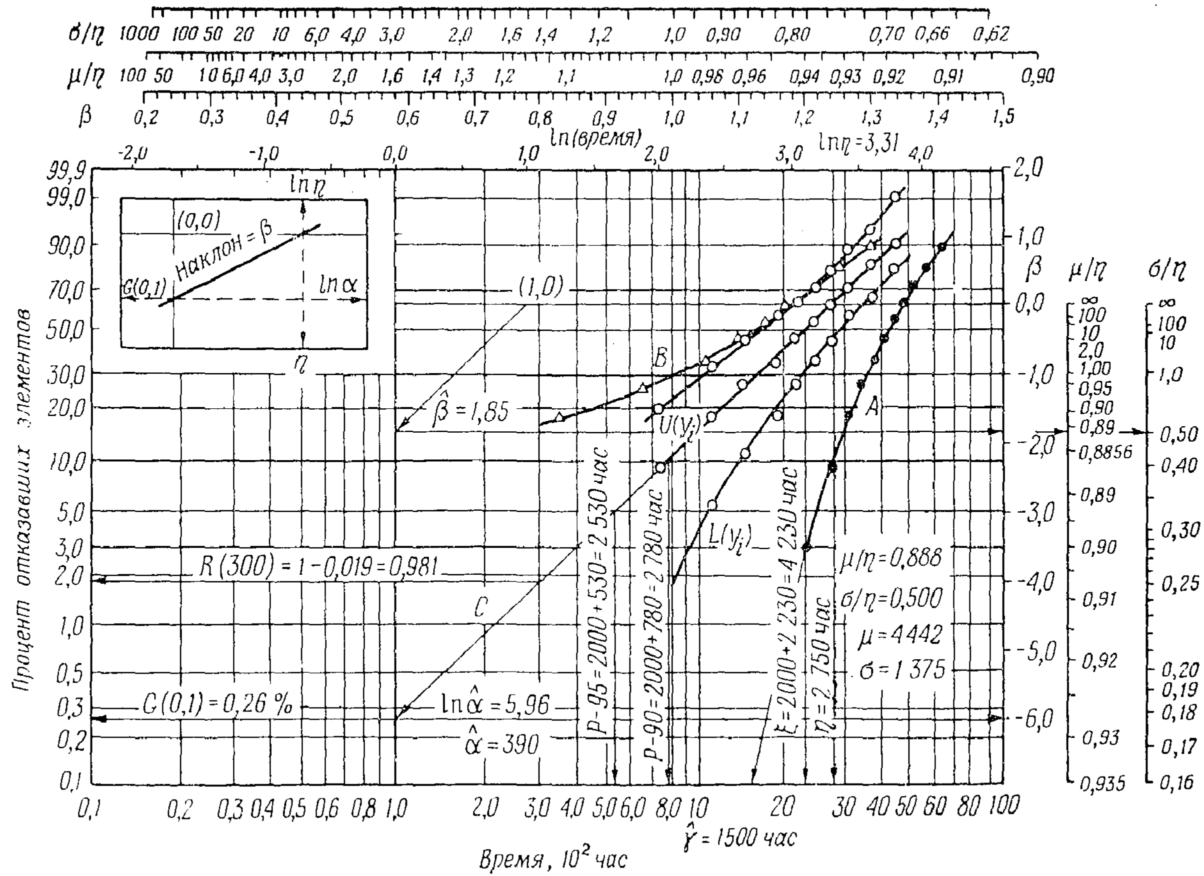


Фиг. 2.9. Распределение Вейбулла (a).

формы $\beta = 1/b$. Как следует из формулы (2.33), это справедливо, так как

$$\exp (z - a)/b = \exp [(\ln x - \ln \eta) \beta] = (x/\eta)^{\beta}. \qquad (2.68)$$

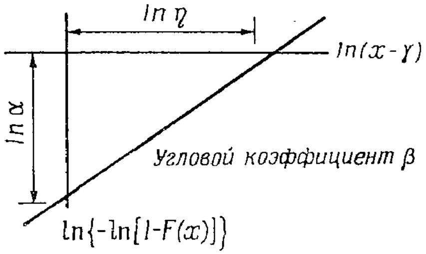
В связи с этим вероятностная бумага для распределения Гумбеля типа I, данная на фиг. 2.8, построена с использованием логарифмической шкалы аргумента. Вероятностная бумага в соответствующем масштабе и с дополнительными шкалами, облегчающими расчет среднего и дисперсии закона Вейбулла, разработана Као [13]. На фиг. 2.10 показаны графики, построенные с использованием данных фиг. 2.1. Кривая A представляет собой график исходных данных, а кривая B — график данных



Фиг. 2.10. Распределение Вейбулла (б).

с учетом вычитания значения $\gamma = 2750$ *час*, полученного методом последовательных приближений.

Кривые A и B имеют противоположную кривизну. Это свидетельствует о том, что истинное значение параметра положения γ лежит где-то между 1500 и 2750 (1500 — точка пересечения кривой A с осью абсцисс при ее продолжении вниз). Методом последовательных приближений для $\hat{\gamma} = 2000$ *час* получим приблизительно прямую линию (кривая C) с оценками $\hat{a} = \ln \hat{\eta} = 3{,}31$, $\hat{\eta} = 2750$ *час*, $\hat{b} = 1/\beta = 1/1{,}85$, т. е. угловой коэффициент $\beta = 1{,}85$. Эти результаты в точности повторяют результаты, полученные первым методом. Као [13] дал более простое объяснение второго метода, которое основано на том, что формулу (2.17) можно переписать, применяя двойное логарифмирование, следующим образом:



Фиг. 2.11.

$$\ln\{-\ln[1-F(x)]\} = -\beta \ln \eta + \beta \ln (x-\gamma) = -\ln \alpha + \beta \ln (x-\gamma). \tag{2.69}$$

Поэтому на вероятностной бумаге с логарифмическим и двойным логарифмическим масштабами функция распределения Вейбулла будет представлена прямой линией. На фиг. 2.11 изображена такая система координат и построен график распределения Вейбулла (прямая линия). При $\beta = 1{,}85$, $\hat{\eta} = 2750$ *час* несложные дополнительные расчеты позволяют оценить ряд других показателей (фиг. 2.10):

Среднее значение = 2000 + 0,888(2750) = 4442 *час*
Стандартное отклонение = 0,5 · 2750 = 1375 *час*
Функция надежности (при $t = 2300$) = $R(2300 - 2000) = R(300) = 1 - 0{,}019 = 0{,}981$
90%-ный ресурс = 2000 + 780 = 2780 *час*
95%-ный ресурс = 2000 + 530 = 2530 *час*
Медиана ресурса = 2000 + 2230 = 4230 *час*
Начальная интенсивность отказов = $26 \cdot 10^{-6}$ *час*$^{-1}$.

Согласно графику $x - \hat{\gamma}$, представленному на фиг. 2.10, начальная интенсивность отказов в последнем примере соответствует моменту времени 2000 *час*. Кривые $L(y_i)$ и $U(y_i)$ являются нижней и верхней доверительными границами для $F(x)$ с коэффициентом доверия 80% (см. [14]).

2.5. ПОЛУЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НАГРУЗКИ ПУТЕМ ОЦЕНКИ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА

Когда говорят, что элемент имеет определенный коэффициент нагрузки, то имеют в виду зависимость долговечности элемента от уровня приложенной нагрузки. Зависимость *долговечности* элемента от *уровня нагрузки* является весьма сложной. В общем (но не всегда) рассчитывают на бóльшую долговечность менее нагруженных элементов. Отсутствие в практических исследованиях точных определений долговечности и коэффициента нагрузки существенно затрудняет анализ данных. В этой главе предлагалось определять долговечность с помощью некоторых моделей долговечности. Ниже будут рассмотрены соотношения между моделью и уровнем нагрузки.

2.5а. Стационарные испытания на долговечность. Из-за простоты анализа данных большинство испытаний принадлежат к этой категории исследований. В этом случае образцы испытываются в условиях нормальной эксплуатации при уровнях нагрузок, идентичных или близких к нормальным. При таком нормальном уровне нагрузок испытания просто копируют реальную эксплуатацию, что не позволяет выявить каких-либо поправочных коэффициентов, учитывающих влияние уровня нагрузки. Несмотря на то что данные таких испытаний позволяют непосредственно оценить надежность, они применимы только к одному уровню нагрузок.

2.5б. Однофакторные испытания на долговечность. К этой группе испытаний принадлежат некоторые из так называемых «ускоренных» испытаний. В этом случае факторы, описывающие приложенную нагрузку, произвольно изменяют, повышая или понижая относительно нормального уровня, но каждый раз изменяется только один фактор группы. Пока один фактор изменяют, другие оставляют неизменными — на нормальном уровне. Такие испытания позволяют решить ряд проблем. Например, если в разрабатываемой аппаратуре предполагается использовать электровакуумные приборы в температурных режимах выше нормального уровня, то можно оценить влияние фактора температуры на долговечность приборов. Температура электронной лампы в этом случае — единственный переменный фактор, влияние которого анализируется. Этот тип испытаний полезен на любом этапе исследования, полезен он и для ускорения испытаний, однако его нельзя считать эффективным.

2.5в. Многофакторные испытания на долговечность. Однофакторные испытания не дают решения проблемы в тех случаях, когда требуется учитывать совместное изменение двух и более факторов. Можно, например, расширить рассмотрение примера предыдущего раздела. Пусть изготовитель аппаратуры вынужден использовать электронные лампы в температурном режиме выше нормального уровня, но он предполагает пожертвовать их выходной мощностью, чтобы получить долговечность на некотором приемлемом уровне. Если это возможно, то насколько нужно снизить выходную мощность?

Здесь рассматриваются два фактора: температура и мощность. На практике встречается и большее число факторов. В этом случае решение проблемы возможно только с помощью многофакторных испытаний на долговечность. В таких испытаниях факторы, влияющие на долговечность, изменяются все сразу и по всем возможным уровням; таким образом оценивается одновременно влияние всех факторов. Планирование таких экспериментов называют факторным (см. гл. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fisher R. A., Tippett L. H. C., Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24**, part 2, 180 (1928). Reprinted in Fischer's Contributions to Mathematical Statistics, Wiley, New York, 1950.
2. Gumbel E. J., Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, New York, 1958; русский перевод: Гумбель Э., Статистика экстремальных значений, изд-во «Мир», 1965
3. Aitchison J., Brown J. A. C., The Lognormal Distribution, Cambridge Univ. Press, London, 1957.
4. Pearson K., Tables of the Incomplete Beta Function, Cambridge Univ. Press, London, 1934.
5. Pearson E. S., Hartley H. O., Biometrika Tables for Statisticians, 2d ed., table 17, Cambridge Univ, Rress, London, 1958 (Hartley and Fitch chart).
6. Blom G., Statistical Estimates and Transformed Beta Variables, Wiley, New York, 1958.
7. Harter H. L., New Tables of the Incomplete Gamma Function Ratio and of Percentage Points of the Chi Square and Beta Distributions, GPO, 1964.
8. Fisher R. A., Yates F., Statistical Tables, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh and London, 1938.
9. Hald A., Statistical Tables and Formulas, Wiley, New York, 1952.
10. Probability Tables for the Analysis of Extreme Value Data, *Natl. Bur. Standards Appl. Math. Ser.*, 22 (1953).
11. Plait A., The Weibull Distribution with Tables, *Indus. Quality Control*, **19**, № 5 (Nov. 1962).
12. Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing based on the Weibull Distribution (Mean Life Criterion), Quality Control and Reliability Tech. Rept. TR-3, Office of the Assistant Secretary of Defense (Installation and Logistics), GPO, 1961.
13. Kao J. H. K., A Summary of Some New Techniques on Failure Analysis, Proc. Sixth Natl. Symp. Reliability Quality Control, 1960, p. 196.
14. Kao J. H. K., The Beta Distribution in R and Q. C., Seventh Natl. Symp. Reliability Quality Control, 1961, p. 496.
15*. Герцбах И. Б., Кордонский И. Б., Модели отказов, изд-во «Советское радио», 1966.
16*. Ушаков И. А., Козлов Б. А., Краткий справочник по расчету надежности радиоэлектронной аппаратуры, изд-во «Советское радио», 1966.
17*. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики, изд-во «Наука», 1965.

ГЛАВА 3

ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ

Д. Деллинджер
David C. Dellinger

U. S. Air Force, Air Force Institute of Technology
Wright-Patterson Air Force Base, Ohio

3.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будет рассмотрена задача выбора оптимального плана испытаний. Эта задача возникает при планировании испытаний на надежность. При ее решении приходится учитывать такие факторы, которые часто плохо определены и которые трудно измерить или оценить. Более того, взаимосвязи этих факторов обычно неизвестны с какой-либо степенью достоверности. В большинстве случаев имеется некоторая информация об этих факторах, и желательно использовать ее, какой бы малой она ни была, при выборе плана испытаний. Ниже будут предложены способы использования любой имеющейся информации при выборе плана испытаний.

Описываемый здесь план испытаний определяет объем испытаний и правила выбора решений, которые используются для установления соответствия надежности группы (партии) изделий некоторому определенному заранее стандарту. Испытания, проводимые с целью оценки надежности данной партии изделий, не рассматриваются. Описываются прежде всего случаи, когда испытания составляют часть процесса принятия решения.

Для промышленности задача выбора плана испытаний не нова. Она встречалась при применении выборочных методов приемки, которые использовались в течение многих лет при статистическом контроле качества. Однако эта задача приобретает дополнительную значимость при использовании методов статистических испытаний для определения надежности. Вообще испытания на надежность обходятся дороже, чем проверка качества, и последствия ошибочного решения часто оказываются гораздо тяжелее. Поэтому с экономической точки зрения важно найти оптимальный или близкий к оптимальному план испытаний.

При определении оптимального плана испытаний возникают трудности, поскольку этот вопрос недостаточно освещен в соответствующей литературе. Тогда как в большей части опубликованных планов испытаний приводятся допущения, на которых основаны эти планы, в них редко подчеркивается то обстоятельство, что для получения достаточно хороших результатов испытаний необходимо определить, уместны ли эти допущения в каждом частном случае. Более того, чаще всего эти планы испытаний даже не дают руководящих указаний потребителю, как определить разумность этих допущений. Без рассмотрения этих важнейших вопросов при выборе плана испытаний можно получить результаты, которые либо бесполезны, либо, что еще хуже, приводят к ошибочным заключениям (см. гл. 9).

В данной главе принята точка зрения, что для правильного выбора плана статистических испытаний необходимо решить три главнейших вопроса: 1) определить партию изделий, при помощи которой будет приниматься решение; 2) определить подходящую модель распределения интервалов времени между отказами и 3) выбрать план испытаний из имеющихся планов, основанных на принятом распределении. Ниже рассматриваются все эти вопросы, и там, где это возможно, предлагаются методы выбора требуемых решений.

Как было упомянуто выше, дать ответы на эти вопросы нелегко. Предлагаемые методы не являются точными и в некоторых случаях даже не позволяют выбрать решение. Однако они дают общее направление для выбора плана испытаний и сосредоточивают внимание на основных сторонах этого процесса.

3.2. ВЫБОР ОДНОРОДНОЙ ПАРТИИ

Большинство стандартных методов, используемых при испытаниях на надежность, основаны на допущении, что наработка на отказ (или среднее время между отказами) для всех изделий в выбранной партии распределена одинаково, т. е. причина отказов одна и та же. Такая партия называется статистически однородной. Практически часто можно отобрать партии, однородные по отношению к наработке на отказ или почти однородные. Вполне уместно допущение, что изделия, изготовленные на одной и той же производственной линии из деталей, получаемых из одного и того же источника, обладают этим свойством. Однако если партия статистически неоднородна, то выводы, основанные на предположении однородности, могут оказаться неверными. Принимая на таком основании решения принять или забраковать изделия, хорошие изделия можно забраковать вместе с плохими, а плохие изделия принять вместе с хорошими.

При испытаниях на надежность вопрос об однородности является главным образом вопросом о причинах отказов, и на него нелегко, а может быть, и невозможно ответить с инженерной точки зрения. Однако разумно ожидать, что причины отказов изделий, изготовленных в основном при одних и тех же условиях и с использованием однородных деталей, будут одинаковыми. При отсутствии одинаковых условий статистической однородности может и не быть. Если, например, изделия конструктивно одинаковы, но изготовлены на разных производственных линиях или на различных предприятиях, то к предположению об однородности следует относиться с осторожностью. Отказы сложных систем, как, например, радиолокационных установок, прошедших несколько циклов отказов и ремонта, могут в дальнейшем подчиняться каким-либо новым закономерностям.

К сожалению, как и в случае выборок из любого неограниченного множества, не существует метода точного определения вида соответствующего распределения или распределений. С точки зрения статистики задача состоит в определении того, можно ли наблюдаемый разброс наработки считать случайным разбросом, которого можно ожидать в случае однородной партии, или следствием нескольких случайных причин (различных закономерностей отказов изделий партии). При некоторых допущениях предложены статистические критерии проверки гипотезы однородности. Если соответствующее распределение нормально, можно воспользоваться стандартными методами проверки, описанными в большинстве руководств по статистике[1]). Метод, который можно использовать в случае экспоненциального распределения, приводится ниже.

При испытаниях на надежность, основанных на гипотезе однородности партии, не следует забывать этой гипотезы, чтобы в результате испытаний получить достоверные выводы. Необходимо остерегаться произвольного смешивания изделий для получения больших партий (и соответствующей экономии при испытаниях). Только при наличии утвердительного ответа на вопрос «Разумно ли ожидать, что изделия обладают одинаковыми закономерностями отказов?» можно смешивать изделия для получения однородных партий.

3.2а. Проверка однородности партий при экспоненциальном распределении. Для проверки однородности партии, составленной из нескольких подгрупп, каждая из которых сама по себе однородна, можно воспользоваться методом, который описан ниже. Если проверка дает отрицательный ответ, т. е. партия неоднородна, можно производить комбинирование подгрупп в меньшие, но однородные партии. Этим методом следует пользоваться только тогда, когда распределение отказов в каждой из подгрупп экспоненциальное. При этом нужно:

---

[1]) См., например, [4*]. — *Прим. ред.*

1. Выделить однородные подгруппы. Все изделия партии разделяются на n подгрупп, каждая из которых считается однородной. Например, все изделия, изготовленные на одной производственной линии или на одном предприятии, относятся к одной подгруппе. Сложные изделия после ремонтов следует относить к различным подгруппам. Бесцельно применять излагаемый метод при отсутствии рациональной основы для разделения изделий на подгруппы.

2. Провести испытания всех подгрупп в течение одного и того же периода времени t. Объем испытаний произволен, однако чем больше выполненный объем испытаний, тем лучше результаты испытаний. Хорошее мнемоническое правило для определения длительности испытаний состоит в выборе такого времени t, чтобы произведение nt равнялось объему испытаний, необходимому для того, чтобы принять или забраковать партию, если бы она была однородной. В случае однородной партии результаты испытаний можно использовать непосредственно для принятия решения принять или забраковать партию изделий (см. пример ниже).

3. Зафиксировать число отказов в каждой подгруппе за время испытаний. Обозначить это число через x_i, где индекс i означает номер подгруппы, $i = 1, 2, \ldots, n$. Перенумеровать подгруппы таким образом, чтобы они расположились в порядке убывания числа отказов, так что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$.

4. Вычислить $D_i = 2\sqrt{x_i + {}^1/_2} - 2\sqrt{x_{i+1} + {}^1/_2}$.

5. Для желаемого уровня значимости и числа участвующих в испытании подгрупп найти критическое значение D из табл. 3.1.

Таблица 3.1

Критические значения D для n подгрупп и уровня значимости α [1]

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha = 0{,}01$	3,64	3,19	3,00	2,71	2,57	2,47	2,39	2,33	2,27	2,23	2,19
$\alpha = 0{,}05$	2,77	2,48	2,28	2,13	2,02	1,93	1,86	1,81	1,76	1,72	1,69

6. Сравнить значения D_i, вычисленные на этапе 4, с критическими значениями D, взятыми из табл. 3.1. Каждое значение D_i, превышающее D, показывает, что подгруппы $1, 2, \ldots, i$ не следует смешивать с подгруппами $i + 1, i + 2, \ldots, n$ для образования одной партии. Если все значения D_i меньше критического значения D, то это указывает на возможность смешивания подгрупп для образования однородной партии.

Пример 3.1

Пусть нужно испытать 10 самолетных радиолокационных станций, чтобы определить, являются ли они однородными с точки зрения надежности. Хотя опыт показывает, что время наработки станций на отказ распределено экспоненциально, можно ожидать, что распределения наработки каждой из станций не обязательно будут иметь одинаковые средние значения. Нужно применить описанный в разд. 3.2а метод для проверки однородности партии из 10 изделий. Если удастся достаточно хорошо обосновать, что наработка станций на отказ распределена экспоненциально, следует воспользоваться описанным ниже планом испытаний, чтобы решить, следует ли принять или забраковать партию. Выбранный план испытаний требует, чтобы каждое из 10 изделий подверглось испытанию в течение 65 *час*, так что всего накопилось бы 650 *час* испытаний. При возникновении неисправностей производится ремонт, и изделия непосредственно после него вновь подвергаются испытанию. Если за время испытаний наблюдается более 30 отказов, вся партия бракуется. В случае 30 или меньшего числа отказов партия принимается. Если нельзя сгруппировать 10 изделий в одну партию, то образуются меньшие партии, которые испытываются в течение 650 *час*, чтобы удовлетворить требованиям к испытаниям.

В данном случае для проверки однородности партии желательно испытывать каждое изделие в течение 65 *час*. Если испытания покажут, что партия однородна, то решение принять или забраковать партию может быть принято непосредственно. В противном случае потребуются дополнительные испытания.

Пусть после испытания каждого изделия в течение 65 *час* получены данные, приведенные в табл. 3.2. Результаты наблюдений расположены в порядке, указанном на этапе 3, изделия соответствующим образом перенумерованы, выполнены вычисления в соответствии с этапами 4 и 5 и полученные данные приведены в двух последних столбцах таблицы.

Таблица 3.2

Данные для примера 3.1

Порядковый номер i	Число отказов x_i	$2\sqrt{x_i + 1/2}$	D_i	Порядковый номер i	Число отказов x_i	$2\sqrt{x_i + 1/2}$	D_i
1	11	6,80	1,36	6	1	2,45	0
2	7	5,44	0,34	7	1	2,45	0
3	6	5,10	1,94 *	8	1	2,45	0
4	2	3,16	0	9	1	2,45	0
5	2	3,16	0,71	10	1	2,45	0

Было принято решение, что желателен уровень значимости 0,05; из табл. 3.1 найдено, что критическое значение D при $n = 10$ равно 1,76. Из табл. 3.2 видно, что $D_3 = 1{,}94$, т. е. превышает критическое значение $D = 1{,}76$. Результаты испытания показывают, таким образом, что нежелательно объединять в одну группу первые три и семь следующих изделий. Однако нет оснований утверждать, что нельзя отнести изделия с 1-го по 3-е в одну группу, а остальные — в другую. Каждую из полученных таким образом двух партий следует испытать отдельно, и для обеих партий могут быть приняты решения принять их или забраковать.

Таблица 3.3

Данные для примера 3.1

Порядковый номер i	Число отказов x_i	$2\sqrt{x_i + 1/2}$	D_i	Порядковый номер i	Число отказов x_i	$2\sqrt{x_i + 1/2}$	D_i
1	11	6,80	1,36	6	1	2,45	0
2	7	5,44	0,76	7	1	2,45	0
3	5	4,68	0,44	8	1	2,45	1,03
4	4	4,24	0,49	9	0	1,42	0
5	3	3,75	1,30	10	0	1,42	0

С другой стороны, пусть при испытаниях получены данные, приведенные в табл. 3.3. Ни одно из D_i не превышает критического значения D, откуда следует, что 10 изделий можно сгруппировать в одну однородную партию.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Следует подчеркнуть, что при выборе модели распределения при испытаниях на надежность необходима большая осторожность. Точность результатов испытаний в большой степени зависит от того, насколько хорошо выбранное распределение вероятностей представляет фактическое распределение наработки на отказ, которое было предметом наблюдений. В этом проявляется отличие от обычных методов статистического контроля качества, которые относительно мало чувствительны к виду фактического распределения. Это обстоятельство подчеркивается потому, что широкое применение экспоненциального распределения как модели отказов часто приводит к заблуждению, что время наработки можно во всех случаях адекватно описать таким распределением.

Экспоненциальное распределение обладает многими удобными математическими свойствами, но его нельзя применять для испытаний на надежность во всех случаях. Использование других распределений вносит в методику испытаний усложнения; однако, чтобы получить из испытаний правильные выводы, необходимо решать возникающие при этом задачи (см. гл. 2).

По-видимому, одной из наиболее подходящих моделей распределения отказов является распределение Вейбулла. Как было указано выше, только теоретическими соображениями нельзя оправдать применение какого-либо частного распределения; однако результаты опытов показывают, что распределение Вейбулла можно согласовать со многими видами отказов путем соответствующего выбора параметра формы. При испытаниях на надежность в качестве моделей применялись также гамма-распределение и нормальное распределение. При выборе любой модели потребитель должен помнить, что точность результатов испытаний зависит от того, насколько хорошо выбранное распределение представляет фактическое распределение.

Определенного метода для выявления фактического распределения не существует; однако можно свести к минимуму опасность неправильного выбора, если использовать всю информацию, относящуюся к процессу испытаний. Следующие меры помогают сделать выбор.

3.3а. Использование имеющихся инженерных сведений. Инженер, хорошо знакомый с испытываемым изделием, часто может сообщить некоторые общие сведения относительно характеристик отказов. Он может, например, указать, целесообразно ли применять в данном случае возрастающую или убывающую функцию интенсивности отказов. Хотя суждения подобного рода и не бывают очень точными, они могут предотвратить грубые ошибки при выборе распределения.

3.3б. Применение графических методов оценки. Если имеются (или могут быть получены) данные испытаний изделия, то можно воспользоваться методами графической подгонки кривых, облегчающими выбор распределения. Например, если распределение Вейбулла является подходящей моделью, то можно воспользоваться описанными в гл. 2 графическими методами для определения параметров, задающих положение и форму распределения. Тогда при испытании можно использовать распределение Вейбулла с одним параметром. При применении такого метода следует помнить, что неявно предполагается идентичность распределения отказов, которое будет использовано, и распределений отказов, наблюдавшихся ранее, за исключением возможного изменения масштабного коэффициента.

3.3в. Применение критериев согласия. Существуют статистические методы, которые можно использовать для проверки качества согласования эмпирического распределения с гипотетическим. Если распределение выбрано при помощи графического или какого-либо иного метода, можно воспользоваться критериями согласия. Легко можно применить два простых критерия согласия, а именно критерий хи-квадрат и критерий Колмогорова — Смирнова [2]. Критерий Колмогорова — Смирнова особенно подходит для случая, когда предполагаемое распределение непрерывно, что обычно и бывает при испытаниях на надежность [1]).

3.3г. Применение непараметрических методов. Если нельзя удовлетворительно определить вид фактического распределения, то можно воспользоваться методами испытаний, не связанными с распределением (иногда их называют непараметрическими); во многих случаях они могут оказаться наилучшими. При использовании непараметрических методов испытаний время t устанавливается таким образом, чтобы оно равнялось времени, в течение которого изделие должно работать в условиях эксплуатации. Благодаря этому время как фактор при испытаниях исключается, так что приходится наблюдать лишь за признаками исправности или отказа. Можно, например, применить метод выборочной приемки Mil-Std-105D [2]). Если время работы велико, такой метод может быть очень дорогим, и в некоторых случаях им даже невозможно воспользоваться. Когда имеются достаточные основания, чтобы подвергнуть сомнению вид фактического распределения, дополнительные расходы, связанные с проведением непараметрических испытаний для получения достоверных результатов могут быть оправданы. Это особенно важно, если результаты испытаний чувствительны к виду распределения (см. анализ испытаний на чувствительность в разд. 3.6).

3.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАБОЧИХ [3]) ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ВЫБОРЕ ПЛАНА ИСПЫТАНИЙ

После того как выбрана модель распределения (или принято решение использовать непараметрические методы испытаний), возникает задача выбора определенного плана испытаний из многих известных. Предполагается, что план испытаний должен быть использован с целью определения, следует ли принять или забраковать данную партию, предназначенную для определенной работы. При выборе плана испытаний нужно определить объем испытаний (число изделий, которые должны быть испы-

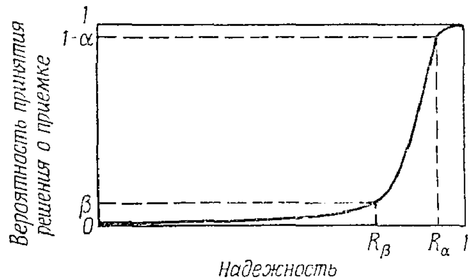
---

[1]) См. также [4*]. — *Прим. ред.*

[2]) Американский военный стандарт, используемый для контроля качества. — *Прим. ред.*

[3]) Часто в литературе по математической статистике используется термин «оперативная характеристика». — *Прим. ред.*

таны, и длительность испытания каждого изделия) и правила принятия решений. Данный план испытаний можно определить путем произвольного выбора нескольких подлежащих проверке параметров; в некоторых случаях стандартные планы испытаний обозначаются в соответствии с произвольно выбранными проверяемыми параметрами. Например, многие программы испытаний обозначаются в соответствии с числом отказов, допускаемых за время испытаний, с числом испытываемых изделий или с наибольшим объемом испытаний, которому подвергается каждое изделие. Такая система обозначений может оказаться удобной, когда практические соображения налагают на перечисленные факторы некоторые ограничения. Однако во многих случаях подобные обозначения могут затушевать основные соображения, определяющие выбор плана испытаний.



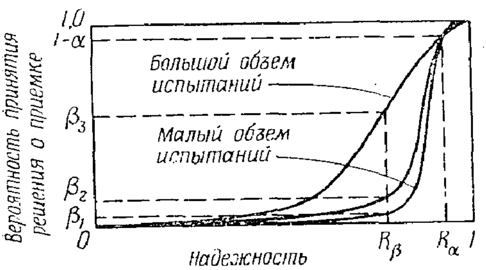
Фиг. 3.1. Типовая рабочая характеристика плана испытаний.

Гораздо лучше при выборе плана испытаний исходить из рабочих характеристик таких планов. Рабочая характеристика плана испытаний указывает вероятность принятия решения о приемке при применении данного плана испытаний к партии, обладающей каким-то данным уровнем надежности. Рассматривая такие рабочие характеристики, можно определить разрешающую способность испытаний, т. е. способность отличать хорошие партии от плохих. Практически во всех случаях перечень планов испытаний снабжается каким-либо видом рабочих характеристик, которые следует использовать при выборе плана испытаний.

График рабочей характеристики плана испытаний представляет зависимость вероятности принятия решения о приемке от фактической надежности подвергаемой испытаниям партии. На фиг. 3.1 представлена типовая рабочая характеристика плана испытаний на надежность. При малых значениях надежности вероятность принятия решения о приемке мала. С увеличением уровня надежности эта вероятность также увеличивается, приближаясь к единице, когда надежность стремится к единице.

Для различения планов испытаний была разработана система определения двух специальных точек на кривой, представляющей рабочую характеристику плана. Эти точки обычно называются: 1) риском производителя (точка R_α, $1-\alpha$ на фиг. 3.1) и 2) риском потребителя (точка R_β, β на фиг. 3.1). Риском производителя α называется вероятность забраковать партию, когда ее фактическая надежность R_α соответствует уровню надежности, который считается приемлемым для данного назначения. Другими словами, он равен вероятности совершить ошибку, нежелательную с точки зрения производителя, а именно забраковать при испытаниях партию изделий удовлетворительного качества. Риск потребителя β равен вероятности принять партию изделий, когда фактическая надежность ее R_β соответствует уровню надежности, который для данного назначения считается неудовлетворительным.

На фиг. 3.2 приведены несколько кривых, представляющих собой рабочие характеристики ряда планов испытаний, которые приводят к одному и тому же риску производителя и к различным значениям риска потребителя. Эти планы испытаний отличаются тем, что для каждого из них требуется выполнение различного объема испытаний. Объем испытаний влияет на уровень риска потребителя. Чем больше объем испытаний, тем меньше риск потребителя при заданном уровне фактической надежности R_β (или тем больше значение фактической надежности R_β при заданном уровне β).



Фиг. 3.2. Рабочие характеристики ряда планов испытаний на надежность.

Планы, требующие большего объема испытаний, обеспечивают лучшее различение между желаемым и нежелательным уровнями надежности. Это различие в разрешающей способности дает важный практический способ выбора планов испытаний, соответствующих различным объемам испытаний. Оно должно быть решающим при выборе программы испытаний. Ценность плана, определяемую через соответствующую возможность различения, можно сопоставить с его стоимостью, характеризуемой длительностью испытаний. Такая точка зрения является наиболее рациональной основой для непосредственного выбора плана испытаний на надежность.

Так как надежность зависит от некоторого времени работы, а также от параметров предполагаемого распределения (при исключении из рассмотрения планов, не связанных с видом распределения), обычно бывает неудобно представлять графики рабочих характеристик в функции от фактической надежности. В литературе рабочие характеристики чаще всего приводятся в функции неизвестного параметра предполагаемого распределения. Так, например, рабочие характеристики планов испытаний, основанных на экспоненциальном распределении, обычно даются в функции от параметра распределения, который представляет среднюю наработку на отказ для данного распределения. В таких случаях необходимо преобразовать желаемую надежность в значение соответствующего параметра для того, чтобы рациональным образом выбрать план.

Практически задачу выбора программы испытаний на основе рабочих характеристик можно сформулировать как задачу выбора на рабочей характеристике двух точек и последующего отыскания плана испытаний, который соответствует полученным требованиям. Обычно бывает желательно рассмотреть несколько планов, чтобы до принятия решения о выборе плана сравнить их по разрешающей способности и стоимости. При этом можно сравнивать увеличение разрешающей способности с увеличением стоимости (из-за увеличения объема испытаний).

3.5. ВЫБОР ПЛАНА ИСПЫТАНИЙ С ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

В разд. 3.4 было указано, что наилучший метод выбора определенного плана испытаний основывается на сравнении рабочих характеристик известных программ испытаний. Однако использование рабочих характеристик еще не приводит к полному решению задачи выбора плана. Необходимо сопоставить каким-то рациональным образом степень разрешающей способности, обеспечиваемую планом и характеризуемую рабочими характеристиками, со стоимостью выполнения этого плана испытаний в данном частном случае. Вообще говоря, чем лучше программа испытаний обеспечивает возможность различать партии, обладающие допустимыми и недопустимыми характеристиками, тем больший объем испытаний приходится выполнять и, следовательно, тем выше стоимость испытаний. С экономической точки зрения задачу выбора плана испытаний можно рассматривать как задачу установления некоторого равновесия между уровнем лучшей разрешающей способности и стоимостью увеличенного объема испытаний.

Если испытания должны осуществляться таким образом, чтобы можно было принять решение либо отвергнуть либо использовать партию изделий для определенной цели, то при выборе плана испытаний могут помочь методы теории решений. Вообще говоря, эти методы неприменимы в тех случаях, когда испытания производятся для того, чтобы определить, достигнута ли заданная степень надежности. В основе этих методов лежит критерий минимизации суммы стоимости испытаний и ожидаемой стоимости действий, к которым приводят результаты испытаний. Интуитивно это означает, что если выбирать одинаковым образом планы для многих испытаний, то средняя стоимость окажется минимальной при длинной серии испытаний. Определение стоимости действий, которые должны быть предприняты в будущем, основано на экстраполяции и точность полученного результата зависит от точности экстраполяции.

При применении методов теории решений к выбору плана испытаний с экономической точки зрения необходимо предсказать будущие расходы, вытекающие из принятого решения, и сделать некоторые допущения относительно априорного распределения надежности испытуемого устройства. Во многих случаях можно грубо оценить оба упомянутых фактора, но редко оказывается возможным получить их точные оценки. Описанный здесь в общих чертах способ дает возможность использовать данные о каждом из этих факторов в процессе выбора плана испытаний. При этом, конечно, рассматриваются лишь общие сведения; однако это лучше, чем игнорирование любых сведений, относящихся к рассматриваемым факторам.

3.5а. Общее описание метода теории решений. Вообще говоря, теория решений определяет оптимальную организацию эксперимента и правила выбора решения, когда истинные обстоятельства, к которым будет применяться решение, неизвестны. Рассматриваемая нами задача относится к более простому случаю, так как выбор плана испытаний стандартного вида определяет одновременно и организацию эксперимента, и правило выбора решений при наличии только двух альтернатив. Последствия любого решения будут зависеть от истинной надежности и предпринятого действия. Если при заданной надежности можно приписать определенную стоимость последствиям любого решения, то задача состоит в выборе плана испытаний, который минимизировал бы ожидаемую стоимость эксперимента и вытекающих из него действий. Обычно для упрощения задачи стоимость определяют как потери и план испытаний выбирается на основе минимума ожидаемых потерь. Ниже приводится более точная постановка задачи. Пусть

d_1 — решение принять партию;
d_2 — решение забраковать партию;
R — истинная надежность партии;
$L(d_i, R)$ — потери при принятии решения d_i при данном значении R;
$p(d_i|R)$ — вероятность решения d_i при данном значении R;
$s(t)$ — стоимость проведения испытаний в зависимости от t;
t — требуемый объем испытаний.

Заметим, что функция $p(d_i|R)$ представляет рабочую характеристику испытаний, так как она представляет вероятность принятия решения о приемке партии в зависимости от истинной надежности. Так как имеются только два вида решений, то

$$p(d_2 | R) = 1 - p(d_1 | R).$$

Средние потери при произвольном значении R и для данного плана испытаний равны

$$M\{L | R\} = \sum_{i=1}^{2} L(d_i, R)\, p(d_i | R) + s(t).$$

Это выражение иногда называют функцией риска. Для определения полной величины средних потерь необходимо знать априори распределение величины R, которое будем обозначать через $p(R)$. Полная величина средних потерь в дискретном случае равна[1])

$$M\{L\} = \sum_{R} \sum_{i=1}^{2} L(d_i, R)\, p(d_i | R)\, p(R) + s(t).$$

Проиллюстрируем применение приведенных соображений на упрощенном примере. Пусть R может принимать лишь два значения R_1 и R_2, и известно, что $p(R_1) = 0{,}8$ и $p(R_2) = 0{,}2$. Предположим также, что средние стоимости для этих случаев и решений такие, как даны в табл. 3.4. Так как при состоянии R_1 наилучшим решением является d_1, то стоимость можно уменьшить

Таблица 3.4

Величины стоимостей

Решение	Состояния	
	R_1	R_2
d_1	50 долл.	160 долл.
d_2	60 долл.	60 долл.

Таблица 3.5

Величины потерь

Решение	Состояния	
	R_1	R_2
d_1	0 долл.	100 долл.
d_2	10 долл.	0 долл.

не более чем на 60 долл. — 50 долл. = 10 долл. Обычно эту величину называют потерей, или стоимостью принятия ошибочного решения при состоянии R_1. Величины потерь получаются путем вычитания наименьшей стоимости для каждого состояния из стоимости других решений для этого состояния. Величины потерь указаны в табл. 3.5. Если стоимость выражается

[1]) $M\{L|R\}$ и $M\{L\}$ называют условным риском и средним риском соответственно. См., например, [5*]. — *Прим. ред.*

линейной функцией числа изделий n, подвергаемых испытаниям, например $s(t) = n/10$, то полная средняя стоимость равна

$$M\{L\} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} L(d_i, R_j)\, p(d_i \mid R_j)\, p(R_j) + \frac{n}{10},$$

что можно представить в виде

$$M\{L\} = 0 \cdot p(d_1 \mid R_1)\, 0{,}8 + 100 p(d_1 \mid R_2)\, 0{,}2 + \\ + 10 p(d_2 \mid R_1)\, 0{,}8 + 0 \cdot p(d_2 \mid R_2)\, 0{,}2 + \frac{n}{10} = \\ = 20 p(d_1 \mid R_2) + 8 p(d_2 \mid R_1) + \frac{n}{10}.$$

Предположим, что для всех видов испытаний, из которых нужно выбрать один, $p(d_2|R_1) = 0{,}05$ и $p(d_1|R_2)$ имеет значения, приведеные в табл. 3.6, где даны также вычисленные средние потери для каждого плана испытаний. В соответствии с критерием минимума средних потерь наилучшим из приведенных в табл. 3.6 видов испытаний, очевидно, является третий.

Таблица 3.6

Потери для возможных планов

Номер испытания	Объем выборки	$p(d_1 \mid R_2)$	$M\{L\}$, долл.	Номер испытания	Объем выборки	$p(d_1 \mid R_2)$	$M\{L\}$, долл.
1	10	0,20	5,40	4	25	0,03	3,50
2	15	0,10	3,90	5	30	0,02	3,80
3	20	0,05	3,40 [1]	6	40	0,01	4,60

[1]) Наилучший вид испытаний.

Для применения метода теории решений к рассматриваемой задаче необходимо знать функцию потерь и априорное распределение надежности. На практике эти функции известны не всегда. Действительно, они редко бывают известны с такой степенью точности, какая приведена в рассмотренном примере. Может возникнуть желание вообще отказаться от идеи метода решения, основанного на знании таких неопределенных величин; однако в защиту метода теории решений как общего метода решения задачи можно привести много доводов, в частности отсутствие лучшего метода. По-видимому, наилучшей из альтернатив является непосредственный выбор рабочей характеристики на основе опыта, интуиции или суждения. Вообще говоря, метод теории решений сосредоточивает внимание при решении задачи выбора плана испытаний на существенных обстоятельствах и дает способ введения в формулы экономических и априорных сведений при принятии решения. Верно, что трудно или даже вообще невозможно получить точные оценки стоимости или априорного распределения, но более желательным представляется введение грубых оценок существенных величин, чем точных оценок несущественных величин.

3.5б. Определение функции потерь. Хотя на практике и могут встретиться значительные затруднения при получении точных экономических характеристик, определяющих функцию потерь, в принципе их можно избежать. Действительно, можно получить разумные оценки этих стоимостей, воспользовавшись принципами технической экономики. Главной задачей является исключение второстепенных затрат и выявление разностей в затратах, которые возникают при выборе двух взаимоисключающих возможностей. Следует рассматривать лишь затраты, возникающие как следствие решения, принятого в результате испытаний. Благодаря этому сразу исключается из рассмотрения стоимость изготовления партии как несущественная затрата. Если принять такую точку зрения, то становится ясным, что для получения соответствующих оценок необходимо знать все действия, которые последуют после принятия каждого решения. В частности, нужно определить следующие стоимости:

1. Стоимость отказа изделия, находящегося в условиях эксплуатации.
2. Стоимость решения забраковать изделие.
3. Стоимость испытаний, представленная в виде функции некоторой степени объема испытаний, предусматриваемого планом испытаний.

Из определения надежности как «вероятности успешной работы» можно видеть, что последствия принятия решения о приемке включают вероятность отказа и, следовательно, затраты, которых можно ожидать в результате подобного отказа. Приращение надежности можно тогда оценить как уменьшение средней стоимости из-за отказа. Таким образом, если по оценке стоимость отказа равна M, то функция средних потерь при решении о приемке партии будет $(1 - R)M$. В случае оценки стоимости решения о приемке возникают затруднения при попытке оценить стоимость отказа. Для этого нужно знать или иметь возможность оценить последствия отказа и действия, которые будут произведены при отказе.

Например, если отказ определенного устройства приведет к разрушению ракеты и ракету придется заменить другой, то минимальная стоимость отказа будет равна стоимости замены. Эта стоимость является минимальной, потому что она не учитывает возможной стоимости задержки получения резервной ракеты, стоимости приобретения и т. д. В других случаях отказ может вызвать лишь необходимость непредусмотренного ремонта и уменьшение времени исправности устройства. В подобных случаях следовало бы рассматривать увеличение стоимости непредусмотренного ремонта или снижение дохода, если оно имеет место.

При эксплуатации стоимость отказа иногда можно оценить, рассмотрев стоимость обслуживания потребителя. Во всех случаях отказов, по-видимому, всегда имеют место нежелательные последствия, которые нельзя свести к экономике. Это нередко бывает при экономических исследованиях; такие последствия следует считать неоцениваемыми и учитывать субъективно при принятии окончательного решения.

В некоторых случаях определение стоимости решения забраковать партию изделий может оказаться не очень затруднительным. Если точно известны действия, которые придется произвести после принятия такого решения, то можно определить соответствующую стоимость. Например, если партию можно переработать или переделать каким-либо образом, который обеспечит ее использование, то стоимость переделки можно считать соответствующей стоимостью. Чаще, однако, забракованные партии приходится выбрасывать и заменять новыми изделиями; тогда стоимость решения забраковать партию может быть значительной. Соответствующей стоимостью в этом случае является стоимость выполнения соглашения. Она представляет стоимость изготовления и использования новой партии. Очевидно, что в данном случае стоимость зависит от будущих решений принять или забраковать изделия и надежности партии, которая принимается для данного соглашения.

Существуют методы, которые могут применяться в подобных случаях; однако эти методы предполагают точное знание априорного распределения R и допущения о стационарности процесса. Так как рассматриваемый здесь метод использует лишь общую информацию об этих факторах, то стоимость решения забраковать партию следует оценивать непосредственно. Средняя стоимость зависит от: 1) изменяющейся стоимости изготовления партии для замены, 2) надежности принятой партии и 3) принятого плана испытаний. Изменяющаяся стоимость изготовления всегда является элементом полной стоимости, и, следовательно, ею можно воспользоваться как нижней границей стоимости решения забраковать партию. Остальные элементы зависят от надежности изготовленной партии и стремятся к нулю, если надежность приближается к единице. Если надежность высока, то изменяющаяся стоимость изготовления может представлять соответствующую оценку стоимости решения забраковать партию.

Следует оценить стоимость проведения испытаний. Так как обычно задача состоит в определении объема испытаний, а не в решении вопроса, производить испытания или нет, то следует учитывать лишь увеличение стоимости, связанное с расширением объема испытаний. Было бы неправильным учитывать среднюю стоимость, отнесенную к одному испытываемому изделию, или среднюю стоимость одного часа испытаний, если при усреднении рассматривались постоянные стоимости, имеющие место независимо от объема испытаний.

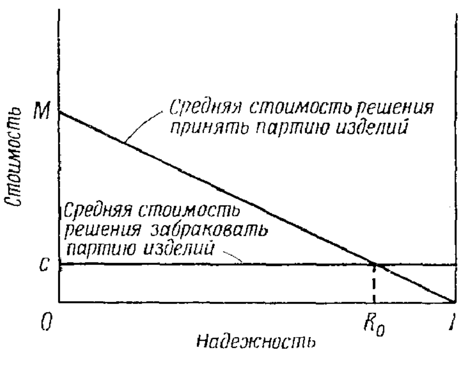
3.5в. Выбор априорного распределения. Гораздо более трудную задачу представляет выбор адекватного априорного распределения, и, по-видимому, это обстоятельство и является основной причиной, ограничивающей применение теории решений для решения задач этого рода. Если соответствующая стоимость или априорное распределение неизвестны, то приходится производить выбор обычным образом, т. е. на основе интуиции, суждений и т. п. Однако во многих случаях некоторые сведения о распределении рассматриваемого параметра имеются. Действительно, многие планы статистической выборки основаны на оценке среднего. Следует отметить, что при наличии каких-либо данных об априорном распределении теория решений дает возможность учесть их в процессе выбора. По-видимому, лучше принимать решения на основе любых имеющихся данных, даже если они незначительны, чем игнорируя их.

При принятии решений можно располагать данными об априорном распределении из нескольких источников. Чаще всего это результаты предыдущих испытаний такого же изделия. Другим источником подобных сведений может быть рассчитанная надежность устройства, состоящего из нескольких элементов, надежность которых известна. В подобных случаях может быть целесообразно допустить такое априорное распределение, при котором расчетная надежность заключена в интервале, основанном на анализе системы. Модели возрастания надежности в некоторых случаях могут дать информацию, на которой можно обосновать оценку априорного распределения. Хотя все перечисленные источники информации неидеальны, но это все же лучше, чем отсутствие информации. Конечно, чем лучше информация, тем лучше выбор вида испытаний.

3.5г. Модель. При рассмотрении способа выбора плана использована упрощенная модель стоимости. Предположено, что: 1) стоимость отказа известна; 2) стоимость решения забраковать партию известна и является линейной функцией числа изделий в партии; 3) стоимость испытаний представляет известную линейную функцию некоторого параметра испытаний, например объема выполняемых испытаний, числа испытываемых изделий или числа наблюденных отказов; 4) испытанные изделия возвращаются в партию или без дополнительных затрат заменяются изделиями, обладающими такой же надежностью, как изделия партии. Пусть:

M — стоимость отказа принятого изделия в эксплуатации;
c — стоимость решения забраковать партию, отнесенная к одному изделию;
s — стоимость испытаний, отнесенная к одной единице соответствующего параметра испытаний;
N — число изделий в партии,
n — некоторый параметр, линейно связанный со стоимостью испытаний, например число испытываемых изделий, число часов испытаний или число отказов, наблюдаемых за время испытания;
R — фактическая надежность испытываемой партии (неизвестная).

Функция стоимости при такой модели изображена на фиг. 3.3. Из рассмотрения этой функции легко можно увидеть, что стоимость будет минимальной, если браковать все партии, фактическая надежность которых меньше R_0, и принимать все партии, фактическая надежность которых больше R_0. Величина R_0 называется граничной надежностью. Можно легко показать, что в случае рассматриваемой модели $R_0 = 1 - (c/M)$.



Фиг. 3.3. Функция стоимости для модели, описанной в разд. 3.5 г.

Функция потерь, т. е. зависимость потерь от фактической надежности, для нашей модели равна

$$L = NM(R - R_0) + ns \quad \text{при} \quad R > R_0,$$

$$L = NM(R_0 - R) + ns \quad \text{при} \quad R < R_0.$$

Функция потерь выражает потери, возникающие при принятии ошибочного решения для какого-либо заданного уровня надежности. Можно считать функцию потерь пропорциональной вероятности принятия ошибочного решения для каждого значения R; получившуюся величину средних потерь можно графически представить как функцию R. Такой график, называемый кривой риска, можно построить для каждого вида испытаний, для которого имеется рабочая характеристика. Описываемый ниже способ основан на использовании этих характеристик при выборе плана испытаний.

Планы испытаний на надежность могут быть заданы двумя величинами, а именно объемом испытаний, подлежащих выполнению, и точкой на рабочей характеристике. Эти величины не являются независимыми, но в общем случае справедливо утверждение, что объем испытаний определяет разрешающую способность (общий наклон рабочей характеристики), а точка на рабочей характеристике задает горизонтальное положение характеристики. При этом способе выбора плана испытаний за исходную точку произвольно выбирается точка на рабочей характеристике. Для нескольких планов испытаний, рабочие характеристики которых проходят через эту точку и не требуют различных объемов испытаний, производится сравнение кривых риска. На основании этого сравнения выбирается определенный план испытаний, который соответствует априорным сведениям о фактической надежности.

3.5д. Выбор плана испытаний. В этом разделе описывается общий способ выбора плана испытаний, основанный только на общих сведениях об априорном распределении надежности. Предполагается, что определен вид фактического распределения времени наработки на отказ, сделана оценка параметров *стоимости* M, c *и* s *и имеется набор планов испытаний*, из которых следует выбрать один. Предполагается также, что рассмотренная выше модель дает соответствующее представление фактической структуры стоимости, присущей данной задаче. Следует подчеркнуть, что описываемый здесь способ должен служить лишь общим указанием направления процесса выбора. Вследствие самого характера рассматриваемой задачи невозможно без излишне большого упрощения изложить более детально и определенно этот способ.

Первый шаг при выборе состоит в уменьшении числа рассматриваемых планов испытаний. С этой целью выбирается подмножество планов испытаний, которые соответствуют основным практическим ограничениям, свойственным ситуации, как, например, ограничение времени, которое может быть отведено для испытаний, и число изделий, которые можно подвергнуть испытаниям и для которых вероятность решения о приемке равна 0,50 при фактической надежности R_0 (граничная надежность). Эти планы должны иметь такой вид, чтобы их можно было обозначить в соответствии со значением параметра испытаний, определяющим их стоимость.

Выбор точки 0,5, соответствующей значению R_0 на рабочей характеристике, совершенно произволен. Опыт показал, что для данной модели и при выборе этой точки в качестве исходной при определении плана испытаний получается более «равномерное» распределение риска. Если априорные данные о надежности показывают возможность минимизации риска в некоторых *диапазонах надежности, то может оказаться целесообразным* выбор других точек. Это обстоятельство учитывается на последнем этапе рассматриваемой процедуры выбора.

Второе обстоятельство, т. е. обозначение планов в соответствии со значением параметра, связанного со стоимостью испытания, может оказаться более трудной задачей при отсутствии группы планов, снабженной уже индексами несколькими различными способами. Очень часто рабочие характеристики плана испытаний определяются с помощью известной функции нескольких параметров, так что можно, зафиксировав значение одного параметра, изменять другой параметр. Например, при планах испытаний, основанных на экспоненциальном распределении, сумма длительности испытаний всех испытуемых изделий непосредственно связана с рабочими характеристиками этого плана. Таким образом, можно зафиксировать либо число испытываемых изделий, либо объем испытаний каждого изделия и *изменять второй из этих параметров*, чтобы получить ряд планов испытаний, имеющих разные рабочие характеристики. Очень часто можно найти планы, снабженные индексами в соответствии со значениями одного из этих параметров, причем значение второго параметра поддерживается постоянным. Во всяком случае, для рационального выбора плана необходимо иметь возможность сравнивать стоимости всех испытаний.

Чтобы можно было сравнивать планы для каждого из выбранных *на первом этапе планов, нужно вычислить риск*. Эти вычисления следует проводить в следующем порядке:

1. Определить опорные точки. Сначала нужно найти величину $R_0 = 1 - (c/M)$ и выбрать опорные точки таким образом, чтобы плотность их была больше вблизи R_0. Кривая риска изменяется быстро около точки R_0 и стабилизируется в точках, удаленных от R_0. Вследствие этого вблизи точки R_0 желательно иметь много опорных точек.

2. Определить потери для этих выбранных опорных точек (см. разд. 3.5г).

3. На основании рабочих характеристик определить вероятность принятия ошибочного решения (т. е. вероятность решения забраковать партию при надежности, превышающей R_0, или вероятность решения о приемке при вероятности, меньшей R_0 (для каждого из планов).

4. Определить полный риск для каждой точки. Изменяющаяся часть риска (произведение величин, найденных на эта-

пах 2 и 3) прибавляется к стоимости испытаний для каждой из опорных точек.

5. Вычертить кривые риска. Построить кривые риска для выбранных наборов планов для того, чтобы можно было указать наиболее экономные планы. Например, может оказаться желательным построение трех кривых, соответствующих наибольшей, наименьшей и средней стоимостям испытаний, для того, чтобы получить стоимость испытаний, близкую к оптимальной. Затем строятся кривые для планов испытаний, стоимость которых попадает в область оптимальности, определяемую по первым вычерченным кривым. Таким образом можно выбрать наилучший план.

Затем следует произвести выбор плана на основании совместного рассмотрения кривых риска и априорных данных о распределении надежности. В процессе выбора можно исключить из рассмотрения все доминирующие планы испытаний, т. е. планы, имеющие бóльший риск для всех значений надежности по сравнению с каким-либо планом. Затем из оставшихся можно выбрать план, приводящий к меньшему риску для диапазона значений надежности, который представляется наиболее вероятным в соответствии с субъективной оценкой априорного распределения. Если в результате такого рассмотрения несколько планов оказываются приблизительно эквивалентными, выбирается план испытаний, требующий наименьших затрат на проведение испытаний. Для подобного выбора невозможно дать набор правил; приведенные ниже примеры иллюстрируют рекомендуемый способ.

Наконец, если выбранная кривая риска не имеет желаемого вида, то можно построить кривые риска для нескольких других планов испытаний, которым соответствуют одна и та же стоимость испытаний, но различные значения вероятности ошибки α. Как видно в случае примера 3.3, основная масса значений риска при этом сдвигается к другим значениям надежности. Тогда можно выбрать план, минимизирующий риск в требуемом диапазоне значений надежности.

Пример 3.2

Проиллюстрируем применение описанного в разд. 3.5д способа выбора на следующем примере. Предположим, что задача состоит в выборе плана испытаний с целью определения экономических характеристик партии из 100 изделий. Принято решение, что в качестве модели распределения времени наработки можно воспользоваться экспоненциальным распределением и что стоимостные соотношения адекватно представляются рассмотренной в разд. 3.5д моделью стоимостей. Параметры стоимости оценены как $M = 1000$ долл., $c = 100$ долл. и $s = 10$ долл. Предполагается, что при эксплуатации изделие должно работать без отказов на протяжении периодов в 55 *час*. По практическим соображениям нужно выработать решение о поведении партии за время, не превышающее 120 *час*. При необходимости можно подвергнуть испытаниям все изделия и стоимость испытаний считать практически линейной функцией числа испытуемых изделий. Стоимость восстановления неисправных изделий и приведения их в исходное состояние незначительна.

Первым шагом является выбор совокупности планов испытаний, соответствующих практическим условиям данного примера. В справочнике Н-108 [3] приведены планы испытаний, которые заканчиваются в наперед заданное время. Так как установлен предельный срок окончания испытаний, то представляется желательным использование этого вида испытаний. В табл. 2С-2(е) на стр. 2.49 справочника Н-108 содержится 180 планов испытаний требуемого вида, причем все они соответствуют риску производителя $\alpha = 0{,}50$. Кроме того, эти планы можно обозначить в соответствии с числом подвергаемых испытаниям изделий, которое в данном случае непосредственно связано со стоимостью испытаний. Эти планы обозначены также в соответствии с отношением максимального времени испытаний T и значения параметра θ_0, среднего времени наработки, соответствующего точке 0,50 на рабочей характеристике.

Для того чтобы найти подмножество планов испытаний, для которых вероятность приемки при значении надежности R_0 равна 0,50, необходимо определить значение параметра θ_0, соответствующее R_0, и затем значение T/θ_0, соответствующее данному случаю. Для рассматриваемой модели

$$R_0 = 1 - \frac{c}{M} = 1 - 100/1000 = 0{,}9,$$

а экспоненциальное распределение представляется выражением

$$R_0 = e^{-55/\theta_0},$$

что дает соответствующее значение параметра $\theta_0 = 525$ *час*. Отношение T/θ_0 равно $120/525 = 0{,}238$. Тогда из табл. 2С-2(е) можно выбрать те планы испытаний, для которых это отношение равно примерно 0,238. Из этой таблицы были выбраны 12 планов, требующих объема выборки 100 и меньше. В первом столбце табл. 3.7 приведены обозначения, определяющие рабочие характеристики, соответствующие этим планам. Выбором данного набора планов завершается первый этап процедуры выбора.

Таблица 3.7

Планы испытаний, выбранные в примере 3.2

Обозначение	Объем выборки	Предельное число отказов	Отношение T/θ_0	Обозначение	Объем выборки	Предельное число отказов	Отношение T/θ_0
E-2	8	2	0,210	E-8	32	8	0,240
E-3	12	3	0,223	E-9	36	9	0,241
E-4	16	4	0,230	E-10	40	10	0,242
E-5	20	5	0,234	E-11	60	15	0,244
E-6	24	6	0,236	E-12	80	20	0,246
E-7	28	7	0,238	E-13	100	25	0,247

Следующий этап состоит в вычислении риска для выбранных планов испытаний и вычерчивании кривых для упрощения выбора плана. Результаты этих вычислений приведены в табл. 3.8. Ниже даются пояснения вычислений, которые следует выполнить, чтобы получить приведенные данные.

Столбец (а). Опорные точки выбраны вблизи точки $R_0 = 0{,}90$. Кривые риска имеют большую крутизну около точки R_0 и медленнее изменяются в точках, удаленных от R_0.

Столбец (б). В справочнике Н-108 рабочие характеристики приводятся как функции отношения t/θ_0, причем $R_0 = e^{-t/\theta_0}$. В этом столбце указаны величины этого отношения для значений надежности, выбранных в качестве опорных точек. Это отношение может быть использовано для определения вероятности приемки при выбранных значениях надежности, приведенных в столбце (г).

Столбец (в). В этом столбце приведены потери в долларах для каждого из значений надежности, выбранных в качестве опорных точек. Эти потери получаются при принятии ошибочного решения при каждом из значений надежности. Функция потерь рассмотрена в разд. 3.5г.

Столбец (г). В этом столбце приведены значения вероятности ошибочного решения, определенные для каждого плана из рабочих характеристик. Это вероятность выбора решения о приемке при фактической надежности, меньшей R_0, и вероятность выбора решения забраковать партию при фактической надежности, большей R_0.

Столбец (д). Произведение числа из столбца (в) и числа из столбца (г) дает средние потери, или риск, для данного плана за исключением стоимости испытаний. Это произведение приводится здесь для каждого из рассматриваемых планов.

Таблица 3.8

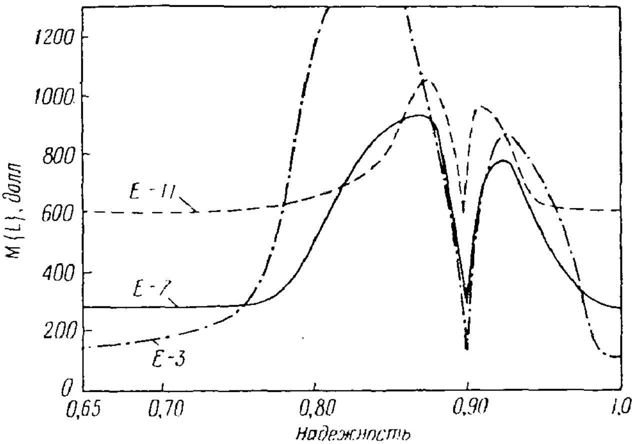
Результаты вычислений риска для планов испытаний на надежность в примере 3.2 [1])

Выбранные опорные точки, надежность	Отношение θ/θ_0	Потери в долларах	План Е-3 объем выборки 12, предельное число отказов 3, *стоимость испытаний* 120 долл.			План Е-7 объем выборки 28, предельное число отказов 7, *стоимость испытаний* 280 долл.			План Е-11 объем выборки 60, предельное число отказов 15, *стоимость испытаний* 600 долл.			План Е-5 объем выборки 20, предельное число отказов 5, *стоимость испытаний* 200 долл.			План Е-9 объем выборки 36, предельное число отказов 9, *стоимость испытаний* 360 долл.		
(а)	(б)	(в)	(г)	(д)	(е)	(г)	(д)	(е)	(г)	(д)	(е)	(г)	(д)	(е)	(г)	(д)	(е)
1,000	∞	10 000	0,0	0	120	0,0	0	280	0,0	0	600	0,0	0	200	0,0	0	360
0,975	4,20	7 500	0,03	225	345	0,01	75	355	0,0	0	600	0,01	75	275	0,0	0	360
0,950	2,10	5 000	0,14	600	720	0,05	250	530	0,005	25	625	0,08	400	600	0,03	150	510
0,925	1,40	2 500	0,30	750	870	0,20	500	780	0,12	300	925	0,24	600	800	0,17	425	785
0,910	1,10	1 000	0,44	440	560	0,40	400	680	0,36	360	960	0,42	420	620	0,39	390	750
0,900	1,00	0	0,50	0	120	0,50	0	280	0,50	0	600	0,50	0	200	0,50	0	360
0,890	0,91	1 000	0,47	470	590	0,40	400	680	0,34	340	940	0,42	420	620	0,39	390	750
0,875	0,80	2 500	0,35	875	995	0,26	650	930	0,18	450	1050	0,30	750	950	0,23	577	937
0,850	0,65	5 000	0,28	1400	1520	0,12	600	880	0,04	200	800	0,14	700	900	0,08	400	760
0,800	0,50	10 000	0,10	1000	1120	0,02	200	480	0,005	50	650	0,04	400	600	0,01	100	460
0,750	0,36	15 000	0,01	150	270	0,0	0	280	0,0	0	600	0,0	0	200	0,0	0	360
0,700	0,30	20 000	0,005	100	220	0,0	0	280	0,0	0	600	0,0	0	200	0,0	0	300
0,600	0,21	30 000	0,0	0	120	0,0	0	280	0,0	0	600	0,0	0	200	0,0	0	360

[1]) Столбцы (а) — (в) не нуждаются в пояснении. Столбцы (г) содержат вероятность принятия ошибочного решения при применении данного плана и при значении надежности, приведенном в столбце (а). В столбцах (д) приведена изменяющаяся часть риска, полученная перемножением чисел, содержащихся в столбцах (в) и (г). В столбцах (е) указан полный риск, т. е. сумма значений, приведенных в столбцах (г) и (д).

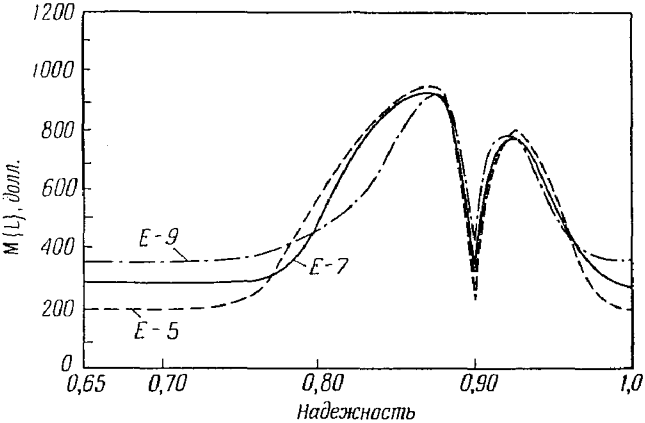
Столбец (е). В этом столбце указан полный риск для каждого значения надежности, выбранного в качестве опорной точки. Он равен сумме стоимости испытаний и числа, стоящего в столбце (д).

Сравнение величин полного риска не указывает на очевидное преимущество какого-либо плана по сравнению с другими; вследствие этого для получения приблизительно оптимального

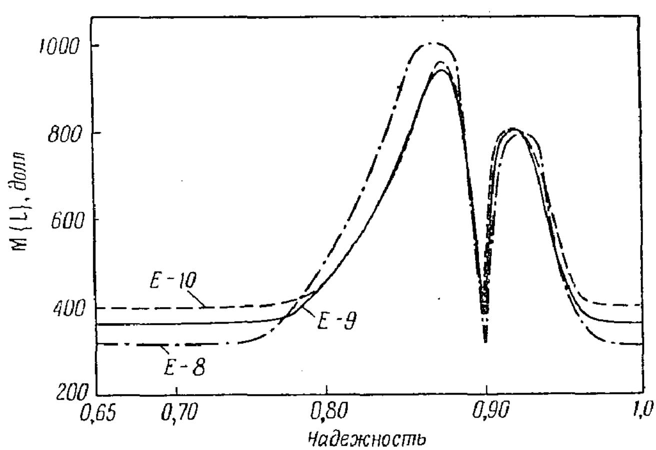


Фиг. 3.4. Кривые риска для планов испытаний Е-3, Е-7 и Е-11 из примера 3.2.

плана были построены кривые, изображенные на фиг. 3.4. Точный анализ этих кривых основан, конечно, на априорных данных о распределении фактической надежности. В рассматриваемом примере предположим, что все значения надежности, превышающие 0,6, равновероятны и что вероятность фактической надежности, меньшей 0,6, пренебрежимо мала. В таком случае скорее всего будет выбран план с объемом выборки, близким к объему выборки плана Е-7. Из изображенных на фиг. 3.5 кривых риска, соответствующих планам Е-5, Е-7 и Е-9, видно, что план испытаний Е-9 может оказаться близким к оптимальному. Для более точного выбора были построены кривые риска для планов Е-8, Е-9 и Е-10 (фиг. 3.6). Рассмотрение этих кривых показывает, что план Е-8 уступает планам Е-9 и Е-10. При сравнении планов Е-9 и Е-10 не выявляется явного преимущества одного из них. Однако план Е-9, несомненно, может рассматриваться как один из оптимальных планов. При наличии данных о фактической надежности, которая, конечно, отличается от предположенной выше, можно прийти к другому заключению. Например, если бы была уверенность, что фактическая надежность имеет значение, лежащее в интервале от 0,9



Фиг. 3.5. Кривые риска для планов испытаний Е-5, Е-7 и Е-9 из примера 3.2.

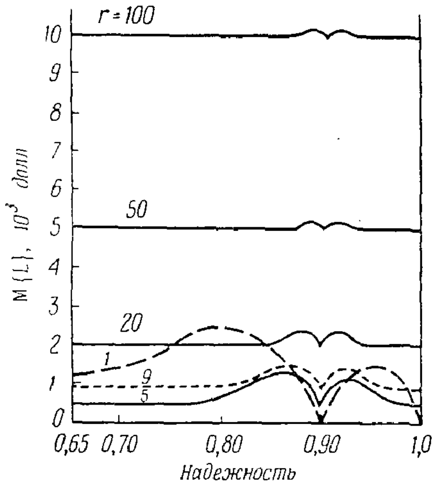


Фиг. 3.6. Кривые риска для планов испытаний Е-8, Е-9 и Е-10 из примера 3.2.

до 1,0, то, по всей вероятности, возникло бы желание минимизировать риск, соответствующий этому диапазону значений надежности. Это можно сделать, изменив значение α. Указанное обстоятельство иллюстрирует пример 3.3.

Пример 3.3

В этом примере предполагается, что стоимость отказа изделия при эксплуатации равна 1000 долл., а стоимость решения забраковать его составляет 100 долл. Рассматривается партия, состоящая из 100 изделий; имеются необходимые условия для того, чтобы при желании можно было испытать всю партию. С испытаниями связан лишь один вид стоимости, соответствующий отказу испытуемого изделия. Эта стоимость составляет 100 долл. на отказ; в нее входит стоимость восстановления отказавшего изделия до первоначального состояния (или замены его). После окончания испытаний все изделия возвращаются в состав партии и используются таким же образом, как и остальная часть партии. Предполагается, что наработка на отказ имеет экспоненциальное распределение. Принципиальное различие между рассматриваемым и предыдущим примером состоит в том, что стоимость испытаний связана с другим параметром. В этом примере также проиллюстрирован последний этап процедуры выбора, а именно проверка при различных значениях α.

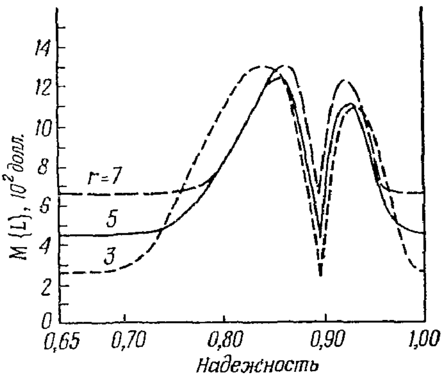


Фиг. 3.7. Кривые риска для планов испытаний, рассмотренных в примере 3.3.

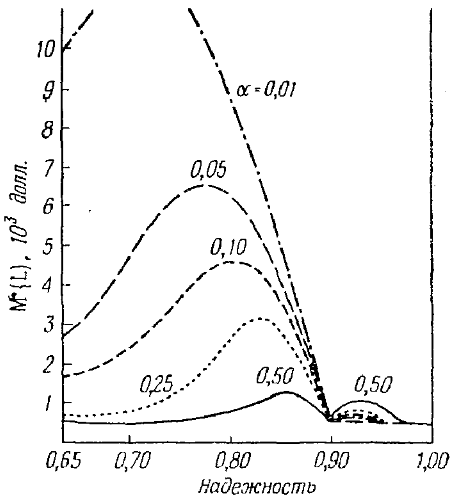
В табл. 2В-1 справочника Н-108 приведены 90 планов испытаний, которые заканчиваются после определенного числа отказов. Такой вид испытаний применяется потому, что стоимость испытаний связана с числом отказов. Процесс построения кривых риска такой же, как и в примере 3.2, и здесь проиллюстрирован не будет.

Анализ изделия как системы показал, что надежность больше 0,85 гарантируется с весьма высокой вероятностью. Поэтому априори предполагается, что значения надежности лежат в диапазоне от 0,85 до 1,0.

На фиг. 3.7 представлены кривые риска для некоторых видов испытаний, причем для всех $\alpha = 0{,}50$. Задача состоит в выборе такого значения числа отказов r (и соответствующей разрешающей способности и стоимости), которое минимизирует риск в рассматриваемом интервале. Рассмотрение этих кривых показывает непосредственно, что все испытания, для которых r больше или равно 9, можно исключить из рассмотрения, так как риск для всех значений R меньше всего у испытания, для которого $r = 5$. Можно сказать, что испытание, для которого $r = 5$, преобладает над другими. Различие между испытаниями с $r = 1$ и $r = 5$ не так явно выражено. Можно было бы выбрать испытание с $r = 5$, так как оно предпочтительнее испытания с $r = 1$ в большей части рассматриваемого диапазона. На осно-



Фиг. 3.8. Кривые риска для планов испытаний, рассмотренных в примере 3.3, в растянутом масштабе.



Фиг. 3.9. Кривые риска для планов с одинаковой стоимостью испытаний, но с разным риском производителя (пример 3.3).

вании приведенных кривых можно прийти к надежному выводу, что наилучшим видом испытания в данном случае было бы испытание со значением $r \approx 5$. На фиг. 3.8 представлены кривые риска для $r = 3$ и $r = 7$, а также для $r = 5$ в растянутом масштабе. Из этих кривых нельзя определить наилучший вид испытаний, и для решения об окончательном выборе приходится исходить из других соображений. Необходимо подчеркнуть, что предлагаемый способ выбора сузил область возможных способов до довольно малой совокупности и значительно уменьшил вероятность грубой ошибки при выборе.

По выполнении этой части исследования может оказаться желательным посмотреть, не окажется ли более подходящим некоторое другое значение риска производителя α. Для этого были вычерчены кривые, приведенные на фиг. 3.9, для планов испытаний, соответствующих одному и тому же предельному числу отказов, при котором заканчиваются испытания, но разным значениям α. Так как априорные данные о распределении надежности показывают, что с весьма большой степенью вероятности надежность лежит в интервале 0,80—1,00, то, по-видимому, можно удовлетвориться планом, для которого $\alpha = 0{,}50$. Однако если была бы уверенность, что надежность больше 0,90, то, возможно, был бы выбран план, для которого $\alpha = 0{,}01$. (При надежности выше предельной необходимость испытаний становится сомнительной.)

Вообще главным преимуществом подобного способа выбора плана является то обстоятельство, что рабочие характеристики представляются с помощью экономических понятий и дают больше информации для выбора плана, чем обычные рабочие характеристики. При выборе плана испытаний могут быть использованы сведения о распределении R. Хотя предлагаемый способ выбора не всегда приводит к оптимальному плану испытаний, он указывает на подмножество планов, в котором содержится и оптимальный, что значительно упрощает задачу выбора и практически исключает вероятность грубых ошибок при выборе. Очевидно, что применение этого способа требует больших затрат времени и труда. Однако, если стоимости велики, как это обычно бывает при испытаниях на надежность, эти затраты вполне оправдываются.

3.6. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Довольно часто бывает невозможно определить с приемлемой степенью точности факторы, необходимые для выполнения предлагаемого исследования. Может оказаться, например, что стоимость можно оценить лишь широким интервалом значений, а не одним числом или что сведения для определения вида фактического распределения отсутствуют. В таких случаях для определения факторов, к которым чувствителен процесс выбора или диапазона таких значений фактора, которые приведут к выбору по существу одного и того же плана испытаний, можно воспользоваться методом анализа чувствительности. Такой метод анализа часто оказывается более практичным, чем метод, связанный с отысканием точных оценок стоимостей или значений параметра распределения, который требует больших затрат труда. Данный раздел посвящен краткому рассмотрению анализа чувствительности.

При отсутствии уверенности в точности оценок стоимости можно определить чувствительность способа выбора плана испытаний к величине стоимости. Предположим, например, что в примере 3.2 принята оценка стоимости решения забраковать партию, равная 100 долл. Однако с таким же правом можно принять любую оценку между 50 и 200 долл. Чтобы воспользоваться анализом чувствительности в данном случае, нужно дважды повторить весь процесс выбора: один раз — при оценке 50 долл. и второй — при оценке 200 долл. Если прямые стоимости проведения испытаний, принятые при этих трех оценках, приблизительно одинаковы, то можно прийти к заключению, что процесс выбора относительно мало чувствителен к величине стоимости. Таким образом, можно, без сомнения, использовать выбранный план испытаний, хотя и нет большой уверенности в точности оценки стоимости решения забраковать партию, на которой основан выбор.

Если нет уверенности в оценке стоимости и невозможно указать диапазон значений стоимости, который можно считать интервальной оценкой, применяют анализ чувствительности для определения того диапазона значений, при котором выбранным планам испытаний соответствует по существу одинаковая стоимость. Предположим, например, что, как и в предыдущем случае, нет уверенности в правильности оценки стоимости решения забраковать изделия, равной 100 долл., которая была принята при выборе плана, и невозможно оценить интервал значений этой стоимости. Целесообразный метод решения такой задачи состоит в выполнении процесса выбора плана с использованием нескольких значений стоимости для того, чтобы определить диапазон значений, при которых стоимость плана испытаний остается по существу постоянной. Если этот диапазон велик, то можно, без сомнения, применять данный план испытаний, хотя и нет уверенности в правильности одной из оценок стоимости, использованной в процессе выбора.

Анализом чувствительности можно также воспользоваться и тогда, когда имеются сомнения в правильности предполагаемого распределения наработки на отказ. Подобный анализ можно выполнить независимо от того, производится ли выбор непосредственно с помощью рабочих характеристик или на основе экономических соображений, как предложено в разд. 3.5. Вообще говоря, как показано на предыдущих примерах, метод состоит в определении чувствительности процесса выбора плана к различным допущениям относительно распределения времени наработки на отказ.

Чтобы получить полезные результаты, желательно охарактеризовать различные распределения при помощи значений некоторого непрерывного параметра. Это легко сделать, если в качестве общей модели принять распределение Вейбулла с нулевым значением параметра положения. Различные распределения можно ввести путем изменения параметра формы. Использование в качестве общей модели распределения Вейбулла целесообразно потому, что с его помощью можно охарактеризовать большое число различных закономерностей отказов (включая и экспоненциальную). Распределение Вейбулла рассмотрено в гл. 2.

Если выбор плана испытаний производится на основе рабочих характеристик или риска производителя — потребителя, то анализ сводится к определению влияния на выбор плана различных значений параметра формы. Однако анализ следует выполнять на основе фактической надежности, а не с учетом лишь масштабного коэффициента. Планы испытаний, у которых масштабный коэффициент относительно нечувствителен к изменению предполагаемого распределения, могут оказаться крайне чувствительными при учете влияния фактической надежности. Иногда имеет место и обратный случай.

Как и следовало ожидать, анализ чувствительности при выборе плана испытаний на основе кривых риска по существу представляет повторение процесса выбора для нескольких значений параметра формы. На основе таких повторных выборов можно определить, каким образом изменяется стоимость испытаний в зависимости от выбранного параметра. Если стоимость нечувствительна к изменениям значения параметра формы, то в процессе выбора плана испытаний можно ограничиться грубой его оценкой. Однако если стоимость испытаний чувствительна к значению этого параметра, то следует приложить дополнительные усилия для получения разумных оценок параметра формы или воспользоваться более дорогими методами непараметрических испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. David H. A., The *Ranking of Variance in Normal Population, J. Am. Statist. Assoc.*. **51** (1956).
2. Massey F. J., Jr., The Kolmogorov — Smirnov Test for Goodness of Fit, *J. Am. Statist. Assoc.*, **51**, 68—78 (March, 1956).
3. Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing (Based on Exponential Distribution), Quality Control and Reliability Handbook (Interim), H-108, Office of the Assistant Secretary of Defense (Sypply and Logistics), GPO, 1960.
4*. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, изд-во «Наука», 1965.
5*. Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, книга вторая, изд-во «Советское радио», 1968.
6*. Базовский И., Надежность. Теория и практика. Перевод с английского под ред. Б. Р. Левина, изд-во «Мир», 1965.

ГЛАВА 4

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ

О. Б. Моун

О. В. Моап

Professor of Engineering, Arizona State University Tempe, Arizona

4.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Определение. Множеством называется совокупность объектов, каждый из которых обладает некоторым свойством, которое можно положить в основу определения любого объекта множества.

Определение. Отдельные объекты множества называются *элементами множества.*

Обозначения. $a \in A$ означает, что a является элементом множества A; $a \notin A$ означает, что a не принадлежит множеству A.

Пример 4.1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ означает, что множество A состоит из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Следовательно, $2 \in A$, но $8 \notin A$.

Пример 4.2. $A = \{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ означает, что множество A состоит из точек, удовлетворяющих ограничению $0 \leqslant x \leqslant 1$. Поэтому $^3/_4 \in A$, но $^3/_2 \notin A$.

Определение. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов (пример 4.1), и *бесконечным* в противном случае (пример 4.2).

Определение. Пустым называется множество ϕ, которое не содержит ни одного элемента.

Определение. Множество Ω называется *основным* или *полным*, если оно содержит все рассматриваемые элементы.

Определение. Если каждый элемент множества A_1 входит в множество A_2, множество A_1 называется *подмножеством* A_2, что обозначается как $A_1 \subset A_2$.

Примечание. Пустое множество ϕ служит подмножеством любого множества. Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3$, то $A_1 \subset A_3$.

Пример 4.3. Пусть $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тогда $A_1 \subset A_2$, так как каждый элемент A_1 принадлежит также A_2.

Определение. Два множества *равны*, если оба содержат одни и те же элементы. Если $A_1 \subset A_2$ и $A_2 \subset A_1$, то $A_1 = A_2$.

Определение. Суммой (объединением) $A_1 \cup A_2$ двух множеств A_1 и A_2 называем множество, которое содержит все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A_1 и A_2, т. е. $x \in (A_1 \cup A_2)$ означает, что $x \in A_1$, или $x \in A_2$, или и тому и другому[1]).

Определение. Произведением (пересечением) $A_1 \cap A_2$ двух множеств A_1 и A_2 называем множество, которое содержит все элементы, входящие и в A_1 и в A_2, т. е. $x \in (A_1 \cap A_2)$ означает, что $x \in A_1$ и $x \in A_2$.

Примечание. Если $A_1 \subset A_2$ и $A_3 \subset A_2$, то $(A_1 \cup A_3) \subset A_2$ и $(A_1 \cap A_3) \subset A_2$.

Пример 4.4. Пусть $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $A_2 = \{3, 4, 5, 6\}$. Тогда

$$A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

и

$$A_1 \cap A_2 = \{3, 4\}.$$

Определение. Разностью $A_2 - A_1$ множеств A_1 и A_2 называется совокупность тех элементов A_2, которые не содержатся в A_1; так, $x \in (A_2 - A_1)$ означает, что $x \in A_2$ и $x \notin A_1$ (иногда вместо $A_2 - A_1$ пишут $A_2 \setminus A_1$. — *Прим. ред.*). Если A_2 — основное множество, то множество $(A_2 - A_1)$ называется *дополнением* A_1 и обозначается $\bar{A}_1$.

Примечание. $A_1 - A_1 = \phi$ и $A_1 - \phi = A_1$. Операции сложения и умножения множеств по определению

1) ассоциативны:

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3,$$
$$A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3;$$

2) коммутативны:

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1,$$
$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1;$$

3) дистрибутивны:

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3),$$
$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3).$$

Пример 4.5. Пусть $\Omega = \{a, b, c, d, e)$, $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{a, c, d\}$. Закон эквивалентности:

$$\begin{array}{ll}
A_1 \cup \Omega = \Omega & A_1 \cup \Omega = \{a, b, c, d, e\} = \Omega, \\
A_1 \cup \phi = A_1 & A_1 \cup \phi = \{a, b\} = A_1, \\
A_1 \cap \Omega = A_1 & A_1 \cap \Omega = \{a, b\} = A_1, \\
A_1 \cap \phi = \phi & A_1 \cap \phi = \text{Нет элементов} = \phi.
\end{array}$$

---

[1]) Аналогично определяется сумма любого числа множеств: если A_i — произвольные множества, то $\bigcup_i A_i$ — совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_i. — *Прим. ред.*

Закон равномощности:

$$A_1 \cup A_1 = A_1 \qquad A_1 \cup A_1 = \{a,\ b\} = A_1,$$
$$A_1 \cap A_1 = A_1 \qquad A_1 \cap A_1 = \{a,\ b\} = A_1.$$

Закон дополнения:

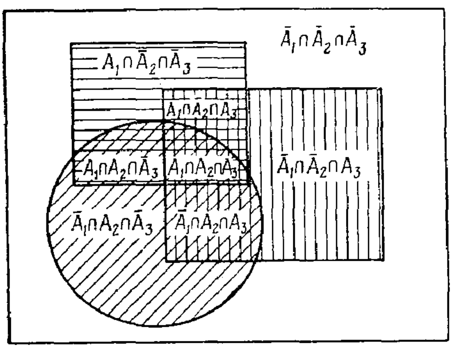
$$\bar{\bar{A}}_1 = A_1 \qquad \bar{A}_1 = \{c,\ d,\ e\},\ \text{т. е.}\ \bar{\bar{A}}_1 = \{a,\ b\} = A_1,$$
$$A_1 \cup \bar{A}_1 = \Omega \qquad A_1 \cup \bar{A}_1 = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\} = \Omega,$$
$$A_1 \cap \bar{A}_1 = \phi \qquad A_1 \cap \bar{A}_1 = \text{Нет элементов} = \phi.$$

Принцип двойственности:

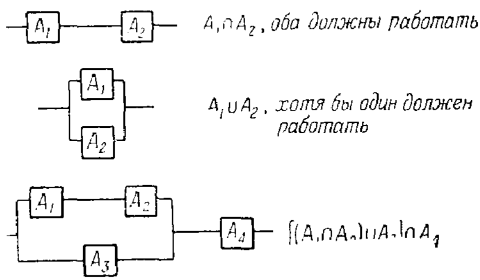
$$\overline{A_1 \cap A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \qquad \bar{A}_1 = \{c,\ d,\ e\}, \quad \bar{A}_2 = \{b,\ e\},$$
$$A_1 \cap A_2 = \{a\}, \quad \overline{A_1 \cap A_2} = \{b,\ c,\ d,\ e\},$$
$$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 = \{b,\ c,\ d,\ e\} = \overline{A_1 \cap A_2},$$
$$\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \qquad A_1 \cup A_2 = \{a,\ b,\ c,\ d\}, \quad \overline{A_1 \cup A_2} = \{e\},$$
$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \{e\} = \overline{A_1 \cup A_2}.$$

Алгебраические соотношения теории множеств иллюстрирует фиг. 4.1.

Пример 4.6. Пусть A_i означает работоспособное состояние, а $\bar{A}_i$ — отказ в работе. Алгебра множеств используется для интерпретации в смысле надежности различных видов соединения элементов.



Фиг. 4.1. Алгебра множеств. Полное множество Ω представлено в виде большого прямоугольника, множества A_1, A_2 и A_3 заштрихованы горизонтальными, наклонными и вертикальными линиями соответственно.



4.2. ВЕРОЯТНОСТЬ

Вероятность представляет меру правдоподобия появления случайного события. Между теорией вероятностей и теорией множеств существует следующая связь. Выборочное пространство рассматривается как основное множество; элементы пространства — выборочные точки; события — подмножества выборочного пространства.

Определение. Выборочное пространство называется *дискретным*, если оно содержит лишь конечное или счетное число выборочных точек.

Пример 4.7. Конечное дискретное выборочное пространство. При запуске трех ракет возможны следующие исходы — элементарные события: УУУ, УУН, УНУ, НУУ, УНН, НУН, ННУ и ННН, где У означает успешный запуск, Н — неудачный.

Пример 4.8. Дискретное выборочное пространство с бесконечным (счетным) числом выборочных точек. Из бесконечно большой партии сопротивлений поочередно выбираются образцы до тех пор, пока не будет найден дефектный. Все элементарные события поочередно описываются следующим образом: Д, ХД, ХХД, ХХХД, где Д — означает дефектное сопротивление, Х — хорошее сопротивление.

Определение. Выборочное пространство называется *континуальным*, если оно содержит несчетное бесконечное число выборочных точек.

Пример 4.9. Континуальное выборочное пространство. Множество S всех положительных действительных чисел, отражающих возможные исходы при испытании на надежность:

$$S = \{\text{Действительное число } x\colon 0 < x < \infty\}.$$

Определение (классическое). Если событие может осуществиться лишь N несовместимыми и равновозможными способами и только n из них благоприятствуют событию A, то вероятность события A равна n/N и обозначается как $P(A) = n/N$.

Пример 4.10. Имеется партия, содержащая 100 триодов, из которых 5 — неисправные. Только 5 из 100 возможных выборов наугад одного из триодов закончатся выбором неисправного триода. Следовательно, вероятность выбора неисправного триода равна 5/100 = 0,05.

Определение (статистическое). Если в серии из n испытаний событие A осуществляется f_A раз и дробь f_A/n стремится к пределу P с ростом n, то P обозначает вероятность события A.

Определение (математическое). Задано выборочное пространство S, содержащее события E_i. *Вероятностью* называют неотрицательное число $P(E_i)$, связанное с событием E_i.

Вероятность обладает следующими свойствами:

1) $P(E_i) \geqslant 0$ для каждого события $E_i \subset S$,

2) $P\left(\sum\limits_{\text{все } E_i \subset S} E_i\right) = 1$ для достоверного события.

Примечание. $\sum\limits_{\text{все } E_i \subset S}$ обозначает сумму всех $E_i \subset S$.

3) $P(E_i \cup E_j) = P(E_i) + P(E_j)$, если $E_i \cap E_j = \phi$. (Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.)

Теорема. $P(\phi) = 0$, т. е. вероятность невозможного события равна нулю.

Теорема. $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, т. е. сумма вероятности того, что событие произойдет, и вероятности того, что событие не произойдет, равна единице.

Теорема. Для любых двух событий E_1 и E_2 вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них, получаем по формуле

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Примечание. Для n событий

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(E_i \cap E_j) + \\ + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(E_i \cap E_j \cap E_k) + \ldots + \\ + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n). \quad (4.1)$$

Пример 4.11. Рассмотрим пример с бросанием двух игральных костей. Какова вероятность того, что выпадет хотя бы шесть очков? Пусть E_1 означает событие выпадения шести очков при бросании кости 1, а E_2 — при бросании кости 2. Тогда в соответствии с формулой (4.1)

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Пример 4.12. Предположим, что отказ элемента вызван отказом полупроводникового триода или резистора, а возможно — их совместным отказом. Пусть $P(E_\text{Т})$ — вероятность отказа триода, а $P(E_\text{Р})$ — вероятность отказа резистора, тогда

$$P\,(\text{отказа элемента только из-за триода}) = P(E_\text{Т}) - P(E_\text{Т} \cap E_\text{Р}),$$

$$P\,(\text{отказа элемента из-за отказа триода и резистора}) = P(E_\text{Т} \cap E_\text{Р}).$$

Теорема. Для двух несовместных событий E_1 и E_2

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Примечание. Для n несовместных событий вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них, равна

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1} P(E_i). \quad (4.2)$$

Пример 4.13. Игральная кость подбрасывается один раз. Какова вероятность того, что выпадет четыре или шесть очков? Пусть $P(E_1)$ — вероятность выпадения четырех очков, а $P(E_2)$ — вероятность выпадения шести очков. Тогда

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Определение. Пусть E_1 — некоторое событие из выборочного пространства S, такое, что $P(E_1) \neq 0$, а E_2 — любое событие также из S. *Условная вероятность* события E_2 при условии, что произошло событие E_1, определяется как

$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}. \qquad (4.3)$$

Примечание. В силу симметрии

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}.$$

Пример 4.14. Рассмотрим агрегат, состоящий из двух узлов A_1 и A_2. В результате испытаний было получено, что:

$$P\ (\text{отказа } A_1) = 0{,}05,$$
$$P\ (\text{отказа } A_2) = 0{,}10,$$
$$P\ (\text{отказа } A_1 \cap A_2) = 0{,}02.$$

Используя (4.3), найдем условные вероятности

$$P\ (\text{отказа } A_1 \text{ при условии отказа } A_2) = 0{,}02/0{,}10 = 0{,}20,$$
$$P\ (\text{отказа } A_2 \text{ при условии отказа } A_1) = 0{,}02/0{,}05 = 0{,}40.$$

Теорема. Для любых двух событий E_1 и E_2

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\, P(E_2 | E_1) = P(E_2)\, P(E_1 | E_2).$$

Примечание. Для n событий $E_1, E_2, \ldots, E_n$, у которых $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) > 0$, справедливо соотношение

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\, P(E_2 | E_1)\, P(E_3 | E_1 \cap E_2) \ldots$$
$$\ldots P(E_n | E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1}). \qquad (4.4)$$

Пример 4.15. В партии реле 2 из 10 дефектные. Вероятность того, что в выборке, состоящей из двух реле, не окажется дефектного реле, равна произведению вероятности того, что первое выбранное реле хорошее, и вероятности того, что второе выбранное реле хорошее при условии, что первым было выбрано хорошее реле:

$$P = \left(\frac{8}{10}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right) = \frac{28}{45}.$$

Пример 4.16. Проверка реле осуществляется путем испытаний случайной выборки. Используя данные примера 4.15, определим, какова вероятность того, что второе дефектное реле будет обнаружено при третьем выборе? Пусть Д означает дефектное реле, а Х — хорошее; индексы 1, 2, 3 показывают очередность выбора. Из формул (4.2) и (4.4)

$$P\,(\text{второе дефектное реле обнаружено при третьем выборе}) =$$
$$= P(\text{Х}_1)\,P(\text{Д}_2|\text{Х}_1)\,P(\text{Д}_3|\text{Д}_2\cap\text{Х}_1) + P(\text{Д}_1)\,P(\text{Х}_2|\text{Д}_1)\,P(\text{Д}_3|\text{Д}_1\cap\text{Х}_2) =$$
$$= \left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2}{45}.$$

Определение. Два события E_1 и E_2 *независимы*, если

$$P(E_1|E_2) = P(E_1) \quad \text{и} \quad P(E_2|E_1) = P(E_2).$$

Теорема. Два события E_1 и E_2 независимы тогда и только тогда, когда $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$.

Примечание. Три события E_1, E_2 и E_3 называются взаимно независимыми, если они попарно независимы и выполняется еще четвертое условие, т. е.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\,P(E_2),$$
$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1)\,P(E_3),$$
$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2)\,P(E_3),$$
$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)\,P(E_2)\,P(E_3).$$

Теорема. Вероятность совместного осуществления n независимых событий $E_1, E_2 \ldots, E_n$ равна произведению вероятностей каждого из событий

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\,P(E_2)\ldots P(E_n). \tag{4.5}$$

Примечание. События $E_1, E_2, \ldots, E_n$ независимы, если

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i)\,P(E_j),$$
$$P(E_i \cap E_j \cap E_k) = P(E_i)\,P(E_j)\,P(E_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\,P(E_2)\ldots P(E_n)$$

для любой комбинации индексов $1 \leqslant i < j < k \ldots \leqslant n$.

Пример 4.17. Теорему и формулу (4.5) обычно называют «правилом умножения» и часто используют при анализе надежности. Предположим, что система состоит из трех подсистем, для которых известны вероятности успешного выполнения поставленной задачи в течение времени t:

$$P_1 = e^{-\lambda_1 t}, \quad P_2 = e^{-\lambda_2 t}, \quad P_3 = e^{-\lambda_3 t}.$$

Тогда вероятность успешного выполнения задачи всей системой получаем как

$$P\ (\text{успеха}) = P_1 P_2 P_3 = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,t}$$

в предположении, что подсистемы независимы и что задача должна быть выполнена всеми тремя подсистемами.

Теорема (Байеса). Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — совокупность несовместных событий, составляющих все выборочное пространство, а E — произвольное событие из этого пространства, причем $P(E) \neq 0$. Для любой пары событий F_i и E

$$P\,(F_i | E) = \frac{P\,(F_i \cap E)}{P\,(E)} = \frac{P\,(F_i)\,P\,(E\,|\,F_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\,(F_j)\,P\,(E\,|\,F_j)}. \qquad (4.6)$$

Пример 4.18. Парадокс Бертрана. Имеются три ящика с двумя монетами в каждом. В первом ящике находятся две золотые монеты, во втором — одна золотая и одна серебряная, а в третьем — две серебряные. Из случайно выбранного ящика вынимается одна монета. Выбранная монета оказалась золотой. Какова вероятность, что вторая монета в ящике — золотая? Используя формулу (4.6), находим

$$P\ (\text{ящик }1\,|\,\text{монета золотая}) = \frac{P\ (\text{ящик }1)\ P\ (\text{золотая}\,|\,\text{ящик }1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P\ (\text{ящик } i)\ P\ (\text{золотая}\,|\,\text{ящик } i)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 1}{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 1 + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

Определение. Если событие E_1 осуществляется n_1 способами, а событие E_2 осуществляется n_2 способами, которые не зависят от n_1, то оба события E_1 и E_2 осуществляются $n_1 n_2$ способами.

Пример 4.19. Рассмотрим пример с бросанием двух игральных костей. Первая и вторая кости могут независимо выпасть шестью различными гранями. Общее число различных вариантов составляет $6 \times 6 = 36$.

Определение. Если событие E_1 может осуществиться n_1 способами и событие E_2 может осуществиться n_2 способами, несовместными с предыдущими, то либо E_1, либо E_2 может осуществиться $n_1 + n_2$ способами.

Пример 4.20. Рассмотрим пример с бросанием игральной кости. Событие выпадения четырех или шести очков осуществляется $1 + 1$ способами.

Определение. Размещениями из n элементов по k называются такие соединения k этих элементов, которые отличаются друг от друга самими элементами или их порядком.

Число *размещений* из n элементов по k определяется формулой

$$P(n, k) = n(n-1) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (4.7)$$

Примечание. $n!$ определяется как

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)n = \prod_{i=1}^{n} i,$$

где Π есть символ произведения. $0! = 1$.

Формула Стирлинга. $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, где знак $\sim$ асимптотического равенства обозначает, что предел отношения двух частей равенства стремится к 1, когда n бесконечно возрастает.

Определение. Сочетаниями из n элементов по k называются такие соединения k этих элементов, которые различаются только самими элементами.

Таблица 4.1

Свойства биномиальных коэффициентов

а) Если n и k — положительные целые числа, то $C(n, k) = \dfrac{P(n, k)}{k!}$, $C(n, k) = 0$ для $k < 0$ или $k > n$, $C(n, k) = C(n, n-k)$, $C(n, n) = 1$, $C(n, n-1) = C(n, 1) = n$, $\sum_{i=0}^{n} C(n, i) = 2^n$, $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C(n, i) = 0$, $C(n, k-1) + C(n, k) = C(n+1, k)$, $\sum_{i=0}^{n} [C(n, i)]^2 = C(2n, n)$.
б) Если N, n, k — положительные целые числа, такие, что $N \geqslant n$, $n \geqslant k$, $\sum_{i=0}^{k} C(n, i)\, C(k, i) = C(n+k, k)$, $\sum_{i=0}^{n-k} C(n, i+k)\, C(N, i) = C(N+n, n-k)$.

Число сочетаний из n элементов по k называют биномиальным коэффициентом и определяют формулой

$$C(n,\ k) = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}. \tag{4.8}$$

Пример 4.21. Рассмотрим четыре буквы a, b, c, d. Число размещений из четырех букв по две равно $P\ (4;\ 2) = 4 \cdot 3 = 12$. Размещениями будут ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc. Число сочетаний из этих четырех букв по две равно $C(4;\ 2) = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$. Сочетаниями будут ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Примечание. ab и ba являются двумя размещениями, но только одним сочетанием.

Определение. Число размещений из n элементов по n_1, n_2, ..., n_k одинаковых элементов, таких, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, равно

$$P\ (n_1 \text{ одинаковых, } n_2 \text{ одинаковых, } \ldots, n_k \text{ одинаковых}) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} (n_i)!}. \tag{4.9}$$

4.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение. Случайной величиной называется действительная функция, определенная в выборочном пространстве.

Определение. Интегральная функция распределения случайной величины X обозначается через $F(x)$ и определяется как

$$F(x) = P\ (X \leqslant x).$$

Определение. X называют *дискретной случайной величиной* с распределением дискретного типа, если

$$f(x) = P\ (X = x).$$

Примечание. Невозможные значения случайной величины имеют нулевую вероятность.

Пример 4.22. Рассмотрим партию N взрывателей, D из которых дефектны. Если отобрать n взрывателей, то какова вероятность, что x из них будут дефектными?

$$f(x) = \begin{cases} C(D,\ x)\, C(N-D,\ n-x)\, \dfrac{1}{C(N,\ n)}, & x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ & 0 \leqslant x \leqslant D, \\ & 0 \leqslant n - x \leqslant N - D, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} & \end{cases}$$

Определение. Если X — *непрерывная случайная величина*, то ее *плотность вероятности* определяется формулой

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Таблица 4.2

Интегральная функция распределения

Для дискретной случайной величины X

$$F(x) = \sum_{\text{все } X \leqslant x} f(X) \text{ — ступенчатая функция.}$$

Для непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Свойства:

1. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$
2. $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
3. $F(x_2) \leqslant F(x_1)$, если $x_2 \leqslant x_1$.

Таблица 4.3

Плотность вероятности

Для дискретной случайной величины X

$f(x) = P(X = x)$.

Для непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Свойства:

1 $f(x) \geqslant 0$.

2. $\sum\limits_{\text{все } x} f(x) = 1$, X — дискретная случайная величина.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, X — непрерывная случайная величина.

Примечание. Для дискретной случайной величины X

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \sum_{x_1 < x \leqslant x_2} f(x).$$

Для непрерывной случайной величины X

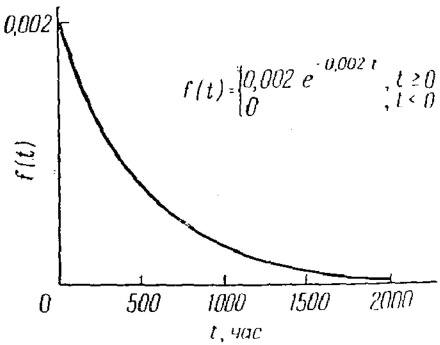
$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Пример 4.23. Пусть случайная величина T — время безотказной работы элемента в часах. Плотность вероятности задается функцией

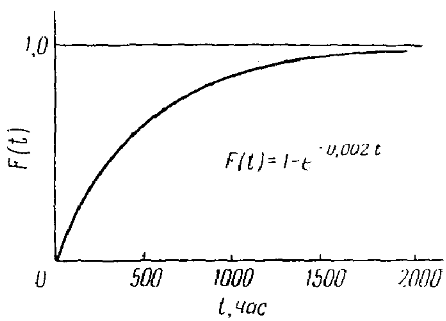
$$f(t) = \begin{cases} 0{,}002e^{-0{,}002t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Интегральная функция распределения имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t 0{,}002e^{-0{,}002x}\,dx = 1 - e^{-0{,}002t}, & t \geqslant 0. \end{cases}$$



Фиг. 4.2. Плотность вероятности.



Фиг. 4.3. Функция распределения.

Вероятность того, что время безотказной работы элемента превысит 500 *час*, равна

$$P(T \geqslant 500) = 1 - P(T < 500) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \approx 0{,}37.$$

Определение. Среднее значение функции $g(x)$ дискретной или непрерывной случайной величины X равно

$$M[g(X)] = \sum_{\text{все } x} g(x) f(x), \quad X \text{ — дискретная случайная величина},$$

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx, \quad X \text{ — непрерывная случайная величина}.$$

Таблица 4.4

Средние значения

1. $M(k) = k$, где k — постоянная.
2. $M[kg(X)] = kM[g(X)]$, где k — постоянная.
3. $M[g_1(X) + g_2(X)] = M[g_1(X)] + M[g_2(X)]$.

Определение. Начальный момент k-го порядка для случайной величины X задается формулами

$$\nu_k = M(X^k) = \sum_{\text{все } x} x^k f(x), \quad X \text{ — дискретная случайная величина,}$$

$$\nu_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx, \quad X \text{ — непрерывная случайная величина.} \tag{4.10}$$

Определение. Центральный момент k-го порядка для случайной величины X определяется как

$$\mu_k = M[(X - \nu_1)^k] = \sum_{\text{все } x} (x - \nu_1)^k f(x),$$

X — дискретная случайная величина,

$$\mu_k = M[(X - \nu_1)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \nu_1)^k f(x)\,dx, \tag{4.11}$$

X — непрерывная случайная величина.

Таблица 4.5

Выражение первых четырех центральных моментов через начальные

$\mu_0 = \nu_0 = 1$,
$\mu_1 = 0$,
$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$,
$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$,
$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$.

Примечание

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} C(k, i)(-1)^i \nu_{k-i}\nu_1^i. \tag{4.12}$$

Пример 4.24. Рассмотрим гипергеометрическое распределение, приведенное в примере 4.22.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{C(D, x)\,C(N-D, n-x)}{C(N, n)}, & x=0,\ 1,\ 2, \ldots, n, \\ & 0 \leqslant x \leqslant D, \\ & 0 \leqslant n-x \leqslant N-D, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\nu_1 = M(X) = \sum_{x=0}^{n} x\,\frac{C(D, x)\,C(N-D, n-x)}{C(N, n)} = \frac{nD}{N} = \mu,$$

$$\nu_2 = M(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2\,\frac{C(D, x)\,C(N-D, n-x)}{C(N, n)} = \frac{nD}{N}\left[\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{D}{N}\right)+\frac{nD}{N}\right],$$

$$\nu_3 = M(X^3) = \sum_{x=0}^{n} x^3\,\frac{C(D, x)\,C(N-D, n-x)}{C(N, n)} = \frac{nD}{N}\left[\left(\frac{N-D}{N}\right)\left(\frac{N-2D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{N-2n}{N-2}\right)+ 3\,\frac{nD}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{N-D}{N}\right)+\left(\frac{nD}{N}\right)^2\right],$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{nD}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right),$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = \frac{nD}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{2D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{N-2n}{N-2}\right).$$

Пример 4.25. В качестве непрерывной случайной величины рассмотрим время безотказной работы элемента из примера 4.23.

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ 0{,}002e^{-0{,}002t}, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\nu_1 = M(T) = \int_0^\infty 0{,}002te^{-0{,}002t}\,dt = 500 \text{ час},$$

$$\nu_2 = M(T^2) = \int_0^\infty 0{,}002t^2e^{-0{,}002t}\,dt = 5\cdot 10^5 \text{ час}^2,$$

Таблица 4.6

Числовые характеристики распределения вероятностей случайной величины X

Квантили:

P-квантилем x_P называется значение случайной величины, удовлетворяющее уравнению

$P(X \leqslant x_P) = F(x_P) = P, \quad 0 < P < 1.$

Специальные квантили:

$x_{0,25}$ и $x_{0,75}$ — квартили,

$x_{0,50}$ — медиана,

$x_{0,10}, x_{0,20}, \ldots, x_{0,90}$ — децили,

$x_{0,01}, x_{0,02}, \ldots, x_{0,99}$ — процентили.

Характеристики, описывающие центр распределения

1. Медиана: $x_{0,50}$ (см. выше),

$\sum_{x \leqslant x_{0,50}} f(x) = 0{,}50$, X — дискретная случайная величина,

$\int_{-\infty}^{x_{0,50}} f(x)\,dx = 0{,}50$, X — непрерывная случайная величина.

2. Среднее значение: $M(X) = \mu_X = \nu_1$.

3. Мода: значение x, для которого $f(x)$ максимальна.

Примечание. $f(x)$ может иметь более одной моды.

Характеристики рассеяния:

1. Дисперсия: $\sigma^2 = M[(X - \mu_X)^2] = \mu_2$.

2. Стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{\text{дисперсия}}$, положительный квадратный корень из дисперсии.

3. Коэффициент вариации: $\eta = \sigma/\mu_X$, отношение стандартного отклонения к среднему значению.

4. Среднее отклонение (среднее значение абсолютного отклонения): $M[\,|X - \mu_X|\,]$.

5. Размах: разность между максимальным и минимальным значениями случайной величины.

Характеристика асимметрии:

коэффициент асимметрии $\alpha_3 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$.

Характеристика эксцесса:

коэффициент эксцесса $\alpha_4 = \mu_4/\mu_2^2$.

$$\nu_3 = M(T^3) = \int_0^\infty 0{,}002 t^3 e^{-0{,}002t}\,dt = 75 \cdot 10^7 \text{ час}^3,$$

$$\nu_4 = M(T^4) = \int_0^\infty 0{,}002 t^4 e^{-0{,}002t}\,dt = 15 \cdot 10^{11} \text{ час}^4,$$

$$\mu = \nu_1 = 500 \text{ час},$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 25 \cdot 10^4 \text{ час}^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = 25 \cdot 10^7 \text{ час}^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 5625 \cdot 10^8 \text{ час}^4.$$

Примечание. Среднее значение не является случайной величиной. Оно представляет числовую характеристику распределения вероятностей случайной величины.

Определение. Функция

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

называется *характеристической функцией* случайной величины X.

Теорема. Если характеристическая функция случайной величины стремится к характеристической функции другой величины, то и плотность вероятности первой величины стремится к плотности вероятности второй величины.

Таблица 4.7

Свойства характеристической функции

1. $\nu_k = \partial^k M_X(t)/\partial t^k \big|_{t=0}$, где $\partial^k M_X(t)/\partial t^k \big|_{t=0}$ k-я частная производная функции $M_X(t)$ [1]) по переменной t при $t = 0$.

2. *Характеристическая* функция суммы конечного числа независимых случайных величин равна произведению характеристических функций этих величин

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\,M_Y(t).$$

3. Если $Y = a + bX$, то $M_Y(t) = e^{at} M_X(bt)$.

Пример 4.26. Пусть плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} C(n, x)\, p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ 0 \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$M_X(t) = M(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C(n, x)\, p^x (1-p)^{n-x} =$$
$$= [pe^t + (1-p)]^n \text{ для всех действительных значений } t.$$

[1]) Если эта производная существует. Часто при определении характеристической функции полагают $t = iv$, где v — действительная переменная. — *Прим. ред.*

$$\nu_1 = \left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = np = \mu,$$

$$\nu_2 = \left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = np + n(n-1)p^2,$$

$$\nu_3 = \left.\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3}\right|_{t=0} = np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3,$$

$$\nu_4 = \left.\frac{\partial^4 M_X(t)}{\partial t^4}\right|_{t=0} = np + 7n(n-1)p^2 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + \\ + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4;$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = np(1-p),$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = np(1-p)(1-2p),$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = np(1-p)[1-3p(1-p)(n-2)],$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = (1-2p)\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}},$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{np(1-p)}.$$

Пример 4.27. Пусть плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$M_X(t) = M(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx =$$

$= e^{\mu t + (\sigma t)^2/2}$ для действительных значений t,

$$\nu_1 = \left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \mu,$$

$$\nu_2 = \left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2,$$

$$\nu_3 = \left.\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3}\right|_{t=0} = 3\mu\sigma^2 + \mu^3,$$

$$\nu_4 = \left.\frac{\partial^4 M_X(t)}{\partial t^4}\right|_{t=0} = 3\sigma^4 + 6\mu^2\sigma^2 + \mu^4,$$

$$\mu = \nu_1, \quad \mu_2 = \sigma^2, \quad \mu_3 = 0,$$

$$\mu_4 = 3\sigma^4, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 3.$$

4.3а. Двумерные распределения вероятностей

Примечание. Для дискретных случайных величин X_1 и X_2

$$P(a < X_1 \leqslant b,\ c < X_2 \leqslant d) = \sum_{a < x_1 \leqslant b} \sum_{c < x_2 \leqslant d} f(x_1, x_2) =$$
$$= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).$$

Для непрерывных случайных величин X_1 и X_2

$$P(a < X_1 \leqslant b,\ c < X_2 \leqslant d) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2 \right] dx_1 =$$
$$= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).$$

Теорема. Две случайные величины X_1 и X_2 с плотностью совместного распределения $f(x_1, x_2)$ и одномерными плотностями $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ независимы, если

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2).$$

Таблица 4.8

Интегральная функция совместного распределения

Для дискретных случайных величин X_1 и X_2

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2) = \sum_{X_1 \leqslant x_1} \sum_{X_2 \leqslant x_2} f(X_1, X_2).$$

Для непрерывных случайных величин X_1 и X_2

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Свойства:

1. $F(-\infty, x_2) = \lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0,$

$F(x_1, -\infty) = \lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0,$

$F(-\infty, -\infty) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to -\infty}} F(x_1, x_2) = 0.$

2. $F(\infty, \infty) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} F(x_1, x_2) = 1.$

3. $F(\infty, x_2) = \lim\limits_{x_1 \to \infty} F(x_1, x_2) = F_2(x_2)$ — *одномерная интегральная функция распределения* случайной величины X_2.

4. $F(x_1, \infty) = \lim\limits_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = F_1(x_1)$ — *одномерная интегральная функция распределения* случайной величины X_1.

Таблица 4.9

Совместная плотность вероятности

Для дискретных случайных величин X_1 и X_2

$$f(x_1,\ x_2) = P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2).$$

Для непрерывных случайных величин X_1 и X_2

$$f(x_1,\ x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,\ x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}.$$

Свойства:

1. $f(x_1,\ x_2) \geqslant 0$.
2. $\sum\limits_{\text{все } x_1}\ \sum\limits_{\text{все } x_2} f(x_1,\ x_2) = 1$ для дискретных случайных величин X_1 и X_2,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ x_2)\,dx_2\right]dx_1 = 1$ для непрерывных случайных величин X_1 и X_2.

Таблица 4.10

Условная плотность вероятности

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1,\ x_2)}{f_2(x_2)},$$

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1,\ x_2)}{f_1(x_1)},$$

$$F(x_1 \mid x_2) = \frac{F(x_1,\ x_2)}{F_2(x_2)},$$

$$F(x_2 \mid x_1) = \frac{F(x_1,\ x_2)}{F_1(x_1)}.$$

Пример 4.28. Пусть совместная плотность вероятности случайных величин T_1 и T_2 равна

$$f(t_1,\ t_2) = \begin{cases} e^{-(t_1+t_2)}, & t_1 > 0,\ t_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

тогда

$$f_1(t_1) = \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} f(t_1,\ t_2)\,dt_2 = e^{-t_1}, & t_1 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$f_2(t_2) = \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} f(t_1,\ t_2)\,dt_1 = e^{-t_2}, & t_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Примечание. T_1 и T_2 независимы, так как $f(t_1, t_2) = f_1(t_1) f_2(t_2)$.

$$f(t_1 \mid t_2) = \begin{cases} \dfrac{f(t_1, t_2)}{f_2(t_2)} = e^{-t_1}, & t_1 > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$f(t_2 \mid t_1) = \begin{cases} \dfrac{f(t_1, t_2)}{f_1(t_1)} = e^{-t_2}, & t_2 > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определение. Начальные моменты совместного распределения случайных величин X_1 и X_2 определяются как

$$\nu_{ij} = M(X_1^i X_2^j).$$

Определение. Центральные моменты совместного распределения случайных величин X_1 и X_2 определяются как

$$\mu_{ij} = M\{[X_1 - M(X_1)]^i [X_2 - M(X_2)]^j\}. \tag{4.13}$$

Определение. Ковариацией двух случайных величин X_1 и X_2 называют величину

$$\sigma_{X_1 X_2} = M\{[X_1 - M(X_1)][X_2 - M(X_2)]\} = \mu_{11}.$$

Определение. Коэффициентом корреляции двух случайных величин X_1 и X_2 называют величину

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{M\{[X_1 - M(X_1)][X_2 - M(X_2)]\}}{\sqrt{M[X_1 - M(X_1)]^2}\sqrt{M[X_2 - M(X_2)]^2}} = \frac{\sigma_{X_1 X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}. \tag{4.14}$$

Примечание. $-1 \leqslant \rho \leqslant +1$.

Двумерное нормальное распределение. *Определение.* Если совместная плотность вероятности случайных величин X_1 и X_2 задается в виде

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho\left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)\left(\frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right) + \left(\frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)^2\right]\right\}, \quad \begin{array}{l} -\infty < x_1 < \infty, \\ -\infty < x_2 < \infty, \\ -1 < \rho < +1, \end{array} \tag{4.15}$$

то случайные величины X_1 и X_2 имеют *двумерное нормальное распределение.*

Преобразование случайной величины; дискретный случай. *Теорема.* Пусть X — дискретная случайная величина с распределением $f(x)$, отличным от нуля на множестве дискретных точек A_1. Пусть $y = g(x)$ — взаимно однозначное отображение точек множества A_1 в множество дискретных точек A_2. Если $x = h(y)$, то

$$f(y) = \begin{cases} P(Y = y) = P[X = h(y)] = f[h(y)], & y \in A_2, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Преобразование случайной величины; непрерывный случай. *Теорема.* Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f(x)$, отличной от нуля в области $-\infty < x < < \infty$. Пусть $y = g(x)$ — взаимно однозначное отображение множества точек на числовой оси x в множество точек на оси y. Если $x = h(y)$ и $\frac{dx}{dy} = h'(y)$, то

$$f(y) = \begin{cases} f[h(y)]\,|h'(y)|, y \in A_2 \text{ (множество точек на оси } y), \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

будет плотностью вероятности случайной величины Y.

Пример 4.29. Пусть случайная величина T имеет плотность вероятности

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \quad \lambda > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

и T_1, T_2 — две случайные величины, подчиняющиеся этому закону распределения. Полагая $Y_1 = T_1 + T_2$ и $Y_2 = T_2/(T_1 + T_2)$, найдем совместную плотность вероятности случайных величин Y_1 и Y_2.

$$y_1 = t_1 + t_2, \qquad t_1 = y_1(1 - y_2),$$

$$y_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2}, \qquad t_2 = y_1 y_2,$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial y_1} & \frac{\partial t_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial t_2}{\partial y_1} & \frac{\partial t_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - y_2 & -y_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} = y_1 \neq 0.$$

Случайные величины T_1 и T_2 независимы; следовательно,

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} f(t_1) f(t_2) = \lambda^2 e^{-(t_1+t_2)\lambda}, & t_1 > 0, \quad t_2 > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Совместная плотность вероятности величин Y_1 и Y_2 равна

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \lambda^2 y_1 e^{-y_1\lambda}, & y_1 > 0, \quad 0 < y_2 < 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Примечание.

$$f_1(y_1)=\begin{cases}\int\limits_0^1 \lambda^2 y_1 e^{-y_1\lambda}\,dy_2=\lambda^2 y_1 e^{-y_1\lambda}, & y_1>0,\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$f_2(y_2)=\begin{cases}\int\limits_0^\infty \lambda^2 y_1 e^{-y_1\lambda}\,dy_1=1, & 0<y_2<1,\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Следовательно, случайные величины Y_1 и Y_2 независимы, т. е.

$$f(y_1,\ y_2)=f_1(y_1)\cdot f_2(y_2).$$

Функция надежности. *Определение.* Если $P(X\leqslant x)=F(x;\ \theta_1,\theta_2,\ldots)$ — интегральная функция распределения случайной величины X, θ_i, $i=1,2,3,\ \ldots,$ — параметры функции распределения и если a, b — пределы, определяющие благоприятное событие, то функция надежности R задается формулой

$$R=R(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots)=P(a\leqslant X\leqslant b)=$$
$$=F(b;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots)-F(a;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots). \quad (4.16)$$

Примечание (непрерывный случай).

Надежность: $$P(T>t)=\int\limits_t^\infty f(x)\,dx=R(t).$$

Ненадежность: $$P(T<t)=\int\limits_{-\infty}^t f(x)\,dx=F(t),$$

$$R(t)=1-F(t).$$

Пример 4.30. Пусть случайная величина X представляет некоторый основной параметр с верхним допустимым пределом U и нижним допустимым пределом L. Если плотность вероятности случайной величины задана в виде $f(x;\ \theta_1,\theta_2)$, то

$$R=P(L\leqslant X\leqslant U)=\int\limits_L^U f(x;\ \theta_1,\ \theta_2)\,dx=F(U;\ \theta_1,\ \theta_2)-F(L;\ \theta_1,\ \theta_2)$$

и благоприятное событие заключается в том, что основной параметр не выходит за требуемые пределы.

Пример 4.31. Пусть плотность вероятности безотказной работы описывается функцией

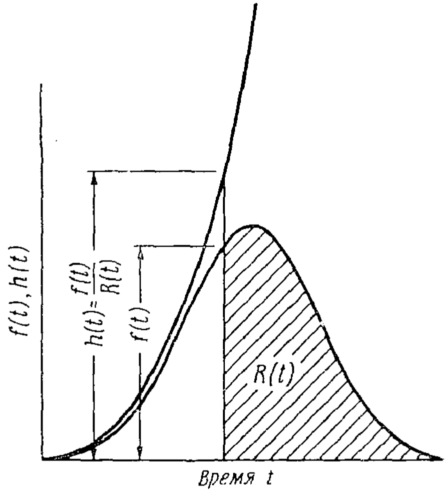
$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-t\lambda}, & 0<t<\infty,\ \lambda>0,\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Если под благоприятным событием понимать безотказную работу в течение периода t_1, то

$$R=P(T\geqslant t_1)=\int_{t_1}^{\infty}\lambda e^{-t\lambda}\,dt=e^{-t_1\lambda}=R(t_1;\ \lambda).$$

Пример 4.32. Для дискретной случайной величины X обозначим через $(1-p)$ вероятность того, что элемент работает удовлетворительно. Если определить надежность как вероятность того, что не менее k элементов из n работают удовлетворительно, то

$$R=\sum_{x=k}^{n}C(n,\ x)\,p^{n-x}(1-p)^{x}=$$
$$=R(k;\ n,\ p).$$



Фиг. 4.4. Соотношения между $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$.

Определение. *Интенсивностью* (опасностью) *отказов* $h(t)$ называется условная плотность вероятности[1]) отказа в момент t при условии отсутствия отказов до этого момента:

$$h(t;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots)=h(t)=$$
$$=\frac{f(t;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots)}{1-F(t;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots)}=\frac{f(t)}{1-F(t)},\tag{4.17}$$

где

$$F(t;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots)=\int_0^t f(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots)\,dx,$$

$$f(t)=\{1-F(0)\}\,h(t)\exp\left(-\int_0^t h(x)\,dx\right).$$

[1]) Следует иметь в виду, что интенсивность отказов не является плотностью вероятности случайной величины и не обладает известными свойствами плотности вероятности; например, $\int_0^{\infty} h(t)\,dt=\infty$. — *Прим. ред.*

Пример 4.33. Пусть

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & \lambda>0,\ t>0,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

тогда

$$R(t)=\int_t^{\infty}\lambda e^{-x}\,dx=e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, $h(t)=\lambda\dfrac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}=\lambda$ означает постоянную интенсивность отказов, которая в этом случае равна обратной величине среднего времени безотказной работы.

Пример 4.34. Пусть $h(t)=\dfrac{\beta}{\alpha}t^{\beta-1}$, $\alpha>0$, $\beta>0$. Тогда

$$\int_0^t\frac{\beta}{\alpha}x^{\beta-1}\,dx=\frac{t^{\beta}}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}t^{\beta-1}e^{-t^{\beta}/\alpha}, & t>0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Это распределение Вейбулла, которое рассматривается в разд. 4.5.з.

4.4. НЕКОТОРЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.4а. Гипергеометрическое распределение. Пусть основное множество состоит из N элементов, из которых D обладают некоторым свойством. Тогда вероятность того, что случайная выборка объема n без возвращения элементов содержит ровно x элементов, обладающих указанным свойством, равна

$$f(x;\ N,\ D,\ n)=\begin{cases}\dfrac{C(D,\ x)\,C(N-D,\ n-x)}{C(N,\ n)}=\\ \quad=\dfrac{D!}{x!\,(D-x)!}\,\dfrac{(N-D)!}{(n-x)!\,(N-D-n+x)!}\,\dfrac{(N-n)!\,n!}{N!},\\ \qquad x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\\ \qquad N\geqslant n>0,\ N-D\geqslant 0;\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}\tag{4.18}$$

Таблица 4.11

Свойства гипергеометрического распределения

Среднее	$\mu = n\dfrac{D}{N}$
Дисперсия	$\sigma^2 = \dfrac{nD}{N}\left(1-\dfrac{D}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$
Третий центральный момент	$\mu_3 = \dfrac{nD}{N}\left(1-\dfrac{D}{N}\right)\left(1-\dfrac{2D}{N}\right)\dfrac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = \dfrac{nD}{N}\left(1-\dfrac{D}{N}\right)\dfrac{N-n}{(N-1)(N-2)(N-3)}\times$ $\times\left\{N(N+1)-6n(N-n)+\right.$ $\left.+\dfrac{3D}{N}\left(1-\dfrac{D}{N}\right)[n(N-n)(N+6)-2N^2]\right\}$
Коэффициент вариации	$\eta = \sqrt{\dfrac{N-D}{nD}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \dfrac{N-2D}{\sqrt{nD(N-D)}}\sqrt{\dfrac{N-1}{N-n}}\left(\dfrac{N-2n}{N-2}\right)$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = \dfrac{N^2(N-1)}{(N-2)(N-3)n(N-n)}\times$ $\times\left[\dfrac{N(N+1)-6N(N-n)}{D(N-D)}+\right.$ $\left.+\dfrac{3n(N-n)(N+6)}{N^2}-6\right]$

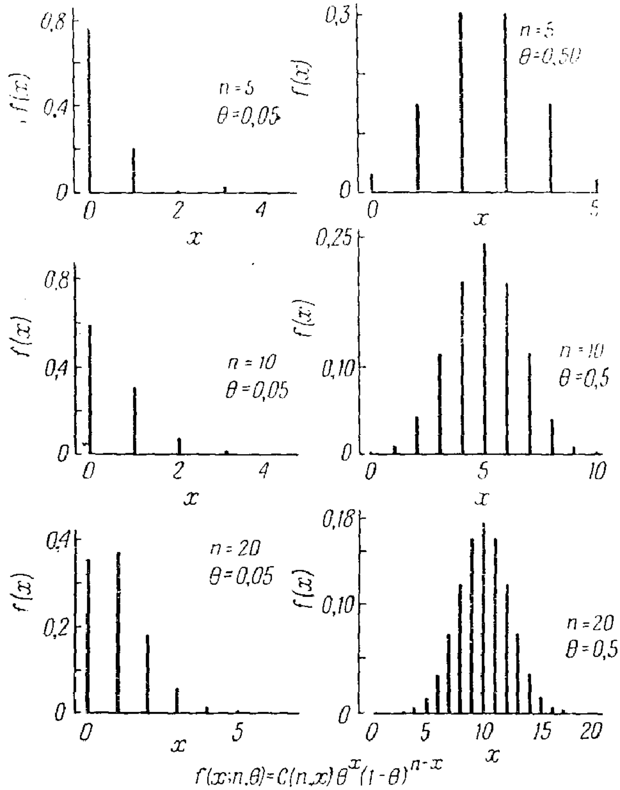
Таблица 4.12

Свойства биномиального распределения (фиг. 4.5)

Характеристическая функция	$M_X(t) = (\theta e^t + 1 - \theta)^n$
Среднее	$\mu = n\theta$
Дисперсия	$\sigma^2 = n\theta(1-\theta)$
Третий центральный момент	$\mu_3 = n\theta(1-\theta)(1-2\theta)$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = n\theta(1-\theta)[3n\theta(1-\theta)-6\theta(1-\theta)+1]$
Коэффициент вариации	$\eta = \sqrt{\dfrac{1-\theta}{n\theta}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \dfrac{1-2\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{n\theta(1-\theta)}$

Замечания

1. Когда $N \to \infty$, причем n и D/N остаются постоянными, гипергеометрическое распределение сходится к биномиальному рас-



Фиг. 4.5. Биномиальное распределение при различных значениях параметров n и θ.

пределению (разд. 4.4б) с параметрами n и $\theta = D/N$. Приближение вполне приемлемо для $10n < N$.

2. Рекуррентная формула

$$f(x+1;\ N,\ D,\ n) = f(x;\ N,\ D,\ n)\left(\frac{n-x}{x+1}\right)\left(\frac{D-x}{N-n-D+x+1}\right).$$

4.4б. Биномиальное распределение. Пусть θ обозначает вероятность осуществления события в каждом из n испытаний. Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие осуществится ровно x раз, определяется *биномиальным распределением*

$$f(x;\ n,\ \theta)=\begin{cases} C(n,\ x)\,\theta^x(1-\theta)^{n-x}, & x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ & 0\leqslant\theta\leqslant 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} & \end{cases} \quad (4.19)$$

$$F(x)=\sum_{i=0}^{x} C(n,\ i)\,\theta^i(1-\theta)^{n-i}. \quad (4.20)$$

Замечания

1. Максимум $f(x;n,\theta)$ достигается для x, которое определяется неравенством $\theta(n+1)-1\leqslant x\leqslant\theta(n+1)$.

2. При $n\to\infty$ и $\theta\to 0$ так, что $n\theta$ остается постоянной, биномиальное распределение сходится к распределению Пуассона (см. 4.4д) с параметром $\lambda=n\theta$. Приближение вполне приемлемо для $n>10$ и $\theta<0{,}10$.

3. При $n\to\infty$ биномиальное распределение сходится к нормальному распределению (разд. 4.5б) с параметрами $\mu=n\theta$ и $\sigma^2=n\theta(1-\theta)$. Сходимость хорошая для $\theta=0{,}5$ и плохая для $\theta<1/(n+1)$, $\theta>n/(n+1)$, а также вне полосы $\pm 3\sigma$. Анализ точности аппроксимации можно найти в литературе [2], [3].

4. Рекуррентная формула

$$f(x+1;\ n,\ \theta)=f(x;\ n,\ \theta)\left(\frac{n-x}{x+1}\right)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right).$$

5. Биномиальное распределение является дискретным; его нельзя рассматривать как непрерывную функцию времени. Оно применяется обычно в случаях, когда изделия классифицируются на хорошие и дефектные. Это распределение можно также применять при рассмотрении кратковременных операций, когда учет времени не имеет значения, например в пиротехнике.

6. Таблицы биномиального распределения:

а) Tables of the Binomial Probability Distribution, Natl. Bur. Standards, *Appl. Math.*, Ser. 6 (1950).

$$n=2\,(1)\,49, \qquad p=0{,}01\ (0{,}01)\ 0{,}50.$$

б) Romig H. G., 50—100 Binomial Tables, Wiley, New York, 1953.

$$n=50\,(5)\,100, \quad p=0{,}01\ (0{,}01)\ 0{,}99.$$

в) Cumulative Binomial Probability Distribution, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1955.

$$n=2\,(1)\,50\,(2)\,100\,(10)\,200\,(20)\,500\,(50)\,1000,$$
$$p=0{,}01\ (0{,}01)\ 0{,}50,$$
$$p=\frac{1}{16},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{16}.$$

Оценка параметра θ. Отношение числа испытаний, в которых наблюдалось событие, к общему числу испытаний является несмещенной оценкой максимального правдоподобия θ; например оценка доли дефектных изделий

$$\hat{\theta} = \frac{\text{Число обнаруженных дефектных изделий}}{\text{Общее число испытанных изделий}} = \frac{d}{n}. \qquad (4.21)$$

Пример 4.35. Если из 100 испытанных изделий 10 оказались дефектными, то оценкой θ служит $\hat{\theta} = \frac{10}{100} = 0,10$.

Доверительные пределы для θ. Для получения двустороннего 100γ-ного доверительного интервала для θ необходимо решить следующие уравнения:

$$\sum_{x=d}^{n} C(n,\ x)\,\theta^{x}(1-\theta)^{n-x} = \frac{1-\gamma}{2}, \qquad (4.22)$$

$$\sum_{x=0}^{d} C(n,\ x)\,\theta^{x}(1-\theta)^{n-x} = \frac{1-\gamma}{2}. \qquad (4.23)$$

Пример 4.36. Испытания показали, что 20 реле из 200 дефектны. Следовательно, $\hat{\theta} = 20/200 = 0,10$. Чтобы получить 90%-ные доверительные пределы, необходимо решить уравнения

$$\sum_{x=20}^{200} C(200,\ x)\,\theta^{x}(1-\theta)^{200-x} = 0,05,$$

$$\sum_{x=0}^{20} C(200,\ x)\,\theta^{x}(1-\theta)^{200-x} = 0,05.$$

Из фиг. Б.1[1]) находим $\theta_н = 0,06$, $\theta_в = 0,15$. Следовательно, на 90% мы уверены в том, что истинное значение θ заключено между 0,06 и 0,15. Используя нормальное приближение, получаем

$$P\left[\frac{\theta_н - (1/2n) - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)(1/n)}} \leqslant Z \leqslant \frac{\theta_в + (1/2n) - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)(1/n)}}\right] = 1 - \gamma. \qquad (4.24)$$

Из таблицы нормального распределения А.4 находим, что для $1 - \gamma = 0,90$ величина $Z = 1,645$. Поскольку оценкой θ служит $\hat{\theta} = 0,10$, получаем

$$P\left[\frac{\theta_н - 0,0025 - 0,10}{\dfrac{0,30}{\sqrt{200}}} \leqslant Z \leqslant \frac{\theta_в + 0,0025 - 0,10}{\dfrac{0,30}{\sqrt{200}}}\right] \approx 0,90,$$

откуда следует, что $\theta_н = 0,063$ и $\theta_в = 0,137$.

[1]) Таблицы и графики приведены в приложении.

Примечание. Для $n \leqslant 30$ вместо графиков на фиг. Б.1 можно использовать табл. А.4. Обычно при оценке надежности системы определяют только нижний доверительный предел. Пусть θ — вероятность успеха в одном испытании; если требуется не менее k успехов в n испытаниях, то нижний доверительный предел $\theta_н$ есть то значение θ, которое удовлетворяет уравнению

$$\sum_{x=k}^{n} C(n, x)\, \theta^x (1-\theta)^{n-x} = 1-\gamma.$$

Если отказы недопустимы, т. е. $k = n$, то $\theta^n = 1-\gamma$ или $n = \log(1-\gamma)\frac{1}{\log\theta}$.

Пример 4.37. В 500 испытаниях наблюдалось 50 отказов, следовательно, лучшей оценкой надежности будет $\hat{\theta} = 450/500 = 0{,}95$. Нижним доверительным пределом при коэффициенте доверия 90% будет $\theta_н = 0{,}88$ при $n = 500$, $F = 50$ в соответствии с графиками фиг. Б.2.

Таблица 4.13

Проверка гипотезы: параметр биномиального распределения θ равен θ_0 (нормальное приближение)

$H_0: \theta = \theta_0$	$H_1: \theta \neq \theta_0$
Уровень значимости	α
Статистика	$Z = \dfrac{\hat{\theta} + 1/2n - \theta_0}{\sqrt{\dfrac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}}$, $\hat{\theta} < \theta_0$,
	$Z = \dfrac{\hat{\theta} - (1/2n) - \theta_0}{\sqrt{\dfrac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}}$, $\hat{\theta} > \theta_0$
Гипотеза H_0 отвергается, если	$Z \leqslant z_{\alpha/2}$, $Z \geqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Таблица 4.14

Проверка гипотезы о равенстве двух параметров биномиального распределения (нормальное приближение)

$H_0: \theta_1 = \theta_2$	$H_1: \theta_1 \neq \theta_2$
Уровень значимости	α
Статистика	$Z = \dfrac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}}$.
Гипотеза H_0 отвергается, если	$Z \leqslant z_{\alpha/2}$, $Z \geqslant z_{1-\alpha/2}$

Для дополнительного изучения вопроса о доверительных интервалах биномиального распределения читатель может обратиться к работам [4], [5].

Проверка гипотез

Пример 4.38. Для оценки деталей, полученных от двух поставщиков, в каждой из двух поставленных партий деталей взяты выборки и получены следующие результаты: поставщик 1: $n_1 = 200$, число дефектных деталей = 20; поставщик 2: $n_2 = 300$, число дефектных деталей = 15. Используя $\alpha = 0{,}05$, определим, имеется ли существенная разница в качестве деталей обеих партий. Из табл. А.4 получаем

$$z_{0,025} = -1{,}96 \quad \text{и} \quad z_{0,975} = 1{,}96,$$

$$\hat\theta_1 = \frac{20}{200} = 0{,}10, \quad \hat\theta_2 = \frac{15}{300} = 0{,}05,$$

$$Z = \frac{0{,}10 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}10 \cdot 0{,}90}{200} + \frac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{300}}} = 2{,}03.$$

Поскольку $2{,}03 > 1{,}96$, отвергаем гипотезу о том, что качество партий одинаково.

Таблица 4.15

Сравнение двух параметров биномиального распределения

	Число дефектных деталей	Число исправных деталей	Всего деталей
Партия 1	d_1	$n_1 - d_1$	n_1
Партия 2	d_2	$n_2 - d_2$	n_2
Итого	$d_1 + d_2$	$n_1 - d_1 + n_2 - d_2$	$n_1 + n_2$

Примечание. Для оценки результатов такого типа, как в примере 4.38, можно использовать приближенный метод. Составляется табл. 4.15. Вычисляется величина

$$\chi^2 = \frac{(n_1 + n_2)\left[\,|d_1(n_2 - d_2) - d_2(n_1 - d_1)| - (n_1 + n_2)\frac{1}{2}\right]^2}{n_1 n_2 (d_1 + d_2)(n_1 - d_1 + n_2 - d_2)}, \qquad (4.25)$$

распределенная по закону χ^2 (разд. 4.6в) с одной степенью свободы. Для данных примера 4.38 получают $\chi^2 = 3{,}87$, что больше чем $\chi^2_{0,95;\,1} = 3{,}84$. Следовательно, гипотеза об одинаковом качестве партий отвергается.

Об использовании последовательного анализа в случае биномиального распределения см. в разд. 4.10.

4.4в. Отрицательное биномиальное распределение. Пусть θ — вероятность появления события в каждом испытании. Предполагается, что испытания повторяются до тех пор, пока событие не произойдет ровно k раз. Вероятность, что для этого потребуется x испытаний, задается *распределением Паскаля:*

$$f(x;\ k,\ \theta)=\begin{cases} C(x-1,\ k-1)\,\theta^k(1-\theta)^{x-k}, & x=k,\ k+1,\ \ldots, \\ & 0\leqslant\theta\leqslant 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} & \end{cases} \tag{4.26}$$

В некоторых случаях более удобно учитывать количество испытаний, которое понадобится провести сверх k требуемых. Если ввести обозначение $z=x-k$, то получим для Z *отрицательное биномиальное распределение*

$$\begin{aligned} f(z;\ k,\ \theta)&=C(z+k,\ k)\,\theta^k(1-\theta)^z= \\ &=C(-k,\ z)\,\theta^k(\theta-1)^z,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Таблица 4.16

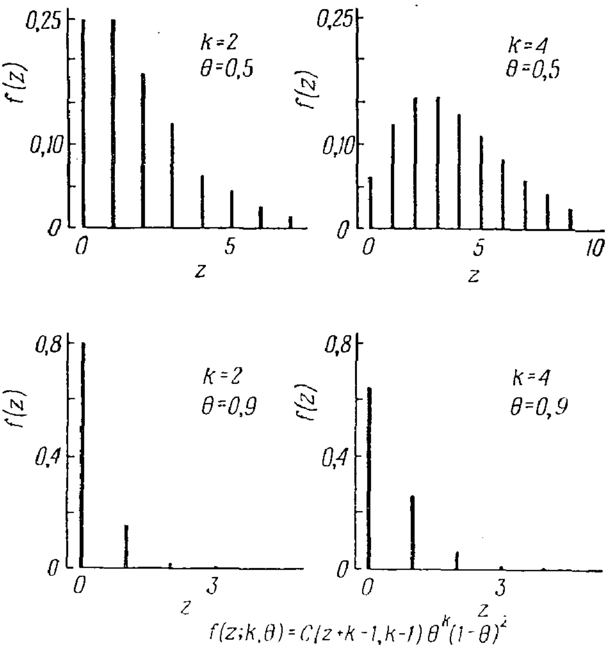
Свойства отрицательного биномиального распределения (фиг. 4.6)

Характеристическая функция	$M_X(t)=\dfrac{\theta^k}{[1-e^t(1-\theta)]^k}$
Среднее	$\mu=\dfrac{k(1-\theta)}{\theta}$
Дисперсия	$\sigma^2=\dfrac{k(1-\theta)}{\theta^2}$
Третий центральный момент	$\mu_3=\dfrac{k(1-\theta)(2-\theta)}{\theta^3}$
Четвертый центральный момент	$\mu_4=\dfrac{k(1-\theta)}{\theta^4}\,[3k(1-\theta)+6(1-\theta)+\theta^2]$
Коэффициент вариации	$\eta=\dfrac{1}{\sqrt{k(1-\theta)}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3=\dfrac{2-\theta}{\sqrt{k(1-\theta)}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4=3+\dfrac{6}{k}+\dfrac{\theta^2}{k(1-\theta)}$

Вероятность получения k отказов не более чем за x испытаний задается выражением

$$F(x) = \sum_{i=k}^{x} C(i-1,\ k)\,\theta^k (1-\theta)^{i-k}, \tag{4.28}$$

которое можно определить с помощью интегральной функции биномиального распределения.



Фиг. 4.6. Отрицательное биномиальное распределение при различных значениях параметров k и θ.

Пример 4.39. Если $\theta = 0{,}2$ и $k = 1$, то в среднем $1 \cdot 0{,}8/0{,}2 = 4$ успешных исходов будут предшествовать первому отказу или пять испытаний приведут к первому отказу.

Пример 4.40. Если вероятность отказа аппаратуры в одном испытании равна 0,05, то какова вероятность того, что не более 15 испытаний понадобится до получения второго отказа?

$$F(15) = \sum_{i=2}^{15} C(15,\ i)(0{,}05)^i (0{,}95)^{15-i} = 0{,}171.$$

Оценка параметра θ. Несмещенной оценкой θ служит $\theta = \frac{k-1}{n-1}$, $k > 1$, где n — число проведенных испытаний. Если $k = 1$, получаем геометрическое распределение (разд. 4.4г). Дополнительный анализ можно найти в [4].

4.4г. Геометрическое распределение. Пусть θ — вероятность появления некоторого события в каждом испытании. Испытание повторяют до тех пор, пока это событие не появится. Вероятность того, что для этого понадобится x испытаний, задается *геометрическим распределением*

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^{x-1}, & x = 1, 2, \ldots, \\ & 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.29}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{x} \theta(1-\theta)^{i-1} = 1 - (1-\theta)^x. \tag{4.30}$$

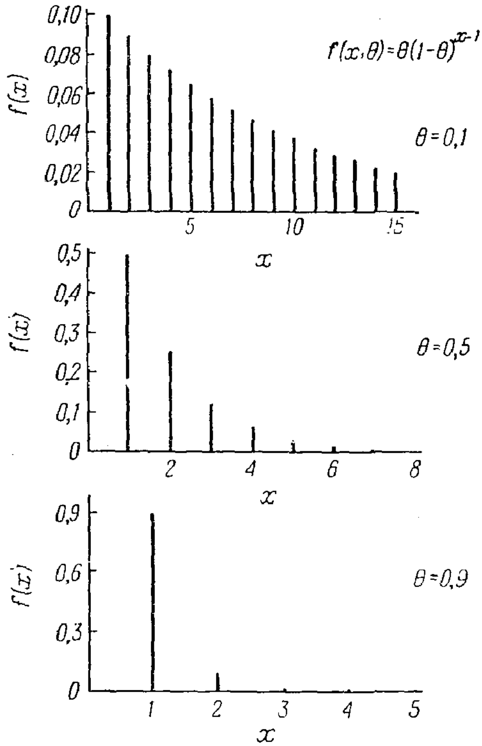
Пример 4.41. Если $\theta = 0{,}2$, то в среднем понадобится $1/0{,}2 = 5$ испытаний до первого отказа (см. пример 4.39).

Примечание. Несмещенной оценкой для θ служит $\hat{\theta} = 1$, когда $n = 1$, и $\hat{\theta} = 0$ при $n > 1$.

Таблица 4.17

Свойства геометрического распределения (фиг. 4.7)

Характеристическая функция	$M_X(t) = \dfrac{\theta}{[e^{-t} - (1-\theta)]}$
Среднее	$\mu = \dfrac{1}{\theta}$
Дисперсия	$\sigma^2 = \dfrac{1-\theta}{\theta^2}$
Третий центральный момент	$\mu_3 = \dfrac{(1-\theta)(2-\theta)}{\theta^3}$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = \dfrac{9(1-\theta)^2}{\theta^4} + \dfrac{1-\theta}{\theta^2}$
Коэффициент вариации	$\eta = \sqrt{1-\theta}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \dfrac{2-\theta}{\sqrt{1-\theta}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 9 + \dfrac{\theta^2}{1-\theta}$



Фиг. 4.7. Геометрическое распределение при различных значениях параметра θ.

4.4д. Распределение Пуассона. Распределение Пуассона является полезной аппроксимацией биномиального и гипергеометрического распределений.

Таблица 4.18

Свойства распределения Пуассона (фиг. 4.8)

Характеристическая функция	$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$
Среднее	$\mu=\lambda$
Дисперсия	$\sigma^2=\lambda$
Третий центральный момент	$\mu_3=\lambda$
Четвертый центральный момент	$\mu_4=\lambda(3\lambda+1)$
Коэффициент вариации	$\eta=1/\sqrt{\lambda}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3=1/\sqrt{\lambda}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4=3+1/\lambda$

Оно имеет место в тех случаях, когда на некотором интервале или площади событие с малой вероятностью появляется большое число раз.

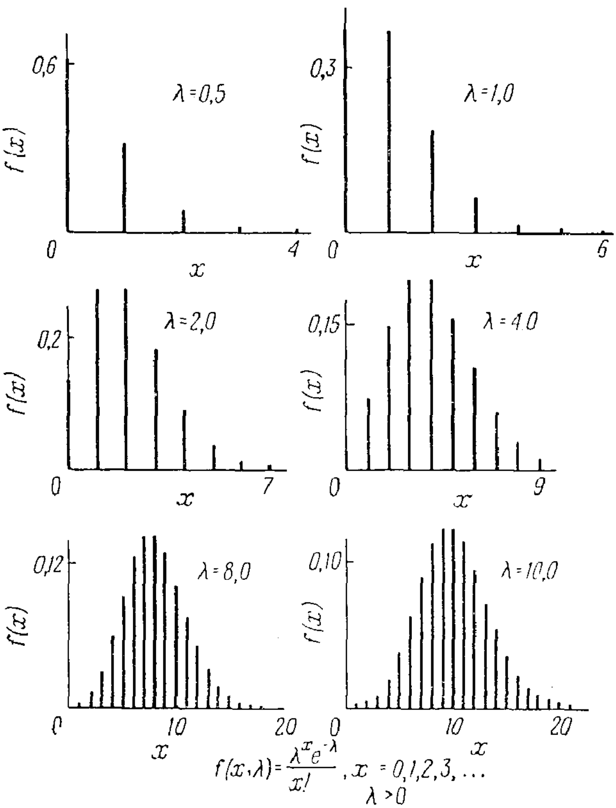
$$f(x, \lambda)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x=0,\ 1, 2,\ \ldots,\ \lambda>0, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4.31}$$

$$F(x)=\sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}. \tag{4.32}$$

Замечания

1. $f(x, \lambda)$ максимальна для $x \leqslant [\lambda]$ (наибольшее целое число, равное или меньшее λ).

2. Для малых значений λ распределение сосредоточено вблизи начала координат. С ростом λ распределение приобретает асим-



Фиг. 4.8. Распределение Пуассона при различных значениях параметра λ.

метричную колоколообразную форму. Для больших значений $\lambda (\lambda > 9)$ распределение Пуассона можно приближенно заменить нормальным распределением с параметрами $\mu = \lambda$ и $\sigma^2 = \lambda$.

3. Рекуррентная формула

$$f(x+1, \lambda) = f(x, \lambda)\left(\frac{\lambda}{x+1}\right).$$

4. Таблицы распределения Пуассона[1]:

а) Defense Systems Department, General Electric Company, Tables of Individual and Cumulative Terms of the Poisson Distribution, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1962.

б) Molina E. C., Tables of Poisson's Exponential Limit, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1945.

5. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответственно, то случайная величина $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Оценка параметра λ. Если n — число проведенных испытаний и d_i — число событий, появившихся в i-м испытании, то оценка максимального правдоподобия параметра λ равна

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{n}. \tag{4.33}$$

Доверительный интервал для λ. Верхний доверительный интервал определяется решением уравнения

$$\sum_{d=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{d}}{d!} = 1 - \gamma, \tag{4.34}$$

где k — общее число обнаруженных дефектов.

4.4е. Полиномиальное распределение. Полиномиальное распределение определяется формулой

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}, \\ x_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < p_i < 1, \\ \sum_{i=1}^{k} x_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.35}$$

---

[1]) См. также [30*], [31*]. — *Прим. ред.*

Замечания

1. Полиномиальное распределение встречается в случаях, когда возможны более чем два исхода, например четыре: критическая неисправность, существенная неисправность, слабая неисправность, исправное состояние.

2. Проверка гипотезы, что p_i равно заданному p_{0i} ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$), осуществляется с помощью величины χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(l_i - np_{0i})^2}{np_{0i}},$$

где l_i означает число появлений события i-го вида

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} p_{0i} = 1, \quad \sum_{i=1}^{k} l_i = \sum_{i=1}^{k} np_{0i} = n.$$

Величина χ^2 распределена по закону хи-квадрат с $k-1$ степенями свободы. Гипотеза отвергается, если $\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha;\, k-1}$.

4.5. НЕКОТОРЫЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

4.5а. Равномерное распределение. Равномерное распределение определяется функциями

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b, \\ 0 \text{ в остальных случаях}; \end{cases} \tag{4.36}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ (x-a)/(b-a), & a < x < b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases} \tag{4.37}$$

Функции надежности. Так как $t \geqslant 0$, полагаем $a \geqslant 0$.

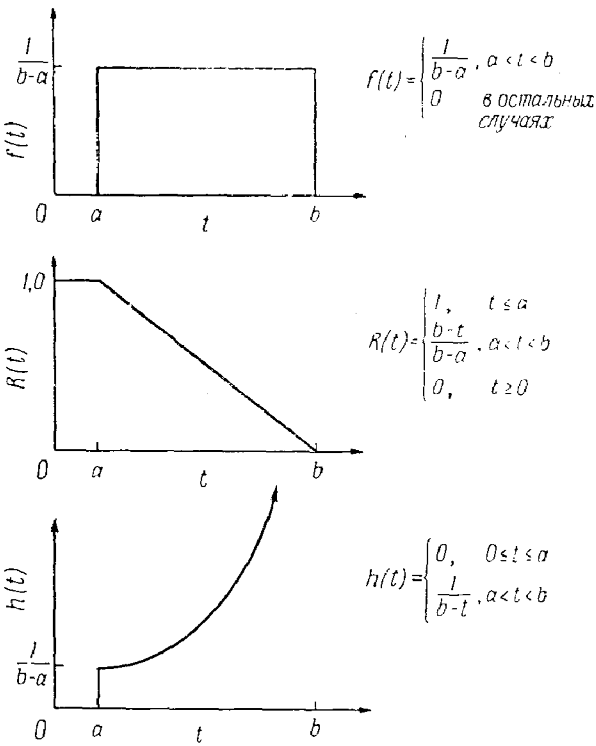
$$R(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ \dfrac{b-t}{b-a}, & a < t < b, \\ 0 & t \geqslant b. \end{cases} \tag{4.38}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ \dfrac{1}{b-t}, & a < t < b. \end{cases} \tag{4.39}$$

Таблица 4.19

Свойства равномерного распределения (фиг. 4.9)

Характеристическая функция	$M_X(t) = \dfrac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)\,t}$
Среднее	$\mu = \dfrac{b+a}{2}$
Дисперсия	$\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Третий центральный момент	$\mu_3 = 0$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = \dfrac{(b-a)^4}{80}$
Коэффициент вариации	$\eta = \dfrac{b-a}{\sqrt{3}\,(b+a)}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 0$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 1{,}8$



Фиг. 4.9. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для равномерного распределения.

10 Зак. 198.

4.5б. Треугольное распределение. Треугольное распределение определяется функциями

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a<x\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2}<x<b,\\ 0, & x\geqslant b.\end{cases} \tag{4.40}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a<x\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ 1-\dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2}<x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases} \tag{4.41}$$

Функции надежности. Так как $t\geqslant 0$, полагаем $a\geqslant 0$.

$$R(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ 1-2\dfrac{(t-a)^2}{(b-a)^2}, & a<t\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ \dfrac{2(b-t)^2}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2}<t<b,\\ 0, & t\geqslant b.\end{cases} \tag{4.42}$$

$$h(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ \dfrac{4(t-a)}{[(b-a)^2-2(t-a)^2]}, & a<t\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ \dfrac{2}{b-t}, & \dfrac{a+b}{2}<t<b.\end{cases} \tag{4.43}$$

4.5в. Нормальное распределение. Нормальное распределение определяется следующими двухпараметрическими функциями:

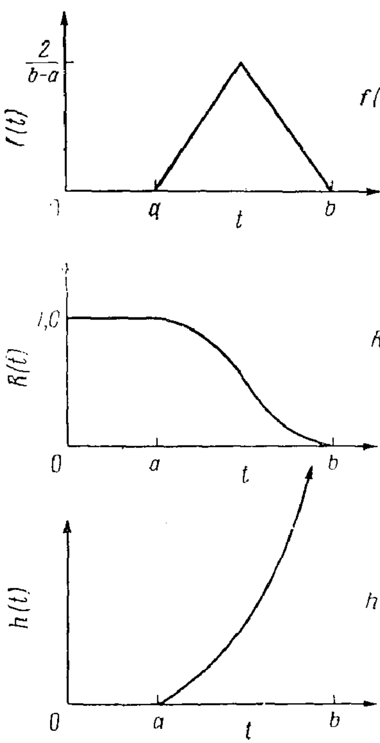
$$f(x;\,\mu,\,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty,\ \sigma>0, \tag{4.44}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,\quad -\infty<x<\infty. \tag{4.45}$$

Таблица 4.20

Свойства треугольного распределения (фиг. 4.10)

Характеристическая функция	$M_X(t) = \dfrac{4\left(e^{bt/2} - e^{at/2}\right)^2}{t^2\,(b-a)^2}$
Среднее	$\mu = \dfrac{a+b}{2}$
Дисперсия	$\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{24}$
Третий центральный момент	$\mu_3 = 0$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = \dfrac{(b-a)^4}{240}$
Коэффициент вариации	$\eta = \dfrac{b-a}{\sqrt{6}\,(b+a)}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 0$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 2{,}4$



$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le a \\ \dfrac{4(t-a)}{(b-a)^2}, & a < t \le \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{4(b-t)}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2} < t < b \\ 0, & t \ge b \end{cases}$$

$$R(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le a \\ 1 - \dfrac{2(t-a)^2}{(b-a)^2}, & a < t \le \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{2(b-t)^2}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2} < t < b \\ 0, & t \ge b \end{cases}$$

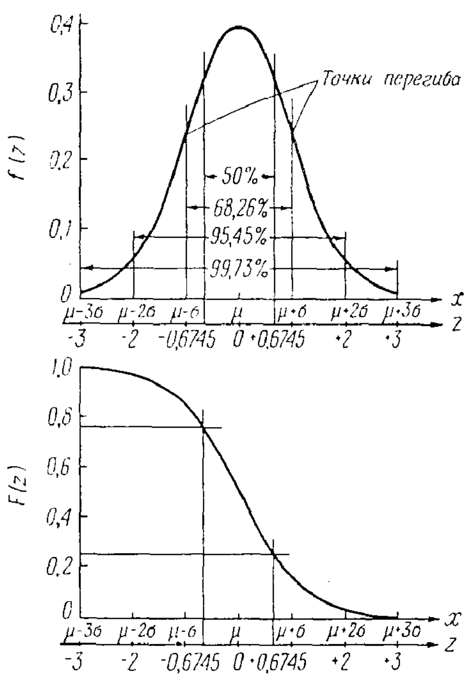
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \dfrac{4(t-a)}{(b-a)^2 - 2(t-a)^2}, & a < t \le \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{2}{b-t}, & \dfrac{a+b}{2} < t < b \end{cases}$$

Фиг. 4.10. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для треугольного распределения.

Таблица 4.21

Свойства нормального распределения (фиг. 4.11)

Характеристическая функция	$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Среднее	$\mu = \mu$
Дисперсия	$\sigma^2 = \sigma^2$
Третий центральный момент	$\mu_3 = 0$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = 3\sigma^4$
Коэффициент вариации	$\eta = \dfrac{\sigma}{\mu}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 0$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3$



Фиг. 4.11. Плотность распределения и интегральная функция распределения для нормального закона.

Для $Z = (X - \mu)/\sigma$ — нормально распределенной случайной нормированной величины получаем:

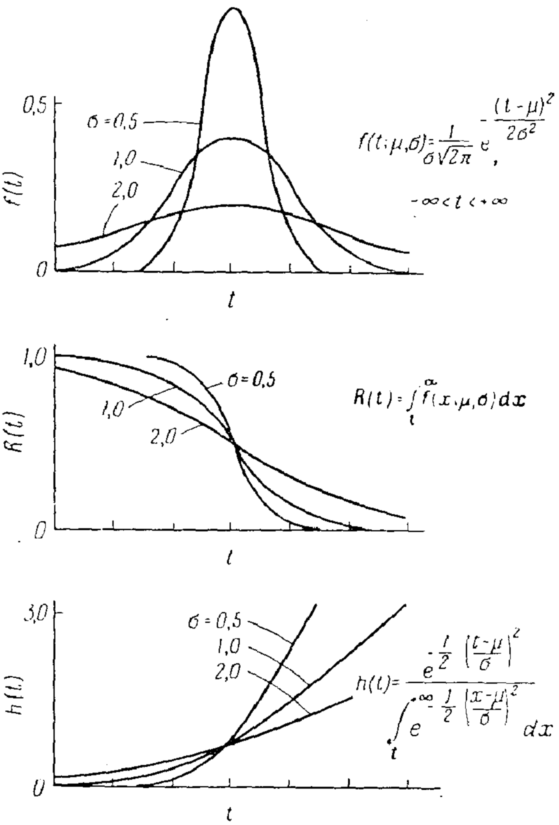
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty, \tag{4.46}$$

$$\mu_Z = 0, \quad \sigma_Z^2 = 1, \quad \alpha_{3Z} = 0, \quad \alpha_{4Z} = 3,$$

$$M_Z(t) = e^{t^2/2},$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-z^2/2} dz. \tag{4.47}$$

Нормированное нормальное распределение приведено в табл. А.4.



Фиг. 4.12. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для нормального закона.

Замечания

1. Обозначение нормального распределения: $N(\mu, \sigma^2)$.

2. Нормальное распределение является колоколообразным и симметричным относительно точки $x = \mu$ и имеет точки перегиба при значениях $x = \mu \pm \sigma$.

3. Распределение имеет одну моду в точке $x = \mu$, которая является также медианой.

4. Так как плотность нормального распределения отлична от нуля в интервале $(-\infty, \infty)$, то среднее значение μ должно быть существенно больше нуля и $(\mu - 3\sigma)$ должно быть также положительно, если для положительного аргумента X вместо усеченного нормального распределения приближенно использовать нормальное распределение.

5. Распределение используют обычно для описания износовых отказов.

6. Интенсивность отказов с увеличением времени возрастает.

7. Нормальное распределение является предельным для многих распределений, например для биномиального и гамма-распределения.

8. Таблицы нормального распределения[1]) $f(x)$ и $2F(x) - 1$, где $x = 0(0{,}0001)1(0{,}001)7{,}80$, можно найти в справочнике Tables of Probability Functions, Natl. Bur. Standards, *Appl. Math.*, Ser. 23, 1953.

9. Если X_i — случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением μ_i и дисперсией σ_i^2 $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, то случайная величина

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

будет нормально распределена со средним значением

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

и дисперсией

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2.$$

Примечание. Если выборка получена из нормальной совокупности со средним значением μ и дисперсией σ^2, то случайная

[1]) См. также [29*]. — *Прим. ред.*

величина Y нормально распределена со средним значением

$$\mu \sum_{i=1}^{n} a_i$$

и дисперсией

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Следовательно, выборочное среднее $Y = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ распределено нормально с $\mu_{\bar{x}} = \mu$ и дисперсией $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$.

Пример 4.42. Предположим, что время безотказной работы устройства является нормально распределенной случайной величиной с $\mu = 800$ *час* и $\sigma = 50$ *час*. Какова вероятность, что устройство проработает свыше 875 *час*?

$$z = \frac{t - \mu}{\sigma} = (875 - 800)/50 = 1{,}5.$$

Из табл. А.4 находим $P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$. Следовательно,

$$P(t > 875) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 = R.$$

Оценка параметра μ. Выборочное среднее — несмещенная оценка максимального правдоподобия среднего μ, т. е.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}. \qquad (4.48)$$

Оценка параметра σ^2. Выборочная дисперсия является несмещенной оценкой для σ^2, если она задается формулой

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = s^2. \qquad (4.49)$$

Оценка максимального правдоподобия $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/n$ является смещенной оценкой.

Примечание. Ни величина s, ни $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/n}$ не являются несмещенными оценками для σ.

Доверительные пределы для μ. Доверительные пределы для μ зависят от того, известна величина σ^2 или неизвестна. Соответствующие формулы приведены в табл. 4.22.

Таблица 4.22

Доверительные пределы для среднего значения нормального распределения

Вид оценки	σ^2	Доверительные пределы	
		$\mu_н$	$\mu_в$
Двусторонняя	Известна	$\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	Неизвестна	$\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$\overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$
Односторонняя (только верхний предел)	Известна		$\overline{X} + z_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	Неизвестна		$\overline{X} + t_{\gamma;\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$
Односторонняя (только нижний предел)	Известна	$\overline{X} - z_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
	Неизвестна	$\overline{X} - t_{\gamma;\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	

Примечания. 1. z — нормально распределенная нормированная случайная величина.
2. t — случайная величина, распределенная по закону Стьюдента с $n-1$ степенями свободы

Пример 4.43. Взяты пять конденсаторов с номинальной емкостью 10 *мкф*. В результате измерений получены следующие результаты: 9,9; 10,2; 10,3; 10,3; 9,8 *мкф*. Каковы 95%-ные доверительные пределы для μ?

$$\bar{x} = (9{,}9 + 10{,}2 + 10{,}3 + 10{,}3 + 9{,}8)/5 = 10 \text{ мкф},$$

$$s^2 = [(9{,}9 - 10{,}1)^2 + (10{,}2 - 10{,}1)^2 + (10{,}3 - 10{,}1)^2 + \\ + (10{,}3 - 10{,}1)^2 + (9{,}8 - 10{,}1)^2]/4 = 0{,}055 \text{ мкф}^2.$$

Из табл. А.5 находим $t_{0{,}975;\,4} = 2{,}776$. Используя табл. 4.22, получаем

$$\mu_н = 10{,}1 - 2{,}776\,(0{,}2345/\sqrt{5}) = 10{,}1 - 0{,}3 = 9{,}8 \text{ мкф},$$

$$\mu_в = 10{,}1 + 2{,}776\,(0{,}2345/\sqrt{5}) = 10{,}1 + 0{,}3 = 10{,}4 \text{ мкф}.$$

Следовательно, на 95% мы уверены в том, что истинное среднее значение лежит между 9,8 и 10,4 *мкф*.

Доверительные пределы для σ^2. Для получения доверительных пределов параметра σ^2 используется распределение хи-квадрат.

Двусторонние пределы

$$\sigma_{\text{н}}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};\,n-1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};\,n-1}}, \tag{4.50}$$

$$\sigma_{\text{в}}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};\,n-1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};\,n-1}}. \tag{4.51}$$

Односторонние пределы

$$\sigma_{\text{в}}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\gamma;\,n-1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{1-\gamma;\,n-1}}, \tag{4.52}$$

$$\sigma_{\text{н}}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\gamma;\,n-1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{\gamma;\,n-1}}. \tag{4.53}$$

Односторонний нижний предел используется редко, так как обычно в нем возникает необходимость при больших значениях дисперсии. Доверительные пределы для σ можно получить, извлекая корень квадратный из доверительных пределов для σ^2. Это не является точным решением задач, но ошибка обычно незначительна.

Пример 4.44. 90%-ные доверительные пределы для σ^2 в примере 4.43 равны

$$\sigma_{\text{н}}^2 = \frac{0{,}22}{\chi^2_{0{,}95;\,4}} = \frac{0{,}22}{9{,}49} = 0{,}023 \text{ мкф}^2,$$

$$\sigma_{\text{в}}^2 = \frac{0{,}22}{\chi^2_{0{,}05;\,4}} = \frac{0{,}22}{0{,}0711} = 3{,}09 \text{ мкф}^2.$$

Значения χ^2 указаны в табл. А.6.

Проверка гипотез

Пример 4.45. Предположим, что время безотказной работы электронной лампы — случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением $\mu = 200$ *час*. На основании случайной выборки из пяти новых электронных ламп

Таблица 4.23

Проверка гипотезы: параметр нормального распределения μ равен μ_0 (уровень значимости α)

$H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

Дисперсия σ^2 известна:

Статистика $\qquad z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Гипотеза H_0 отвергается, если $|z| > z_{1-\alpha/2}$

Дисперсия σ^2 неизвестна:

Статистика $\qquad t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Гипотеза H_0 отвергается, если $|t| > t_{1-\alpha/2;\ n-1}$

Таблица 4.24

Проверка односторонней гипотезы о параметре нормального распределения (уровень значимости α)

$H_0: \mu \leqslant \mu_0$ $\qquad$ $H_1: \mu > \mu_0$

Дисперсия σ^2 известна:

Статистика $\qquad z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Гипотеза H_0 отвергается, если $z > z_{1-\alpha}$

Дисперсия σ^2 неизвестна:

Статистика $\qquad t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Гипотеза H_0 отвергается, если $t > t_{1-\alpha;\ n-1}$

$H_0: \mu \geqslant \mu_0$ $\qquad$ $H_1: \mu < \mu_0$

Дисперсия σ^2 известна:

Статистика $\qquad z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Гипотеза H_0 отвергается, если $z < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$

Дисперсия σ^2 неизвестна:

Статистика $\qquad t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Гипотеза H_0 отвергается, если $t < t_{\alpha;\ n-1} = -t_{1-\alpha;\ n-1}$

получены оценки среднего значения $\bar{x} = 240$ *час* и стандартного отклонения $s = 40$ *час*. Есть ли какая-нибудь уверенность в том, что эти новые электронные лампы будут работать в среднем более 200 *час*?

$$H_0: \mu \leqslant 200, \quad H_1: \mu > 200 \text{ час}.$$

Пусть $\alpha = 0{,}05$. Из табл. 4.24 находим соответствующую статистику

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = (240 - 200)/(40/2) = 2{,}0.$$

Из табл. А.5 находим $t_{0,95;\,4} = 2{,}132$. Так как $t < t_{0,95;\,4}$, принимается гипотеза H_0; следовательно, нет уверенности в том, что эти новые электронные лампы проработают свыше 200 *час*.

Таблица 4.25

Проверка гипотезы о равенстве средних значений двух нормально распределенных величин (дисперсии равны, но неизвестны)

$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
Уровень значимости	α
Статистика	$t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$, где $s^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \dfrac{s^2}{n_1} + \dfrac{s^2}{n_2}$ и $s^2 = \dfrac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$.

Гипотеза H_0 отвергается, если $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2}$.

Метод, указанный в табл. 4.25, предполагает, что дисперсии равны, но неизвестны. Если имеются какие-либо сомнения в равенстве дисперсий, то необходимо специально проверить гипотезу о равенстве дисперсий по методу, изложенному в табл. 4.28. Если гипотеза равенства дисперсий отвергается, то следует использовать приближенный метод проверки равенства двух средних, указанный в табл. 4.26.

Таблица 4.26

Проверка гипотезы о равенстве средних значений двух нормально распределенных величин (дисперсии неравны и неизвестны)

$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
Уровень значимости	α
Статистика	$t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$
Гипотеза H_0 отвергается, если	$\lvert t \rvert > \dfrac{\dfrac{s_1^2}{n_1} t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n_1-1} + \dfrac{s_2^2}{n_2} t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n_2-1}}{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$.

Примечание. В таблице представлен приближенный, но вполне приемлемый по точности метод.

Пример 4.46. Предположим, что по выборочным данным определены:

$$\bar{x}_1 = 42{,}3; \quad s_1^2 = 2{,}25; \quad n_1 = 15;$$

$$\bar{x}_2 = 41{,}1; \quad s_2^2 = 12{,}25; \quad n_2 = 20.$$

Предполагая распределения нормальными, проверим гипотезу о том, что $\mu_1 = \mu_2$ с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Полученные данные отвергают гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ равенства дисперсий. (Метод проверки изложен в табл. 4.28.) Используя табл. 4.26, получаем

$$t_{\text{взвешенное}} \approx 2{,}10, \quad t = (42{,}3 - 41{,}1)/0{,}88 = 1{,}38 < 2{,}10.$$

Следовательно, принимаем гипотезу H_0: $\mu_1 = \mu_2$.

Примечание. В случае попарного сравнения данных разность значений пары рассматриваем как случайную величину D и проверяем гипотезу $H_0: \mu_D = 0$ при альтернативной гипотезе $H_1: \mu_D \neq 0$. Вычисляем среднее значение разности и стандартное отклонение. Гипотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2$ отвергается, если $t > t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1}$ или $t < -t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1}$, где

$$t = \frac{\overline{D}}{s_{\overline{D}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} [(x_{1i} - x_{2i}) - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)]^2}{n(n-1)}}}. \quad (4.54)$$

Пример 4.47. Используя данные примера 4.46 с $\alpha = 0,10$, проверим гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Из табл. А.7 получаем $F = 2,25/12,25 = 0,18 < F_{0,05;\,14;\,19} = 0,417$. Следовательно, гипотеза H_0 отвергается.

4.5г. Логарифмически нормальное распределение. *Логарифмически нормальное распределение* определяется следующей трехпараметрической плотностью вероятности:

$$f(x;\ \gamma,\ \mu,\ \sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-\gamma)\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{[\ln(x-\gamma)-\mu]^2}{2\sigma^2}}, & x > \gamma > 0,\ \sigma > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.55)$$

Таблица 4.27

Проверка гипотезы о равенстве дисперсии нормально распределенной величины значению σ_0^2

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
Уровень значимости	α
Статистика	$\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2}$
Гипотеза H_0 отвергается, если	$\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,n-1}$ или $\chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}$.

Таблица 4.28

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Уровень значимости	α
Статистика	$F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$
Гипотеза H_0 отвергается, если	$F < F_{\frac{\alpha}{2};\,n_1-1;\,n_2-1}$, $F > F_{1-\frac{\alpha}{2};\,n_1-1;\,n_2-1}$.

Примечание. Статистика F представляет собой отношение большей дисперсии к меньшей. В этом случае гипотеза H_0 отвергается, если $F \geqslant F_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu_1;\,\nu_2}$, где ν_1 — число степеней свободы числителя, а ν_2 — число степеней свободы знаменателя.

Таблица 4.29

Свойства логарифмически нормального распределения ($\gamma = 0$) (фиг. 4.13)

Среднее значение	$M(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
Дисперсия	$\mu_2 = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$
Третий центральный момент	$\mu_3 = e^{3\mu + 3\sigma^2/2}(e^{\sigma^2} - 1)^2 (e^{\sigma^2} + 2)$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = e^{4\mu + 2\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)^2 (e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 3)$
Коэффициент вариации	$\eta = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\,(e^{\sigma^2} + 2)$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 + (e^{\sigma^2} - 1)(e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} + 6)$

Если положить $\gamma = 0$, то k-й начальный момент задается формулой

$$\nu_k = e^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx, & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases} \tag{4.56}$$

Функции надежности

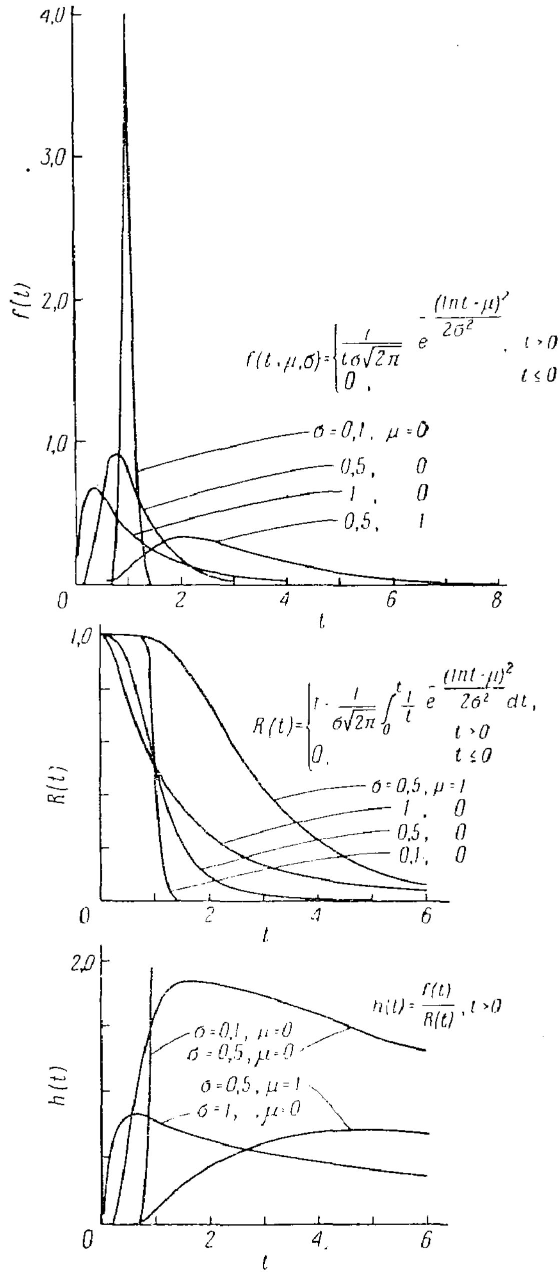
$$R(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant \gamma, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \displaystyle\int_t^\infty \frac{1}{x - \gamma} e^{-\frac{\{\ln(x-\gamma) - \mu\}^2}{2\sigma^2}}\,dx, & t > \gamma, \end{cases} \tag{4.57}$$

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{t-\gamma} e^{-\frac{\{\ln(t-\gamma) - \mu\}^2}{2\sigma^2}}}{\displaystyle\int_t^\infty \frac{1}{x-\gamma} e^{-\frac{\{\ln(x-\gamma) - \mu\}^2}{2\sigma^2}}\,dx}, & t > \gamma \\ 0 & t \leqslant \gamma. \end{cases} \tag{4.58}$$

Замечания

1. Как указано в работе [6], логарифмически нормальное распределение можно иногда ошибочно принять за экспоненциальное.

2. Логарифмически нормальное распределение имеет одну моду при $x = \gamma + e^{\mu - \sigma^2}$ и медиану при $x = e^{\mu}$. Распределение имеет положительную асимметрию.



$$f(t,\mu,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

$$R(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{1}{t}\,e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)},\quad t>0$$

Фиг. 4.13. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для логарифмически нормального распределения.

3. Если случайные величины X_1 и X_2 независимы и распределены по логарифмически нормальному закону, то их произведение $Y = X_1X_2$ также имеет логарифмически нормальное распределение.

4. $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x}{n}$ и $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\ln x - \hat{\mu})^2}{n-1}$ служат оценками для μ и σ соответственно.

5. Более подробный анализ этого распределения можно найти в книге [7].

6. Логарифмически нормальное распределение используют для описания износовых отказов.

7. Интенсивность отказов возрастает с течением времени.

Пример 4.48. Предположим, что время безотказной работы элемента — случайная величина, распределенная по логарифмически нормальному закону с медианой, равной 1000 *час*, $\gamma = 0$ и $\sigma = 1$. Используя табл. 4.29, получаем: медиана $= e^{\mu} = 1000$ *час* или $\mu = 6{,}908$ *час*, мода $= e^{\mu}e^{-\sigma^2} = 367{,}88$ *час*, дисперсия $= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) = 4{,}67 \cdot 10^6$ *час*^{2}. Какова вероятность того, что элемент будет работать по крайней мере 1500 *час*?

$$P(T > 1500) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1500}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - 6{,}908)^2}{2}} dx.$$

Пусть $y = \ln x - 6{,}908$; тогда

$$P(T > 1500) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\ln 1500 - 6{,}908}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Используя табл. А.4, получаем

$$P(T > 1500) = 0{,}34.$$

4.5д. Гамма-распределение. *Гамма-распределение* определяется двухпараметрической плотностью вероятности

$$f(x;\ \alpha,\ \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha!\,\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \tag{4.59}$$

причем параметр масштаба $\beta > 0$ и параметр формы $\alpha > -1$.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\alpha!\,\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{1}{\alpha!} \Gamma_{x/\beta}(\alpha + 1), \tag{4.60}$$

где $\Gamma_{x/\beta}(\alpha+1)$ — неполная гамма-функция, табулированная К. Пирсоном[1] (Tables of the Incomplete Gamma Function, Cambridge University Press, London, 1922).

Таблица 4.30

Свойства гамма-распределения (фиг. 4.14)

Характеристическая функция	$M_X(t)=(1-\beta t)^{-(\alpha+1)},\ t<\frac{1}{\beta}$
Среднее	$\mu=\beta(\alpha+1)$
Дисперсия	$\sigma^2=\beta^2(\alpha+1)$
Третий центральный момент	$\mu_3=2\beta^3(\alpha+1)$
Четвертый центральный момент	$\mu_4=3\beta^4(\alpha+1)(\alpha+3)$
Коэффициент вариации	$\eta=\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3=\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4=3+\frac{6}{\alpha+1}$

Функции надежности

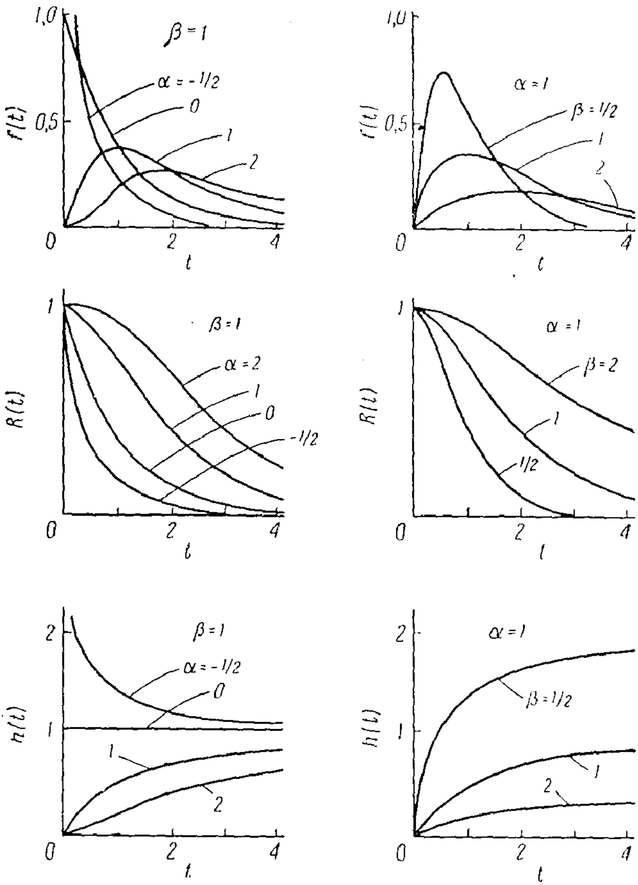
$$R(t)=\begin{cases}1, & t<0,\\ \int\limits_t^\infty \frac{1}{\alpha!\,\beta^{\alpha+1}}x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}dx=1-\frac{1}{\alpha!}\Gamma_{x/\beta}(\alpha+1), & t>0,\end{cases} \tag{4.61}$$

$$h(t)=\frac{t^\alpha e^{-\frac{t}{\beta}}}{\int\limits_t^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}dx}. \tag{4.62}$$

Замечания

1. Гамма-распределение имеет единственную моду при $x=\alpha\beta$, $\alpha\geqslant 0$.
2. Гамма-распределение переходит в экспоненциальное (см. разд. 4.5 ж), когда $\alpha=0$.
3. Интенсивность отказа убывает при $\alpha<0$, постоянна при $\alpha=0$ и возрастает при $\alpha>0$.

[1] См. также [30*], [31*]. — *Прим. ред.*



Фиг. 4.14. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для гамма-распределения.

4. Неполную гамма-функцию очень трудно рассчитать; однако если α — целое число, то

$$\int_{t}^{\infty} \frac{1}{\alpha!\,\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx = \sum_{i=0}^{\alpha} e^{-\frac{t}{\beta}} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{i} \frac{1}{i!}.$$

5. Сумма n независимых величин, подчиняющихся гамма-распределению с параметрами β и α_i, также имеет гамма-распределение с параметрами β и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Оценка параметров. Метод моментов. Используя табл. 4.30, получим

$$\beta(\alpha+1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}=\bar{x},$$

$$\beta^2(\alpha+1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=s^2.$$

Разрешая уравнения относительно α и β, находим оценки для α:

$$\hat{\alpha}=\left(\frac{\bar{x}}{s}\right)^2-1 \tag{4.63}$$

и для β:

$$\hat{\beta}=\frac{s^2}{\bar{x}}. \tag{4.64}$$

Пример 4.49. Предположим, что время безотказной работы элемента подчиняется гамма-распределению. В результате испытания пяти таких элементов до отказа без замены отказавших были получены наработки: 50, 75, 125, 250 и 300 *час*. Используя метод моментов для нахождения оценок параметров α и β, получим

$$\bar{x}=(50+75+125+250+300)/5=160 \text{ час},$$

$$s^2=\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2/4=48\,250/4=12\,062{,}5 \text{ час}^2.$$

Следовательно,

$$\hat{\alpha}=160^2/12\,062{,}5-1=1{,}12,\quad \hat{\beta}=12\,062{,}5/160=75{,}4.$$

Метод максимального правдоподобия. Оценка параметров α и β с помощью метода максимального правдоподобия состоит в решении уравнений (4.65) и (4.66):

$$-n\ln\beta-n\frac{\partial}{\partial\alpha}[\ln\Gamma(\alpha+1)]+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0, \tag{4.65}$$

$$-n\beta(\alpha+1)+\sum_{i=1}^{n}x_i=0. \tag{4.66}$$

Решение этих двух уравнений можно получить методом последовательных приближений. За первое приближение берутся оценки, найденные методом моментов. Следовательно, когда параметр α не слишком мал,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\ln\Gamma(\alpha+1)]=\psi(\alpha+1)\approx\ln\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Если считать параметр α известным, то из уравнения (4.66) найдем

$$\hat{\beta}=\frac{\bar{x}}{\alpha+1}.$$

Пример 4.50. Используя данные примера 4.49 и предположив, что $\alpha=1$, методом максимального правдоподобия найдем оценку для β:

$$\hat{\beta}=\bar{x}/(\alpha+1)=160/2=80.$$

Оценка и доверительный предел для $R(t)$. Если параметр α неизвестен, можно получить приближенные доверительные пределы для $R(t)$. Более подробные сведения приведены в книге [4]. Однако, если параметр α известен, можно определить точные доверительные пределы как для β, так и для надежности R. Из формулы (4.66) получаем

$$\beta=\bar{x}/(\alpha+1);$$

величина $2n\bar{x}/\beta$ имеет χ^2-распределение с $2n(\alpha+1)$ степенями свободы. Следовательно,

$$P\left[\frac{1}{\beta}\leqslant\frac{\chi^2_{\gamma;\ 2n(\alpha+1)}}{2n\bar{x}}\right]=\gamma. \tag{4.67}$$

Когда параметр α известен и $\hat{\beta}=\bar{x}/(\alpha+1)$,

$$\hat{R}(t)=\int\limits_{t/\hat{\beta}}^{\infty}\frac{u^{\alpha}e^{-u}}{\alpha!}\,du,$$

и, кроме того, если α принимает целочисленные значения, то

$$\hat{R}(t)=\sum_{i=0}^{\alpha}e^{-t/\hat{\beta}}\left(\frac{t}{\hat{\beta}}\right)^{i}\frac{1}{i!}.$$

Нижний доверительный предел $R(t)$ задается формулой

$$\hat{R}_{н}(t)=\int\limits_{t\chi^2_{\gamma;\ 2n(\alpha+1)}/2n\bar{x}}^{\infty}\frac{u^{\beta-1}e^{-u}}{\alpha!}\,du. \tag{4.68}$$

Пример 4.51. Используя данные примера 4.50, найдем точечную оценку и 95%-ный нижний предел для $R(t)$ при $t=400$ *час*:

$$\hat{R}=\sum_{i=0}^{1}e^{-t/\hat{\beta}}(t/\hat{\beta})^{i}\,1/i!=\sum_{i=0}^{1}e^{-400/80}5^{i}/i!=0{,}040.$$

Из табл. А.6 находим

$$\chi^2_{\gamma;\,2n\,(\alpha+1)} = \chi^2_{0,95;\,20} = 31{,}410,$$

следовательно,

$$\widehat{R}_{\text{п}} = \sum_{i=0}^{1} e^{-400\,(31{,}410)/1600}\,[400\,(31{,}410)/1600]^i/i\,! = 0{,}004.$$

4.5е. Бета-распределение. *Бета-распределение* определяется двухпараметрической плотностью вероятности

$$f(x;\ \alpha,\ \beta) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\beta!}\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}, & 0<x<1, \\ & \alpha>-1, \\ & \beta>-1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.69}$$

Обобщенная плотность вероятности задается выражением

$$f(y;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \eta) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!\,\eta^{\alpha+\beta-1}}(y-\gamma)^{\alpha}(\gamma+\eta-y)^{\beta}, & \gamma<y<\gamma+\eta, \\ \gamma \text{ действительно}, & \eta>0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Эта функция определена при любом положительном η. Так как γ может быть любым действительным числом, распределение можно задать в любой произвольной конечной области. Необходимо исследовать лишь свойства случайной величины X, так как $X = Y - \gamma/\eta$.

Начальный момент k-го порядка имеет вид

$$\nu_k = \frac{(\alpha+\beta+1)!}{(\alpha+\beta+k+1)!}\,\frac{(\alpha+k)!}{\alpha!},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\beta!}\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx, & 0<x<1, \\ 1, & x\geqslant 1. \end{cases} \tag{4.70}$$

Примечание

$$\int_0^x x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = B_x(\alpha+1,\ \beta+1)$$

— неполная бета-функция, табулированная К. Пирсоном (Tables of Incomplete Beta Function, Cambridge University Press, London, 1932).

Таблица 4.31

Свойства бета-распределения (фиг. 4.15)

Среднее	$\mu=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$
Дисперсия	$\sigma^2=\dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)}$
Третий центральный момент	$\mu_3=\dfrac{2(\alpha+1)(\beta+1)(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^3}$
Четвертый центральный момент $\mu_4=\dfrac{3(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^3}\left[\dfrac{(\alpha+2)(-\alpha+2\beta+1)}{\alpha+\beta+5}+\dfrac{(\alpha+1)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta+2}\right]$	
Коэффициент вариации	$\eta=\sqrt{\dfrac{\beta+1}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+3)}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta+4}\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+3}{(\alpha+1)(\beta+1)}}$
Коэффициент эксцесса $\alpha_4=\dfrac{3(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{(\alpha+\beta+4)(\alpha+1)(\beta+1)}\left[\dfrac{(\alpha+2)(-\alpha+2\beta+1)}{\alpha+\beta+5}+\dfrac{(\alpha+1)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta+2}\right]$	

Кроме того,

$$\sum_{x=0}^{k} C(n,\ x)\,p^x q^{n-x}=\int_p^1 C(k+1,\ n-k)\,y^k(1-y)^{n-k-1}\,dy$$

для k целых.

Функции надежности

$$R(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant 0\\ \displaystyle\int_t^1 \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\beta!}\,x^\alpha(1-x)^\beta\,dx= & \\ \displaystyle\quad =1-\frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\beta!}B_t(\alpha+1,\ \beta+1), & 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{4.71}$$

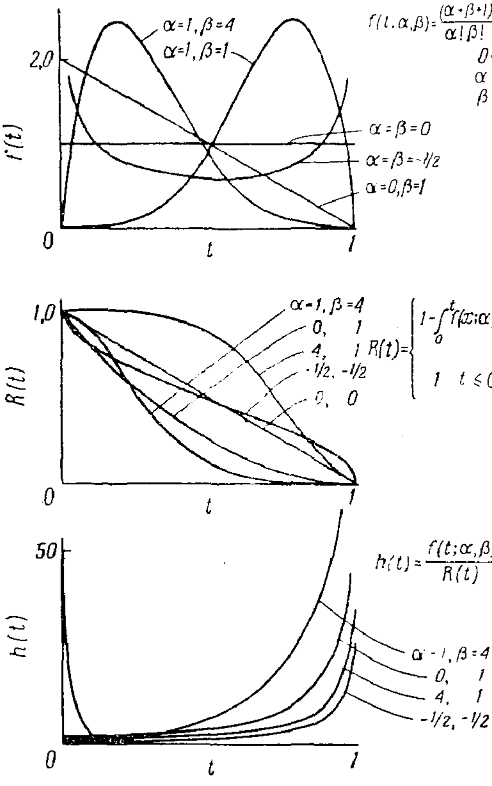
$$h(t)=\begin{cases}0, & t\geqslant 1,\\ 0, & t\leqslant 0,\\ \dfrac{t^\alpha(1-t)^\beta}{\displaystyle\int_t^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,dx} & \text{в остальных случаях.}\end{cases}\tag{4.72}$$

Замечания

1. Модой распределения служит значение $x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

2. Таблицы неполной бета-функции:

а) Thompson C. M., Tables of Percentage Points of the Incomplete Beta Function, *Biometrika*, 32, 151 (1941).



$f(t,\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!}t^{\alpha}(1-t)^{\beta}$, $0<t<1$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$

$R(t)=\begin{cases}1-\int_0^t f(x;\alpha,\beta)\,dx, & 0<t<1\\ 1 & t\leqslant 0\end{cases}$

$h(t)=\frac{f(t;\alpha,\beta)}{R(t)}$

Фиг. 4.15. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для бета-распределения.

б) Hartley H. O. Fitch E. R., A Chart for the Incomplete Beta Function and the Cumulative Binomial Distribution, *Biometrika*, 38, 423 (1951).

3. Асимметрия распределения зависит от значений α и β:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_3 = 0,$$
$$\alpha < \beta, \quad \alpha_3 > 0,$$
$$\alpha > \beta, \quad \alpha_3 < 0.$$

4. Если $\alpha=\beta=0$, то бета-распределение превращается в равномерное распределение (разд. 4.5а).

5. При $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ функция распределения равна арксинусу.

6. Другие свойства распределения можно найти в работе Као [8].

Оценка параметров α *и* β. Для оценки распределения параметров можно использовать либо метод моментов, либо метод максимального правдоподобия (разд. 4.7а).

4.5ж. Экспоненциальное распределение. Одним из распределений, наиболее часто встречающихся в теории надежности, является однопараметрическое экспоненциальное распределение, задаваемое плотностью вероятности:

$$f(x;\,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\tag{4.73}$$

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\int\limits_0^x e^{-x/\theta}\,dx=1-e^{-x/\theta}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\tag{4.74}$$

Функции надежности

$$R(t)=\begin{cases}\int\limits_t^\infty \dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,dx=e^{-t/\theta}, & t\geqslant 0,\\ 1, & t<0,\end{cases}\tag{4.75}$$

$$h(t)=\frac{1}{\theta}\,\frac{e^{-t/\theta}}{e^{-t/\theta}}=\frac{1}{\theta}.\tag{4.76}$$

Таблица 4.32

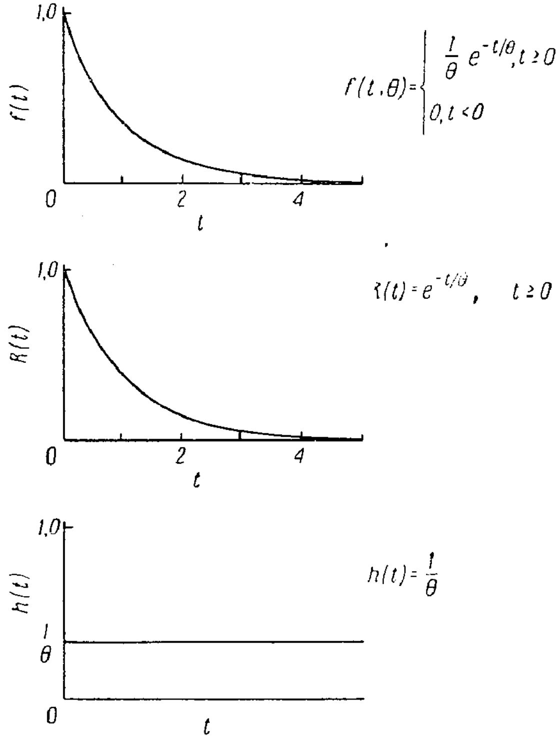
Свойства экспоненциального распределения (фиг. 4.16)

Характеристическая функция	$M_X(t)=(1-\theta t)^{-1}$, $t<1/\theta$
Среднее	$\mu=\theta$
Дисперсия	$\sigma^2=\theta^2$
Третий центральный момент	$\mu_3=2\theta^3$
Четвертый центральный момент	$\mu_4=9\theta^4$
Коэффициент вариации	$\eta=1$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3=2$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4=9$

Замечания

1. Экспоненциальное распределение является частным случаем и гамма-распределения, и распределения Вейбулла.

2. Это распределение характеризуется постоянной интенсивностью отказов $1/\theta$, которая служит также параметром распределения. Постоянная интенсивность отказов означает, что вероятность отказа системы не зависит от того, сколько времени



Фиг. 4.16. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для экспоненциального распределения.

она проработала до рассматриваемого момента времени. Это предположение недопустимо в случае отказов износового типа.

3. Обратная величина интенсивности отказов является средней наработкой на отказ.

4. Экспоненциальное распределение имеет место в случаях, когда аппаратура сложна и возможно большое число отказов различных элементов аппаратуры с разной интенсивностью.

5. Если отказы элементов какой-либо аппаратуры распределены по экспоненциальному закону, то и отказы самой аппаратуры имеют экспоненциальное распределение, а интенсивность

отказов аппаратуры равна сумме интенсивностей отказов ее элементов.

Примечание. В последнем случае необходимо предполагать независимость отказов элементов[1]).

Оценка параметра θ. Оценка максимального правдоподобия параметра θ равна:

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \bar{x}. \tag{4.77}$$

При испытании определенного числа изделий оценку указанного параметра можно производить до момента отказа последнего образца. При этом необходимо различать испытания без замены и с заменой отказавших изделий. Если отказы n испытываемых изделий упорядочить по времени возникновения $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant t_r$ (отказало r изделий), то оценками максимального правдоподобия для θ будут следующие.

Испытания без замены отказавших изделий

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{n} \quad \text{для} \quad r = n, \tag{4.78}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)\, t_r\right] \quad \text{для} \quad r < n. \tag{4.79}$$

Примечание. Числитель в формулах (4.78) и (4.79) представляет собой суммарную наработку всех испытываемых образцов.

Испытания с заменой отказавших изделий. Пусть X_i представляет интервал времени между $(i-1)$-м и i-м отказами.

Случайные величины X_i экспоненциально распределены и независимы (если наработка на отказ t_i экспоненциально распределена, то и время между отказами X_i также имеет экспоненциальное распределение). Оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\theta} = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{r} x_i}{r} = \frac{nt_r}{r}. \tag{4.80}$$

Доверительный интервал для параметра θ определяется [17] выражением

$$P\left[\frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};\,2r}} < \theta < \frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};\,2r}}\right] = \gamma. \tag{4.81}$$

---

[1]) А также последовательное соединение элементов. — *Прим. ред.*

Примечание. Если испытания заканчиваются в заранее установленный момент времени t, то в формуле (4.81) в нижнем доверительном пределе следует заменить[1]) число степеней свободы с $2r$ на $(2r+2)$.

Пример 4.52. Пусть испытание на безотказность проводят на десяти изделиях без замены отказавших. Первые пять отказов произошли после 50, 75, 125, 250 и 300 *час* работы. Предполагая, что время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону, определим точечную оценку вероятности безотказной работы и ее 95%-ный нижний доверительный предел для 400 *час* работы. Из формулы (4.79) находим

$$\hat{\theta} = [50 + 75 + 125 + 250 + 300 + 5\,(300)]/5 = 450 \text{ час}.$$

Следовательно,

$$\hat{R} = e^{-\frac{t}{\hat{\theta}}} = e^{-\frac{400}{460}} = 0{,}419.$$

Для нижнего доверительного предела

$$P\left[\theta > \frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{0,95;\ 10}} = (10 \times 460)/18{,}307 = 251{,}3\right] = 0{,}95.$$

Следовательно,

$$\hat{R}_{н} = e^{-t\,\frac{\chi^2_{0,95;\ 10}}{2r\hat{\theta}}} = e^{-\frac{400}{251{,}3}} = e^{-1{,}59} = 0{,}204.$$

Примечание. Если $\hat{\theta}$ — оценка максимального правдоподобия для θ, то $\hat{R}(t) = e^{-t/\hat{\theta}}$ будет оценкой максимального правдоподобия для $R(t)$ при условии, что $R(t)$ — монотонная функция. Подстановкой нижнего доверительного предела θ в функцию надежности можно получить нижний доверительный предел функции надежности $R(t)$. Если функция надежности зависит от двух и более неизвестных параметров, можно получить точечную оценку надежности, подставив точечные оценки максимального правдоподобия неизвестных параметров в функцию надежности. Однако в общем случае мы не можем получить нижний доверительный предел надежности путем подстановки в функцию надежности нижних доверительных пределов параметров.

Пример 4.53. Предположим, что пять отказавших изделий, рассмотренных в примере 4.52, заменены новыми. Из уравнения (4.80)

$$\hat{\theta} = n \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{r} = 10\,[50 + 25 + 50 + 125 + 50]/5 = 600 \text{ час}.$$

[1]) Кроме того, в числителе заменить $2r\theta$ на $2t$. — *Прим. ред.*

Следовательно,

$$\hat{R}=e^{-\frac{400}{600}}=0{,}512 \text{ и } \hat{R}_{\text{н}}=e^{-\left(\frac{400\cdot 18{,}307}{2\cdot 5\cdot 600}\right)}=0{,}293.$$

Так как χ^2 для больших степеней свободы подчинено приблизительно нормальному закону распределения, то для оценки приближенных доверительных пределов можно использовать нормальное распределение. Пусть $\hat{\theta}=\bar{t}$; тогда $\bar{t}$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$, а $(\bar{t}-\theta)\sqrt{n}/\theta$ — приблизительно нормальное распределение с параметрами (0, 1).
Поэтому

$$P\left[(\bar{t}-\theta)\frac{\sqrt{n}}{\theta}<z_\gamma\right]=\gamma$$

и

$$P\left[\frac{\bar{t}}{1+\frac{z_\gamma}{\sqrt{n}}}<\theta\right]=\gamma, \tag{4.82}$$

и, следовательно,

$$\hat{R}_{\text{н}}(t)=e^{-\frac{t}{\bar{t}}\left(1+\frac{z_\gamma}{\sqrt{n}}\right)}.$$

Проверка гипотез. Для проверки гипотезы о равенстве параметра θ значению θ_0 используют χ^2-распределение.

$$H_0:\theta=\theta_0, \quad H_1:\theta\neq\theta_0.$$

Пусть α — уровень значимости. Вычисляем величину

$$\chi^2=\frac{2r\hat{\theta}}{\theta},$$

и если

$$\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,2r} \quad \text{или} \quad \chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,2r},$$

гипотеза H_0 отвергается. В области надежности представляет интерес безотказная работа за период t, и требуется гарантия величины $\hat{R}_{\text{н}}$ с коэффициентом доверия γ:

$$\hat{R}_{\text{н}}=e^{-t\frac{\chi^2_{\gamma;\,2r}}{2r\hat{\theta}}} \quad \text{или} \quad \frac{\hat{\theta}}{t}=\frac{\chi^2_{\gamma;\,2r}}{2r\ln\left(\frac{1}{\hat{R}_{\text{н}}}\right)}. \tag{4.83}$$

Пример 4.54. Предположим, что $\hat{R}_{\text{н}}=0{,}90$, $\gamma=0{,}90$, $t=100$ *час.* Испытания восьми изделий проводятся до тех пор, пока не будет получено пять отказов. Пусть отказы наблюдались при наработках 175, 250, 500, 600 *час*.

$$\frac{\chi^2_{\gamma;\,2r}}{2r}=\frac{13{,}4}{8},\quad \ln\left(\frac{1}{\widehat{R}_{\text{н}}}\right)=0{,}10535,$$

$$\widehat{\theta}_{\text{c}}\geqslant\frac{13{,}4}{8}\cdot\frac{100}{0{,}10535}\approx 1{,}595\ \text{час},$$

$$\widehat{\theta}=(175+250+500+600+4\cdot 600)/4=981{,}25\ \text{час}.$$

Так как значение $\widehat{\theta}$ (наблюдаемое) $\leqslant\widehat{\theta}_c$, гипотеза о том, что вероятность безотказной работы в течение 100 *час* больше чем 0,90 для 90%-ного коэффициента доверия, отвергается.

Примечание. Выборочное среднее значение наработки на отказ должно превышать 1595 *час*, чтобы гарантировать вероятность безотказной работы, равную 90%, с 90%-ным коэффициентом доверия. Каково *среднее время до отказа* r-го изделия при испытаниях n образцов? Эпштейн показал, что в случае *испытания без замены отказавших образцов оно равно* [18]

$$M(t)=\theta\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n-i+1}.$$

В случае испытаний с *заменой отказавших образцов* [19]

$$M(t)=\frac{\theta r}{n}.$$

Последовательный анализ для проверки гипотезы о величине параметра θ рассмотрен в разд. 4.10.

Надежность системы параллельных элементов[1]. Надежность n параллельно включенных элементов определяется формулой

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-R_i(t)],\tag{4.84}$$

где $R_i(t)$ — надежность i-го элемента. Если $R_i(t)=e^{-\frac{t}{\theta_i}}$, то

$$R_i(t)=1-\frac{t}{\theta_i}+\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^2\frac{1}{2!}-\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^3\frac{1}{3!}+\ \ldots$$

и

$$1-R_i(t)=\frac{t}{\theta_i}-\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^3\frac{1}{3!}-\ \ldots\ .$$

[1]) Имеется в виду постоянное включение (или нагруженный резерв), когда и основной, и резервные элементы находятся в одном режиме и выполняют одинаковые функции. — *Прим. ред.*

Если t/θ_i много меньше единицы, то

$$1 - R_i(t) \approx \frac{t}{\theta_i}.$$

Следовательно, в этом случае

$$R(t) \approx 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{t}{\theta_i}. \tag{4.85}$$

Для трех параллельно включенных элементов с параметрами θ_1, θ_2, θ_3

$$R(t) = \sum_{i=1}^{3} e^{-\frac{t}{\theta_i}} - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} e^{-t\left(\frac{1}{\theta_i}+\frac{1}{\theta_j}\right)} + e^{-t\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}\right)}.$$

Если $\theta = \theta_i$, $i = 1, 2, 3$, то

$$R(t) = 3e^{-\frac{t}{\theta}} - 3e^{-\frac{2t}{\theta}} + e^{-\frac{3t}{\theta}}.$$

Надежность систем с замещением элементов. В системе с замещением элементов один или более элементов поочередно включаются в работу только после отказа предыдущего. В таких системах требуются устройства, обнаруживающие отказ, и переключатели. Надежность системы с замещением в случае одного резервного элемента определяется по формуле[1])

$$R(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right), \tag{4.86}$$

где $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$, представляет собой надежность каждого элемента.

Если надежность контролирующего и переключающего устройства равна величине $R_п$, отличной от единицы, то

$$R(t) = e^{-\lambda_1 t} + R_п \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right). \tag{4.87}$$

Если значения λ_i равны, то формула (4.86) упрощается и принимает вид

$$R(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t), \tag{4.88}$$

а соотношение (4.87) записывается в виде

$$R(t) = e^{-\lambda t}(1 + R_п \lambda t). \tag{4.89}$$

---

[1]) Имеется в виду ненагруженный (холодный) режим элемента, находящегося в резерве. Замещение при нагруженном (горячем) режиме с абсолютно надежным переключателем не отличается от постоянного параллельного включения. — *Прим. ред.*

В общем случае, когда основной элемент замещают $(n-1)$ резервных с надежностью $R_i(t)=e^{-\lambda t}$, $i=1, 2, \ldots, n$, имеем

$$R(t)=e^{-\lambda t}\left[1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right]. \tag{4.90}$$

Пример 4.55. Предположим, что интенсивность отказа элемента равна $\lambda=0{,}006$. Для 10-часовой работы с одним резервным элементом получаем

$$R=e^{-\lambda t}(1+\lambda t)=e^{-0{,}06}\cdot 1{,}06=0{,}998.$$

Для двух параллельных элементов имеем

$$R=1-(1-e^{-\lambda t})^2=0{,}997.$$

4.5з. **Распределение Вейбулла** [20]. Распределение Вейбулла задается трехпараметрической плотностью вероятности

$$f(x;\ \alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}(x-\gamma)^{\beta-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^\beta}{\alpha}}, & x\geqslant\gamma,\\ \qquad\gamma\geqslant 0,\quad \beta>0,\quad \alpha>0,\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases} \tag{4.91}$$

где α — параметр масштаба (иногда вводят $\eta=\alpha^{1/\beta}$ [9]), β — параметр формы, γ — параметр положения.

Если $\gamma=0$, начальный момент k-го порядка задается формулами

$$\nu_k=\alpha^{k/\beta}\Gamma\left(1+\frac{k}{\beta}\right),$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{(x-\gamma)^\beta}{\alpha}},\\ \qquad x\geqslant\gamma\geqslant 0,\quad \alpha>0,\quad \beta>0,\\ 0,\quad x<\gamma.\end{cases} \tag{4.92}$$

Функции надежности

$$R(t)=\begin{cases}1, & t<\gamma,\\ e^{-\frac{(t-\gamma)^\beta}{\alpha}}, & t\geqslant\gamma,\end{cases} \tag{4.93}$$

$$h(t)=\frac{\beta}{\alpha}(t-\gamma)^{\beta-1},\quad t\geqslant\gamma. \tag{4.94}$$

Таблица 4.33

Свойства распределения Вейбулла ($\gamma = 0$)
(фиг. 4.17)

Среднее	$\mu = \alpha^{1/\beta}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$
Дисперсия	$\sigma^2 = \alpha^{2/\beta}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2\right]$
Третий центральный момент	$\mu_3 = \alpha^{3/\beta}\left[\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) + 2\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^3\right]$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = \alpha^{4/\beta}\left[\Gamma\left(1+\frac{4}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) + 6\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2 - 3\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^4\right]$
Коэффициент вариации	$\eta = \sqrt{\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2} - 1}$

Коэффициент асимметрии

$$\alpha_3 = \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) + 2\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^3}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2\right]^{3/2}}$$

Коэффициент эксцесса

$$\alpha_4 = \frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) + 6\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2 - 3\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^4}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2\right]^2}$$

Замечания

1. Распределение имеет единственную моду

$$x = \gamma + \left[\alpha\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]^{1/\beta}, \quad \beta > 1.$$

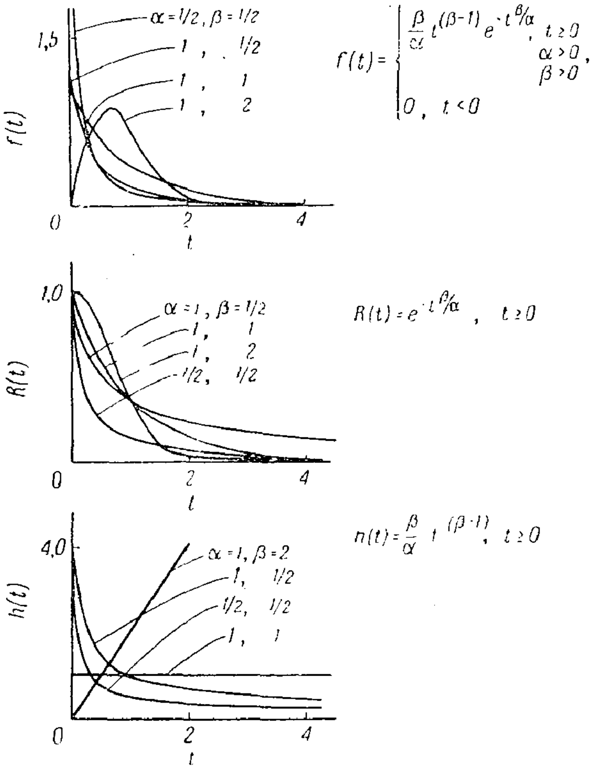
2. Распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное при $\beta = 1$.

3. Обычно полагают $\gamma = 0$. Отрицательные значения γ вводят для описания отказов при хранении.

4. Так как среднее время безотказной работы $M(X) = \alpha^{1/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ зависит от двух параметров, то надежность

рассчитывается не так просто, как в случае экспоненциального распределения.

5. Одним из достоинств распределения Вейбулла следует считать разнообразие форм кривых интенсивности отказов (фиг. 4.17).



Фиг. 4.17. Функции $f(t)$, $R(t)$ и $h(t)$ для распределения Вейбулла.

Оценка параметров. Оценки максимального правдоподобия α и β получают из уравнений

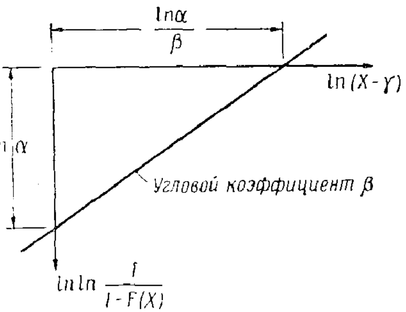
$$n\alpha - \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} = 0, \tag{4.95}$$

$$\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \ln t_i = 0. \tag{4.96}$$

Первое приближение для значения β можно получить, решая систему уравнений (4.95) и $\bar{t} = \alpha^{1/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$. Затем методом последовательных приближений находят $\hat{\alpha}$ и β. Обычно оценку параметра α проводят в предположении, что параметр β известен. Если параметр β известен, то

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} + (n-r)\, t_r^{\beta}}{r} \tag{4.97}$$

и случайная величина $2\frac{r\hat{\alpha}}{\alpha}$ распределена по закону χ^2 с $2r$ степенями свободы. Следовательно, нижний $100\gamma\%$-ный доверительный предел для α находится из уравнения



Фиг. 4.18. $\ln\ln 1/[1-F(X)] = \beta\ln(X-\gamma) - \ln\alpha$.

$$P\left[\frac{2r\hat{\alpha}}{\alpha} \leqslant \chi^2_{\gamma;\,2r}\right] = \gamma, \tag{4.98}$$

$$\hat{R}_{\text{н}}(t) = e^{-\frac{t^{\beta}\chi^2_{\gamma;\,2r}}{2r\alpha}}. \tag{4.99}$$

Пример 4.56. Предположим, что время безотказной работы в примере 4.49 распределено по закону Вейбулла с $\beta = 1{,}2$. Найдем 95%-ную точечную оценку и нижний доверительный предел вероятности безотказной работы в течение 400 *час*. Используя уравнение (4.97), получаем

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i^{1,2} + (n-r)\, t_r^{1,2}}{5} = (2308{,}5 + 4693{,}7)/5 = 1400,$$

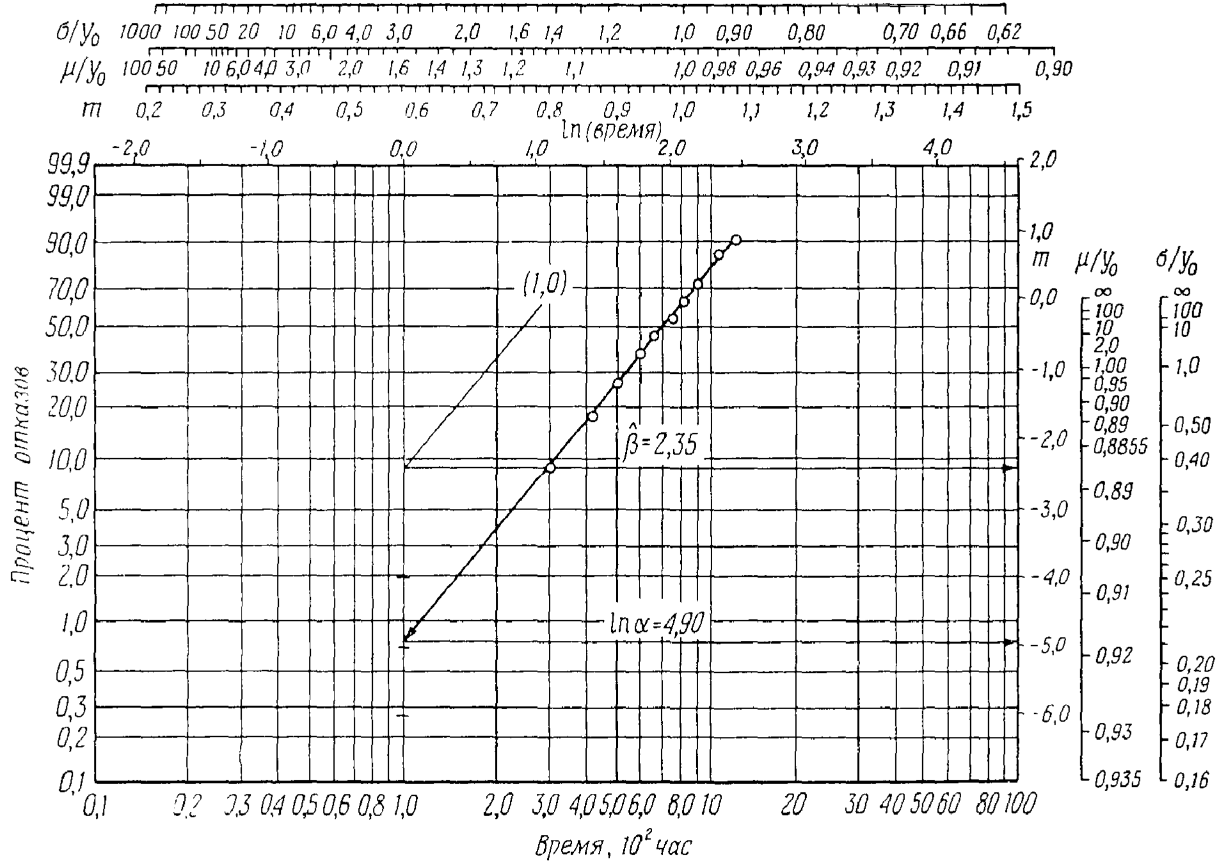
$$R = e^{-\frac{t^{\beta}}{\alpha}} = e^{-\frac{400^{1,2}}{1400}} = 0{,}387,$$

$$\hat{R}_{\text{н}} = e^{-\frac{t^{\beta}\chi^2_{\gamma;\,2r}}{2r\hat{\alpha}}} = e^{-\frac{400^{1,2}\cdot 18{,}307}{10\cdot 1400}} = 0{,}176.$$

Более простым методом оценки этих параметров является использование вероятностной бумаги для вейбулловского распределения, на которой функция распределения Вейбулла линеаризуется путем введения логарифмической шкалы аргумента и двойной логарифмической шкалы функции

$$\ln\ln\frac{1}{1-F(X)} = \beta\ln(X-\gamma) - \ln\alpha; \tag{4.100}$$

график этой функции изображен на фиг. 4.18.



Фиг. 4.19. Графическая оценка параметров распределения Вейбулла.

Пример 4.57. Предположим, что при первых десяти испытаниях на надежность были получены следующие результаты: 300, 410, 500, 600, 660, 750, 825, 900, 1050 и 1200 *час*. Если эти данные соответствуют распределению Вейбулла, то какие оценки параметров распределения можно получить, используя вероятностную бумагу? Чтобы нанести точки на график, необходимо определить значения величины $i/(10+1)$, которые оказываются равными 0,09; 0,18; 0,27; 0,36; 0,46; 0,55; 0,64; 0,73; 0,82 и 0,91. На вероятностной бумаге Вейбулла (фиг. 4.19) эти точки располагаются на прямой линии $\hat{\gamma} = 0$. По расположению этой прямой определяются величины $\hat{\beta} = 2{,}35$ и

$$\ln \hat{\alpha} = 4{,}90, \quad \hat{\alpha} = 134{,}3 \; (X \text{ измеряется в сотнях часов}).$$

Более подробное описание методики работы с вероятностной бумагой Вейбулла можно найти в [9].

4.6. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

При исследовании надежности аппаратуры возникает необходимость в наблюдениях и регистрации данных. Так как в большинстве случаев невозможно получить сведения о всей совокупности, то отбирают и анализируют только часть ее. Если данные представляют всю совокупность, они носят исчерпывающий характер. Для выборки как части совокупности данные не только являются исчерпывающими для элементов выборки, но и в достаточной мере характеризуют элементы всей совокупности. Имеется много типов выборки, но среди них наиболее предпочтительна *случайная*.

Определение. *Случайной* называется такая выборка, когда любой член совокупности имеет равную возможность попасть в выборку.

Примечание. Множество случайных величин, выбранных из совокупности, обозначаем как x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Как и в предыдущих разделах, постоянные значения и параметры будем обозначать греческими буквами, если они относятся к совокупности, и латинскими буквами, если они относятся к выборке (исключение составляет обозначение χ^2). Функция выборочных значений также является выборочным значением. Функции выборочных значений $s = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются статистиками.

4.6а. Оценка характеристик, описывающих центр распределения.

Среднее арифметическое или выборочное среднее $\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}. \tag{4.101}$$

Если каждое значение x_i встречается с частотой f_i, то

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}. \qquad (4.102)$$

Выборочная медиана M_e. Средний член упорядоченной выборки или среднее арифметическое двух таких членов называется медианой [1]).

Выборочная мода M_0. Это значение, которое наиболее часто встречается в выборке.

Выборочное среднее геометрическое

$$\text{Ге}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}. \qquad (4.103)$$

Выборочное среднее гармоническое

$$\text{Га}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}. \qquad (4.104)$$

Примечание. $\text{Га}\leqslant\text{Ге}\leqslant\bar{x}$.

Пример 4.58. Пусть пять образцов отказали при наработках 75, 100, 110, 120, 130 *час*. Оценим характеристики центра распределения

$$\bar{x}=535/5=107\ \textit{час},\qquad \text{Ге}=\sqrt{\prod_{i=1}^{5} x_i}=105{,}2\ \textit{час},$$

$$M_e=110\ \textit{час},\qquad \text{Га}=\frac{5}{\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}}=103{,}2\ \textit{час}.$$

4.6б. Оценка характеристик рассеяния.

Размах. Пусть $x_{\text{мин}}$ — наименьший член совокупности x_i, а $x_{\text{макс}}$ — наибольший; *размахом* называют величину

$$R=x_{\text{макс}}-x_{\text{мин}}. \qquad (4.105)$$

---

[1]) Иначе говоря, если $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$ — упорядоченная выборка, то для $n=2m-1$ выборочная медиана равна x_m, а для $n=2m$ она равна $\frac{1}{2}(x_m+x_{m+1})$. — *Прим. ред.*

Выборочное среднее абсолютных отклонений

$$\mathrm{Co} = \frac{\sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} |}{n}. \tag{4.106}$$

Выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{4.107}$$

Если каждое значение x_i встречается с частотой f_i, то

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{4.108}$$

Выборочное стандартное отклонение

$$s = \sqrt{s^2}. \tag{4.109}$$

Пример 4.59. Вычислим характеристики рассеяния для данных примера 4.58:

$$R = 130 - 75 = 55 \text{ час}, \quad s^2 = 1780/4 = 445 \text{ час}^2,$$
$$\mathrm{CO} = 78/5 = 15{,}6 \text{ час}, \quad s = 21{,}1 \text{ час}.$$

Теорема. Если $x_i = u_i \pm k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\bar{x} = \bar{u} \pm k$ и $s_x = s_u$.

Теорема. Если $x_i = ku_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\bar{x} = k\bar{u}$ и $s_x = ks_u$.

Теорема. Если $u_i = \frac{x_i \pm k}{c}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\bar{x} = c\bar{u} \pm k$ и $s_x = cs_u$.

Теорема. Для x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}. \tag{4.110}$$

Теорема. Если $\bar{x}_1$ и s_1^2 — выборочное среднее и выборочная дисперсия случайных величин x_{1i} $i = 1, 2, \ldots, n_1$, и $\bar{x}_2$, s_2^2 — выборочное среднее и выборочная дисперсия величин x_{2i}, $i = 1, 2, \ldots$

..., n_2, то выборочное среднее и выборочная дисперсия объединенной выборки равны

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}, \tag{4.111}$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 - 1}, \tag{4.112}$$

где $\bar{x}$ определяется из формулы (4.111).

Пример 4.60. Вычислим среднее и дисперсию для следующих данных об отказах:

x_i, час	f_i	$u_i = (x_i - 350)/50$	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
250	1	−2	−2	4
300	2	−1	−2	2
350	4	0	0	0
400	3	+1	+3	3
450	2	+2	+4	8
Итого	12		+3	17

$$\bar{u} = \frac{3}{12} = 0{,}25, \qquad s_u^2 = \frac{\left(17 - \frac{9}{12}\right)}{11} = \frac{16{,}25}{11},$$

$$\bar{x} = 50\bar{u} + 350 = 362{,}5 \ \textit{час}, \qquad s_x^2 = 50^2\,\frac{16{,}25}{11} = 3693{,}18 \ \textit{час}^2.$$

4.6в. Распределение выборочных функций (статистик). *Определение.* Если из совокупности получены все возможные выборки объема n (с возвращением или без возвращения) и по полученным результатам для каждой выборки определено случайное значение некоторой выборочной функции, например выборочное среднее, то можно исследовать *распределение* этой выборочной *функции.*

Теорема. Если

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n},$$

то среднее и дисперсия для распределения выборочных средних из бесконечной совокупности (или конечной с возвращением) равны

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x \quad \text{и} \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}, \tag{4.113}$$

а для распределения выборочных средних из конечной совокупности объема N с возвращением

$$\mu_{\bar{x}}=\mu_x \quad \text{и} \quad \sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}. \tag{4.114}$$

Примечание. Для совокупности с конечной дисперсией чем больше объем выборки, тем с большей уверенностью можно считать, что выборочное среднее приближается к неизвестному среднему совокупности.

Теорема (центральная предельная). Если совокупность имеет среднее значение μ и конечную дисперсию σ^2, то с ростом n распределение выборочного среднего приближается к нормальному с параметрами μ и σ^2/n, т. е. распределение выборочного среднего асимптотически нормально.

Примечание. Приближение вполне приемлемо для $n \geqslant 30$ и $N > 2n$.

Неравенство Чебышева

$$P[\,|X-\mu|\geqslant k\sigma]\leqslant\frac{1}{k^2}$$

получено лишь в предположении существования μ и σ^2.

Примечание. Относительно любой совокупности можно утверждать, что по крайней мере 1/4, или 25%, ее элементов отклоняются от среднего более чем на 2σ.

Теорема. Если случайная выборка объемом n_1 получена из совокупности со средним μ_1 и дисперсией σ_1^2, а другая выборка объемом n_2 — из совокупности со средним μ_2 и дисперсией σ_2^2, то среднее и дисперсия разности выборочных средних $y=\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ равны соответственно

$$\mu_y=\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\mu_1-\mu_2$$

и

$$\sigma_y^2=\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}^2=\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}, \tag{4.115}$$

где $\bar{x}_1$ — выборочное среднее первой выборки, а $\bar{x}_2$ — второй.

Примечание. Если совокупности распределены по нормальному закону, то величина y также имеет нормальное распределение. Если совокупности не являются нормально распределенными, но объемы выборок достаточно велики, то может быть применена центральная предельная теорема.

Распределение хи-квадрат. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией. Положим

$$\chi^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\nu^2=\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2.$$

Тогда χ^2 представляет собой случайную величину, плотность вероятности которой имеет вид

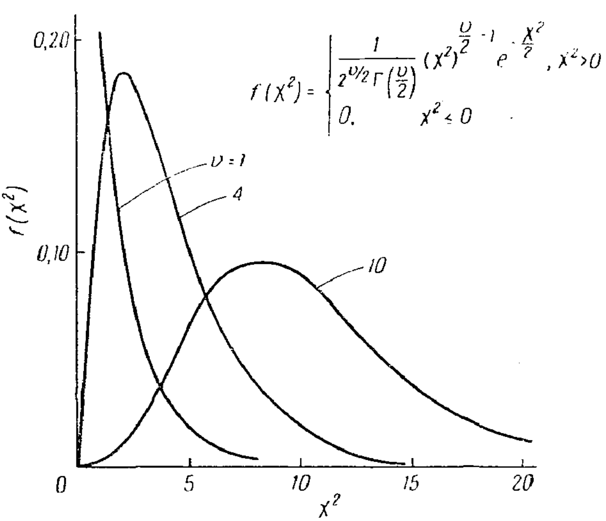
$$f(\chi^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, & \chi^2 \geqslant 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} & \end{cases} \tag{4.116}$$

Таблица 4.34

Свойства распределения хи-квадрат

(фиг. 4.20)

Среднее	$M[\chi^2] = \nu$
Дисперсия	$\sigma^2_{\chi^2} = 2\nu$
Третий центральный момент	$\mu_3 = 8\nu$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = 12\nu(\nu+4)$
Коэффициент вариации	$\eta = \sqrt{\dfrac{2}{\nu}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 2\sqrt{\dfrac{2}{\nu}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 + \dfrac{12}{\nu}$



Фиг. 4.20. Плотность χ^2-распределения для 1, 4 и 10 степеней свободы.

(ν — число степеней свободы, т. е. число независимых случайных величин, сумма квадратов которых определяется). Начальный момент k-го порядка имеет вид

$$\nu_k = \nu(\nu+2)\ldots(\nu+2k-2).$$

Значения функции

$$F(\chi^2_{p,\nu}) = P(\chi^2 \leqslant \chi^2_{p,\nu}) = \int\limits_0^{\chi^2_{p,\nu}} f(\chi^2)\,d\chi^2 = p \tag{4.117}$$

приведены в табл. А.6. Например, при $\nu = 8$

$$P(\chi^2 \leqslant \chi^2_{0,95;\,8}) = P(\chi^2 \leqslant 15{,}5) = 0{,}95.$$

Замечания

1. Распределение имеет единственную моду при $\chi^2 = \nu - 2$ для $\nu \geqslant 2$.

2. Если χ^2_1 и χ^2_2 — независимые случайные величины с распределением хи-квадрат, а ν_1 и ν_2 — число степеней свободы для первой и второй величин соответственно, то сумма $\chi^2_1 + \chi^2_2$ распределена по закону хи-квадрат с $\nu_1 + \nu_2$ степенями свободы.

3. Случайная величина χ^2 асимптотически нормальна при $\nu \to \infty$ со средним ν и дисперсией 2ν.

4. Случайная величина $\sqrt{2\chi^2}$ асимптотически нормальна при $\nu \to \infty$ со средним $\sqrt{2\nu - 1}$ и единичной дисперсией.

Имеется полезное приближенное соотношение:

$$\chi^2_{p,\nu} \approx \frac{1}{2}\left[z_p + \sqrt{2\nu - 1}\right]^2, \quad \nu > 30.$$

Для больших ν справедливо соотношение (см. табл. А.6)

$$\chi^2_{p,\nu} \approx \nu\left[1 - \frac{2}{9\nu} + z_p\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right]^3.$$

5. Если случайная величина X имеет нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2, то для случайной выборки объема n выборочная функция

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

распределена по закону хи-квадрат с n степенями свободы.

Теорема. Если x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — элементы выборки, взятой из нормальной совокупности со средним μ и дисперсией

σ^2, то случайная величина $(n-1)s^2/\sigma^2$ распределена по закону хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы и

$$f(s^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\dfrac{n-1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(s^2)^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}, & s>0,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases} \qquad (4.118)$$

$$f(s)=\begin{cases}\dfrac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\dfrac{n-1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}s^{n-2}e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}, & s>0,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases} \qquad (4.119)$$

Примечание. Статистики $\bar{x}$ и s^2 для нормально распределенной совокупности независимы.

Пример 4.61. Пусть $n=15$; из табл. А.6 для дисперсии совокупности получаем соотношения

$$P\left(14\frac{s^2}{\sigma^2}\geqslant 21{,}1\right)=0{,}10 \quad \text{или} \quad P\left(14\frac{s^2}{21{,}1}\geqslant\sigma^2\right)=0{,}10.$$

Плотность распределения хи-квадрат также можно использовать для оценки расхождения между эмпирическими и теоретическими частостями

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_{\text{э}i}-f_{\text{т}i})^2}{f_{\text{т}i}}, \qquad (4.120)$$

где k — число выбранных интервалов;

$f_{\text{э}i}$ — эмпирическая частость для i-го интервала;

$f_{\text{т}i}$ — теоретическая частость для i-го интервала, должна быть больше пяти.

Если $\chi^2=0$, то эмпирические и теоретические данные согласуются, при $\chi^2>0$ данные не согласуются. Чем больше значение χ^2, тем больше расхождение. Если при вычислении теоретических частостей оценки параметров совокупности не используются, то число степеней свободы равно

$$\nu=k-1;$$

в случае же использования при этом m оценок параметров совокупности

$$\nu=k-1-m.$$

Распределение Стьюдента. Если Z — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией, а независимая от нее случайная величина χ^2 имеет распределение хи-квадрат с ν степенями свободы, то случайная величина

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

имеет t-распределение с ν степенями свободы. Плотность распределения величины t определяется выражением

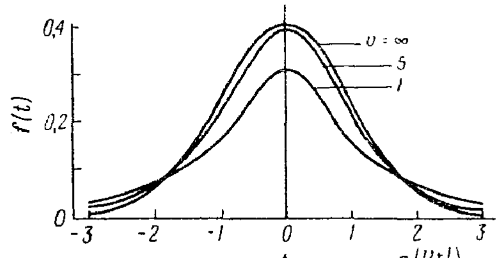
$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \qquad (4.121)$$

Таблица 4.35

Свойства t-распределения Стьюдента

(фиг. 4.21)

Среднее	$M(t) = 0$
Дисперсия	$\sigma_t^2 = \frac{\nu}{\nu-2}, \ \nu > 2$
Третий центральный момент	$\mu_3 = 0$
Четвертый центральный момент	$\mu_4 = \frac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)}, \quad \nu > 4$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 0$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = \frac{3(\nu-2)}{\nu-4}, \ \nu > 4$



$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\upsilon}\,\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\left[1+\frac{t^2}{\upsilon}\right]^{\frac{\upsilon+1}{2}}}$$

Фиг. 4.21. Плотность t-распределения Стьюдента для $\nu = 1, 5$ и $\nu = \infty$.

Начальный момент $2k$-го порядка имеет вид

$$\nu_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-2k)} \nu^k, \quad 2k < \nu.$$

Значения функции

$$F(t_{p,\nu}) = P(t \leqslant t_{p,\nu}) = \int_{-\infty}^{t_{p,\nu}} f(t)\,dt = p \qquad (4.122)$$

приведены в табл. А.5.

Замечания

1. Распределение имеет одну моду при $t = 0$.

2. Распределение симметрично относительно $t = 0$.

3. При $\nu \to \infty$ случайная величина t распределена асимптотически нормально с нулевым средним и единичной дисперсией. Для $\nu \geqslant 30$ имеем $t_{p,\nu} \approx z_p$.

4. Если $x_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — независимые нормально распределенные случайные величины со средним μ и дисперсией σ^2, то $z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Кроме того, $t = (\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ имеет t-распределение с $n - 1$ степенями свободы.

Пример 4.62. Пусть $n = 15$, из табл. А.5 находим

$$P\left[-1{,}761 \leqslant \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{15}}} \leqslant 1{,}761\right] = 0{,}90$$

или

$$P\left[-\frac{1{,}761 s}{\sqrt{15}} \leqslant \bar{x} - \mu \leqslant \frac{1{,}761 s}{\sqrt{15}}\right] = 0{,}90.$$

5. Рассмотрим две случайные выборки: выборку $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ из совокупности, имеющей нормальное распределение $N(\mu_1, \sigma^2)$, и выборку $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$ из $N(\mu_2, \sigma^2)$. Распределение случайной величины

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_{1i}}{n_1}$$

подчиняется закону $N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$, а случайная величина

$$\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{x_{2i}}{n_2}$$

распределена по закону $N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$.

Если σ известно, что бывает редко, то случайная величина

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma^2 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

распределена по закону $N(0, 1)$. Если

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}$$

и

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1},$$

то

$$\frac{(n-1) s_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1) s_2^2}{\sigma^2}$$

имеет распределение хи-квадрат с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. Кроме того,

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

имеет t-распределение с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

F-распределение. Пусть две независимые случайные величины χ_1^2 и χ_2^2 распределены по закону хи-квадрат с ν_1 и ν_2 степенями свободы. Случайная величина

$$F = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$

имеет F-распределение с (ν_1, ν_2) степенями свободы. Плотность распределения случайной величины F определяется выражением

$$f(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)} \left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \dfrac{F^{\frac{\nu_1}{2} - 1}}{\left(1 + \dfrac{\nu_1}{\nu_2} F\right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}}, & F > 0, \\ 0, \quad F < 0. \end{cases} \qquad (4.123)$$

Начальный момент k-го порядка равен

$$\nu_k = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^k .$$

Значения функции

$$F(F_{p,\,\nu_1,\,\nu_2}) = P(F \leqslant F_{p,\,\nu_1,\,\nu_2}) = \int\limits_0^{F_{p,\,\nu_1,\,\nu_2}} f(F)\,dF = p \qquad (4.124)$$

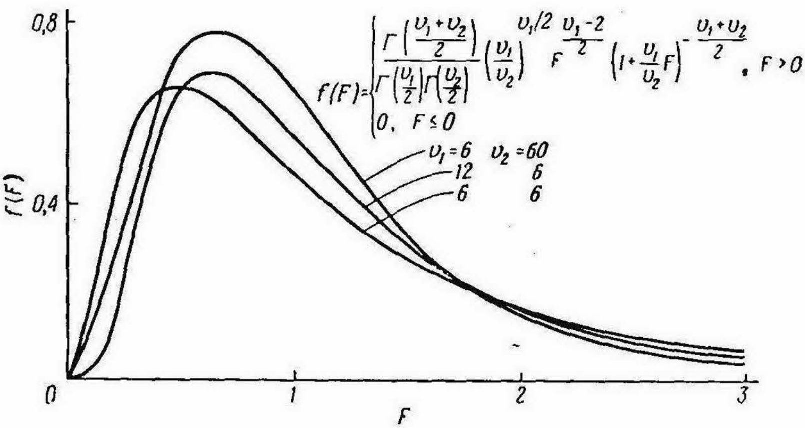
приведены в табл. А.7

Таблица 4.36

Свойства F-распределения

(фиг. 4.22)

Среднее	$M(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$, $\nu_2 > 2$
Дисперсия	$\sigma_F^2 = 2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)\frac{1}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$, $\nu_2>4$
Третий центральный момент	$\mu_3 = \frac{8\nu_2^3(\nu_1+\nu_2-2)(2\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1^2(\nu_2-2)^3(\nu_2-4)(\nu_2-6)}$, $\nu_2>6$
Коэффициент вариации	$\eta = \sqrt{\frac{2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)}}$, $\nu_2 > 4$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \frac{2\nu_1+\nu_2-2}{\nu_2-6}\sqrt{\frac{8(\nu_2-4)}{\nu_1+\nu_2-2}}$, $\nu_2 > 6$



Фиг. 4.22. Плотность F-распределения при различных значениях ν_1 и ν_2.

Замечания

1. Модой распределения является

$$F=\frac{\nu_2(\nu_1-2)}{\nu_1(\nu_2+2)}.$$

2.

$$F_{1-\alpha;\ \nu_2;\ \nu_1}=\frac{1}{F_{\alpha;\ \nu_1;\ \nu_2}}.$$

Пример 4.63. Пусть $\alpha=0{,}05$, $\nu_1=4$, $\nu_2=8$, $F_{0,05;\ 8;\ 4}=0{,}261$. Тогда

$$F_{0,95;\ 4;\ 8}=3{,}84=1/0{,}261.$$

3. Если из двух нормально распределенных совокупностей получены две выборки, то случайная величина $(s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$ имеет F-распределение с (n_1-1) и (n_2-1) степенями свободы.

4.6г. Порядковые статистики. *Определение.* Если члены выборки расположены в порядке возрастания, то выборка называется вариационным рядом, а его элементы — *порядковыми статистиками.* Предположим, что распределение совокупности имеет плотность $f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. Пусть x_1 — наименьший, а x_n — наибольший члены случайной выборки объемом n. Тогда

$$f(x_1,x_n)=\begin{cases} n(n-1)f(x_1)f(x_n)[F(x_n)-F(x_1)]^{n-2}, & a\leqslant x_1\leqslant x_n\leqslant b,\\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.125}$$

Плотности вероятности крайних членов выборки x_1 и x_n имеют вид

$$f_1(x_1)=\begin{cases} nf(x_1)[1-F(x_1)]^{n-1}, & a\leqslant x_1\leqslant b,\\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \tag{4.126}$$

и

$$f_n(x_n)=\begin{cases} nf(x_n)[F(x_n)]^{n-1}, & a\leqslant x_n\leqslant b,\\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.127}$$

Формулы (4.126) и (4.127) составляют основу теории экстремальных значений. Если начальное распределение известно, то нетрудно найти распределения экстремальных значений и получить моменты распределений. Во многих случаях получаемые интегралы можно вычислить лишь приближенно численными методами. Читателю, интересующемуся этими вопросами, можно рекомендовать монографию [10], написанную на основе четырех лекций, прочитанных Гумбелем в Национальном бюро стандартов.

Одна из порядковых статистик — *размах выборки* — широко используется при статистическом контроле качества. Пусть $x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}} =$ размах выборки. Положим $x_n = x_1 + R$, тогда

$$f(R) = \begin{cases} \int\limits_a^{b-R} f(x_1, R)\,dx_1, & 0 \leqslant R \leqslant b-a, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.128}$$

Пусть $x_1 = x_n - R$, тогда

$$f(R) = \begin{cases} \int\limits_{a+R}^{b} f(x_n, R)\,dx_n, & 0 \leqslant R \leqslant b-a, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.129}$$

Формулы (4.128) и (4.129) приводят к одному и тому же результату.

Пример 4.64. Пусть Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 — вариационный ряд, полученный из совокупности с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \quad \theta > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдем распределение случайной величины $R = Y_5 - Y_1$:

$$f(y_1, y_5) = \begin{cases} \frac{5!}{\theta_5} \int\limits_{y_1}^{y_5} \int\limits_{y_2}^{y_5} \int\limits_{y_3}^{y_5} \exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{y_i}{\theta}\right) dy_4\,dy_3\,dy_2 = \\ \qquad = \frac{20}{\theta^2} e^{-\frac{y_1+y_5}{\theta}} \left[e^{-\frac{y_1}{\theta}} - e^{-\frac{y_5}{\theta}}\right]^3, \quad 0 \leqslant y_1 \leqslant y_5 < \infty, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$f(R, y_5) = \frac{20}{\theta^2} e^{-\frac{(y_5-R)}{\theta} - \frac{y_5}{\theta}} \left[e^{-\frac{y_5-R}{\theta}} - e^{-\frac{y_5}{\theta}}\right]^3, \quad 0 \leqslant R \leqslant y_5 < \infty$$

и

$$f(R) = \begin{cases} \frac{20}{\theta^2} \int\limits_R^{\infty} f(R, y_5)\,dy_5 = \frac{4}{\theta} e^{-\frac{R}{\theta}} \left(1 - e^{-\frac{R}{\theta}}\right)^3, & R > 0, \\ 0, \; R < 0. \end{cases}$$

4.7. ОЦЕНКА

Одной из важных задач технических исследований является оценка параметров распределения. Примером такой задачи может служить оценка среднего времени безотказной работы элемента.

Определение. Оценкой называют некоторую функцию выборочных значений, позволяющую оценить параметр совокупности.

Определение. Однозначная оценка параметров совокупности называется *точечной оценкой.*

Свойства точечных оценок. Пусть статистика $\hat{\theta}$, определенная по случайной выборке объемом n, является оценкой параметра θ.

1. $\hat{\theta}$ называют *несмещенной оценкой* параметра θ, если $M(\hat{\theta}) = \theta$.

Примечание. Поскольку $M(\bar{x}) = \mu_x$, выборочное среднее $\bar{x}$ служит несмещенной оценкой μ.

2. $\hat{\theta}$ называют *состоятельной оценкой* θ, если $\hat{\theta}$ с ростом объема выборки сходится по вероятности к θ.

Примечание. Выборочное среднее $\bar{x}$ является состоятельной оценкой μ_x, так как $P(|\bar{x} - \mu| > \varepsilon) \leqslant \sigma^2/n\varepsilon^2$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

3. Если $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ — две различные несмещенные оценки параметра θ и если $M[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] < M[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2]$ для всех $\hat{\theta}_2$, то $\hat{\theta}_1$ называют *эффективной оценкой* параметра θ, а $\hat{\theta}_2$ — *неэффективной оценкой* этого параметра.

Примечание. Оценками среднего μ служат также выборочное среднее и выборочная медиана. Однако

$$M[(\bar{x} - \mu)^2] = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

меньше $M[(x_{0,50} - \mu)^2] \approx 1{,}57\sigma_x^2/n$; выборочное среднее $\bar{x}$ является эффективной оценкой μ, а выборочная медиана — неэффективной оценкой μ.

4. $\hat{\theta}$ называют *достаточной оценкой*, если все остальные независимые оценки, полученные на основе данной выборки, не дают какой-либо дополнительной информации об оцениваемых параметрах.

Методы получения точечных оценок.

1. *Метод моментов.* Точечная оценка параметров может быть получена приравниванием выборочных моментов моментам совокупности.

Пример 4.65. Рассмотрим экспоненциальное распределение

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}, & x>0, \quad \theta>0,\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Так как для описания распределения совокупности используется лишь один параметр, требуется первый момент $\mu=\theta$. Следовательно,

$$\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{n}$$

— первый выборочный момент.

2. *Метод максимального правдоподобия.* Пусть x_i, $i=1,2,\ldots$ $\ldots,n$,— выборка из совокупности с плотностью распределения вероятностей $f(x;\theta)$. Какой должна быть функция выборочных значений $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, чтобы служить «хорошей» оценкой для θ? Определим для выборки функцию правдоподобия в виде

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)=$$
$$=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\ldots f(x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta). \quad (4.130)$$

Метод максимального правдоподобия состоит в отыскании значения θ, максимизирующего $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$. Поскольку $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$ является произведением, удобно эту функцию прологарифмировать. Следовательно, решая *уравнение правдоподобия*

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial\theta}=0$$

относительно θ, получаем оценку максимального правдоподобия, которая будет функцией $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Оценки максимального правдоподобия состоятельны, достаточны, асимптотически нормально распределены и асимптотически эффективны. Не всегда они являются несмещенными. Как отмечено в книге [4], дисперсия оценки имеет вид

$$\sigma^2(\hat{\theta})\approx-\left(\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta^2}\right)^{-1}$$

и может использоваться, если полученную после дифференцирования статистику заменить ее математическим ожиданием. Изложение методов получения дисперсий и ковариаций оценок максимального правдоподобия можно найти также в работе [11].

Пример 4.66. Пусть

$$f(x;\ \mu,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

тогда

$$L(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \mu,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0, \tag{4.131}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0. \tag{4.132}$$

Решая систему уравнений (4.131) и (4.132), получаем

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n} \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{n}.$$

Заметим, что $\hat{\sigma}^2$ является смещенной оценкой σ^2.

Интервальные оценки. Точечная оценка параметра θ связана с оценкой интервального типа $[\theta_н, \theta_в]$, где $\theta_н$ — нижняя, а $\theta_в$ — верхняя граница. Интервальные оценки являются функциями выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Они дают некоторую степень уверенности в том, что истинное значение параметра лежит внутри определенного интервала. Например, среднее время безотказной работы элемента может составлять 400 ± 20 *час*, т. е. находиться между 380 и 420 *час*. Метод получения доверительных интервалов состоит в следующем:

1. Вводится случайная величина, например $Y(\theta)$, связанная с параметром θ, однако ее распределение не зависит от других параметров.

2. По функции распределения находят таких два числа C_1 и C_2, что

$$P[C_1 < Y(\theta) < C_2] = \gamma,$$

где γ — *коэффициент доверия*.

3. Записывают уравнение

$$P[\theta_н < \theta < \theta_в] = \gamma,$$

определяющее двусторонний доверительный интервал. Во многих случаях представляет интерес только один из двух доверительных пределов. Тогда записывают уравнение, определяющее верхний предел

$$P[\theta < \theta_в] = \gamma$$

или нижний предел

$$P[\theta_н < \theta] = \gamma.$$

Пример 4.67. Пусть случайная величина X распределена по закону $N(\mu, \sigma^2)$. Рассмотрим выборку объемом n. $100\gamma\%$-ный доверительный интервал для μ задается выражением

$$P\left[-t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1} \leqslant \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \leqslant +t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1}\right] = \gamma$$

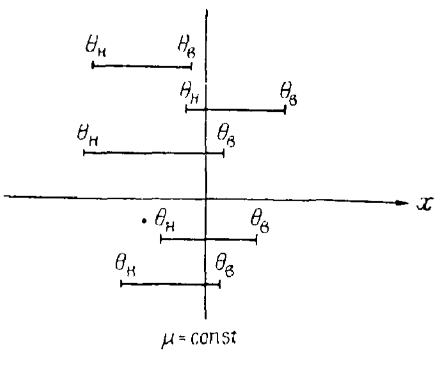
или

$$P\left[\bar{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \gamma.$$

Следовательно,

$$\theta_н = \bar{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad \theta_в = \bar{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $t_{(1+\gamma)/2;\, n-1}$ — квантиль t-распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Если получают 95%-ные интервалы, то можно ожидать, что примерно 95% таких случайных интервалов будут содержать μ. Это гарантирует 95%-ную уверенность в том, что μ лежит между $\theta_н$ и $\theta_в$. Последнее не равнозначно утверждению, что вероятность попадания значения μ внутрь интервала равна 0,95, так как μ не является случайной величиной и достоверно лежит либо внутри, либо вне интервала (фиг. 4.23).



Фиг. 4.23. Интервальная оценка параметра.

Примечание. Точечные и интервальные оценки параметров некоторых распределений рассмотрены в разд. 4.4 и 4.5, где описаны эти распределения.

Допустимые пределы для нормального распределения. Если μ и σ^2 известны, то допустимые пределы определяются как $\mu \pm \pm z\sigma$, где z находится из табл. А.4. Так, например, 95% элементов совокупности лежат в интервале $\mu \pm 1{,}96\sigma$; это утверждение нельзя сделать, рассматривая интервал $\bar{x} \pm 1,96s$. Границы последнего интервала зависят от случайных величин $\bar{x}$ и s и от того, насколько хорошими оценками для μ и σ являются эти величины. Однако можно получить такие коэффициенты K, что в серии выборок из нормальной совокупности $100\gamma\%$ интервалов $\bar{x} \pm Ks$ будут содержать не менее $100(1-\alpha)\%$ совокупности.

Пример 4.68. Инженер желает оценить допустимые пределы, в которых с достаточной достоверностью ($\gamma = 0,90$) заключено 95% распределения времени безотказной работы электронной лампы. Получены следующие выборочные характеристики десяти ламп: $\bar{x} = 140$ *час*, $s = 15$ *час*. Из табл. A.9 находим, что значение K для $n = 10$, $\gamma = 0,90$, $\alpha = 0,05$ равно 3,018. Следовательно, допустимый интервал составляет

$$140 \pm 3,018(15) = [94,7;\ 185,3] \text{ час}$$

(при допущении о нормальном распределении). Во многих случаях более целесообразно использование односторонних доверительных пределов. Если рассматривается один предел $\bar{x} - Ks$ (или $\bar{x} + Ks$), то гарантируется, что определенная доля совокупности будет больше (или меньше) этого предела. Некоторые значения K для односторонних допустимых пределов в случае нормального распределения указаны в табл. A.8.

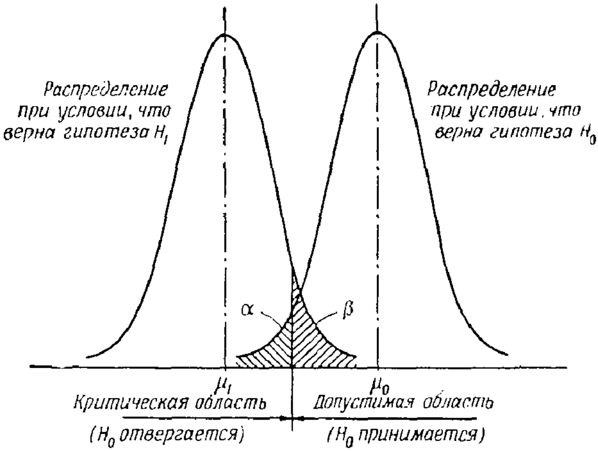
4.8. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Статистические гипотезы обычно представляют собой некоторые утверждения относительно распределений совокупности, например утверждение о том, что среднее время безотказной работы элемента равно 400 *час*, или о том, что случайная величина подчиняется данному распределению.

Определение. Гипотезы, утверждающие, что различие между сравниваемыми величинами отсутствует, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными колебаниями в выборках, называются *нулевыми гипотезами* и обозначаются как H_0. Все остальные гипотезы, отличающиеся от нулевой, называются *альтернативными* и обозначаются как H_1.

Определение. Ошибкой первого рода, обозначаемой через α, называется ошибка отклонения верной гипотезы. Величина $100\alpha\%$ служит уровнем значимости.

Определение. Ошибкой второго рода, обозначаемой через β, называется ошибка принятия ложной гипотезы. Величину $1-\beta$ называют мощностью критерия. Выражая эту величину через определенный параметр, получают *функцию мощности.* Очевидно, выбор значений α и β должен зависеть от последствий совершения ошибок первого и второго рода соответственно. Единственный способ одновременного уменьшения ошибок и того и другого рода состоит в увеличении объема выборки. Выборочное пространство для всех возможных значений статистики, лежащей в основе критерия для проверки гипотезы, разбивается на две части: область допустимых значений и критическую область, в которой гипотеза отвергается (фиг. 4.24).



Фиг. 4.24. Область допустимых значений и критическая область.

Порядок проверки гипотез

1. Формулируются гипотезы H_0 и H_1.
2. Выбираются α и β. (В некоторых случаях вместо β выбирается n.)
3. Выбирается выборочная статистика (критерий).
4. Определяется критическая область.
5. На основе выборки вычисляется статистика.
6. Принимается или отвергается гипотеза H_0.

Пример 4.69. Испытания 100 электронных ламп, изготовленных одной из фирм, показали, что среднее время безотказной работы составляет 2100 *час* при известном стандартном отклонении, равном $\sigma = 300$ *час*. Обозначим через μ среднее время безотказной работы ламп, и проверим гипотезу $\mu = 2200$ *час* при альтернативной гипотезе $\mu \neq 2200$ *час*, используя $\alpha = 0{,}05$ и принимая допущение о нормальном распределении долговечности.

$$H_0 : \mu = 2200, \quad H_1 : \mu \neq 2200, \quad \alpha = 0{,}05.$$

Используемая статистика $z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$.

Критическая область $|z| > 1{,}96$.

$$z = (2100 - 2200)/(300/\sqrt{100}) = -3{,}33.$$

Следовательно, мы отвергаем гипотезу $\mu = 2200$. Отметим определенную аналогию между двусторонней проверкой гипотез и интервальной оценкой. Двусторонняя проверка заключается в отыскании пределов, между которыми будет заключена $(1 - \alpha)$-я доля всех значений выборочной статистики при повторении выборочной процедуры. В случае интервальной оценки отыскиваются пределы, между которыми истинное значение параметра находится в 100γ % случаев при повторении выборочной процедуры. Для выборки заданного объема и при условии $1 - \alpha = \gamma$ вычисления в обоих случаях одинаковы, а интерпретация результатов различна. Проверка гипотез о значениях параметров ряда распределений проведена в разд. 4.4 и 4.5, где рассмотрены соответствующие распределения.

4.9. РЕГРЕССИОННЫЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Между несколькими величинами часто существует взаимосвязь, как, например, между твердостью сплава и прочностью при растяжении. Эту взаимосвязь можно представить в функциональной форме и определить степень взаимосвязи. Для нахождения «наилучшей» функциональной связи между случайными величинами применяется метод, называемый *регрессионным анализом*. Метод, используемый для установления степени взаимосвязи между случайными величинами, называется *корреляционным анализом*. Чтобы решить, какая зависимость соответствует полученным данным, целесообразно нанести эти данные на график. Если нанесенные точки отражают линейную зависимость, то уравнение этой зависимости имеет вид: 1) $y = \alpha + \beta x$ в прямоугольной системе координат, 2) $y = \alpha\beta^x$ на полулогарифмической бумаге, 3) $y = \alpha x^\beta$ на логарифмической бумаге.

После выбора функции, соответствующей полученным данным, возникает задача оценки параметров этой функции. Получение оценок называют *сглаживанием кривой*.

Определение. Из всех кривых, аппроксимирующих полученные данные, кривая, сумма квадратов отклонений точек относительно которой минимальна, называется *наилучшей сглаживающей кривой*, а метод оценки параметров путем минимизации сумм

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

называется *методом наименьших квадратов* (фиг. 4.25).

Простая линейная регрессия. Пусть

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2,$$

a и b — такие значения параметров α и β, при которых $\partial S/\partial\alpha = 0$, $\partial S/\partial\beta = 0$. Оценки для α и β определяются путем решения системы уравнений

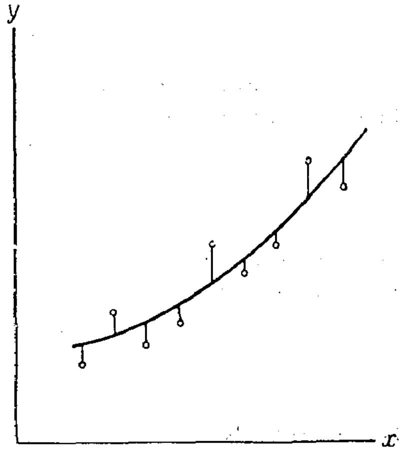
$$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad (4.133)$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \qquad (4.134)$$

Таким образом,

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \qquad (4.135)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \qquad (4.136)$$



Фиг. 4.25. Сглаживание по методу наименьших квадратов.

Эти оценки позволяют получить уравнение регрессии $\hat{y} = a + bx$.

Примечание. Если величины x считать постоянными (измеренными безошибочно), то a и b будут линейно зависеть от y.

Метод наименьших квадратов *не* требует принятия каких-либо допущений относительно y. Однако для построения доверительных интервалов необходимо ввести ряд допущений:

1. $M(y) = \alpha + \beta x$.
2. Дисперсия случайной величины y постоянна для всех x и обозначается через σ_y^2.
3. Случайная величина y распределена по нормальному закону для каждого x.
4. Выборка случайна.

Если эти условия удовлетворяются, то оценки a и b имеют нормальное распределение со средними α и β соответственно. Ниже приведены оценки ошибок.

Остаточный средний квадрат:

$$s_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}. \qquad (4.137)$$

Коэффициент регрессии b:

$$s_b^2 = \frac{s_E^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \tag{4.138}$$

Коэффициент регрессии a:

$$s_a^2 = s_E^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right]. \tag{4.139}$$

Среднеквадратическое отклонение величины $\hat{y} - M(y|x)$[1]) при фиксированном x:

$$s_{\hat{y}}^2 = s_E^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right]. \tag{4.140}$$

Среднеквадратическое отклонение величины $\hat{y} - M(y|x)$ при фиксированном x:

$$s_{\hat{y}(x)}^2 = s_E^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right]. \tag{4.141}$$

Итак, 100γ %-ные доверительные интервалы имеют вид

$$\text{для } \beta: \quad b \pm t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-2} s_b, \tag{4.142}$$

$$\text{для } \alpha: \quad a \pm t_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-2} s_a. \tag{4.143}$$

Простая экспоненциальная регрессия. При сглаживании кривой типа $y = \alpha\beta^x$ метод наименьших квадратов приводит к системе уравнений, которую трудно решить. Для приближенного решения уравнение логарифмируется: $\log y = \log\alpha + x \log\beta$. Пусть $w = \log y$, $A = \log\alpha$, $B = \log\beta$; тогда уравнение принимает вид $w = A + Bx$. Такое уравнение рассматривалось в случае простой линейной регрессии. Решение уравнения $w = A + Bx$ неидентично решению уравнения $y = \alpha\beta^x$. Однако для большинства задач данное приближение вполне приемлемо.

Корреляционный анализ. Определение. Выборочный коэффициент линейной корреляции r определяется формулой

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}. \tag{4.144}$$

[1]) Здесь M — символ усреднения по y. — *Прим. ред.*

Примечание. $-1 \leqslant r \leqslant +1$.

Если выборка получена из совокупности с двумерным нормальным распределением (разд. 4.3а), то r является оценкой параметра $\rho = \sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$. Для проверки нулевой гипотезы $H_0: \rho = 0$ против альтернативы $H_1: \rho \neq 0$ вычисляют величину

$$t = \frac{r}{s_r} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

и гипотеза H_0 отвергается, если

$$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-2}.$$

Значения t приведены в табл. А.5. Так как

$$t = \frac{r}{s_r} = \frac{b}{s_b},$$

то описанная проверка эквивалентна проверке гипотезы $H_0: \beta = 0$ против $H_1: \beta \neq 0$. Для проверки гипотезы

$$H_0: \rho = \rho_0 \neq 0 \quad \text{против} \quad H_1: \rho \neq \rho_0$$

используют Z-преобразование Фишера [12]:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Распределение Z является приближенно нормальным со средним

$$\mu_Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} + \frac{\rho_0}{2(n-1)}$$

и дисперсией

$$\sigma_Z^2 = \frac{1}{n-3}.$$

4.10. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

При последовательном анализе принимается одно из трех решений:

1) принять проверяемую гипотезу, 2) отвергнуть проверяемую гипотезу, 3) продолжать испытания для получения новых данных. Испытания, проведенные по плану последовательного анализа, как правило, более экономичны, чем испытания другими методами. Порядок принятия решения при последовательном анализе можно представить в следующей форме:

1. Принять гипотезу H_0, если $L \leqslant \dfrac{\beta}{1-\alpha} = \dfrac{1}{B}$.
2. Принять гипотезу H_1, если $L \geqslant \dfrac{1-\beta}{\alpha} = A$.
3. Продолжать испытания, если $\dfrac{1}{B} \leqslant L \leqslant A$.

Величина L называется отношением правдоподобия P_1/P_0, где P_1 — вероятность получения выборочных значений при условии, что верна гипотеза H_1, а P_0 — аналогичная вероятность при условии, что верна гипотеза H_0. Отношение правдоподобия было введено Вальдом в 1943 г. [21].

Основные допущения, принимаемые при использовании последовательного анализа:

1. Функция распределения известна.
2. Гипотезы H_0 и H_1 определены.
3. Заранее выбраны α и β.

Для α и β рекомендуются значения 0,10 [22].

Последовательный анализ в случае биномиального распределения.

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$

Если из совокупности с долей неисправных изделий θ взята выборка объемом n, то вероятность получить d_n неисправных изделий равна

$$P = C(n,\ d_n)\, \theta^{d_n} (1-\theta)^{n-d_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{B} \leqslant L = \frac{P_1}{P_0} = \frac{\theta_1^{d_n}(1-\theta_1)^{n-d_n}}{\theta_0^{d_n}(1-\theta_0)^{n-d_n}} \leqslant A.$$

Логарифмируя и производя перегруппировку, получаем

$$\frac{\ln \dfrac{\beta}{1-\alpha} + n \ln \dfrac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}{\ln \dfrac{\theta_1}{\theta_0} + \ln \dfrac{1-\theta_0}{1-\theta_1}} \leqslant d_n \leqslant \frac{\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha} + n \ln \dfrac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}{\ln \dfrac{\theta_1}{\theta_0} + \ln \dfrac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}.$$

Пусть

$$b = \ln \frac{1-\alpha}{\beta}, \quad g_1 = \ln \frac{\theta_1}{\theta_0},$$

$$a = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad g_2 = \ln \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1},$$

$$h_1 = \frac{b}{g_1+g_2}, \quad h_2 = \frac{a}{g_1+g_2}, \quad s = \frac{g_2}{g_1+g_2}.$$

Тогда

Линия приемки: $$a_n = -h_1 + sn, \tag{4.145}$$

Линия браковки: $$r_n = h_2 + sn. \tag{4.146}$$

Ниже приведены формулы для вероятности $L(\theta)$ принятия гипотезы H_0 и формулы для среднего числа испытаний при пяти значениях θ:

$$\theta = 0, \quad L(\theta) = 1, \quad \bar{n}_0 = \frac{h_1}{s};$$

$$\theta = \theta_0, \quad L(\theta) = 1 - \alpha, \quad \bar{n}_{\theta_0} = \frac{(1-\alpha)h_1 - \alpha h_2}{s - \theta_0};$$

$$\theta = s, \quad L(\theta) = \frac{h_2}{h_1 + h_2}, \quad \bar{n}_s = \frac{h_1 h_2}{s(1-s)};$$

$$\theta = \theta_1, \quad L(\theta) = \beta, \quad \bar{n}_{\theta_1} = \frac{(1-\beta)h_2 - \beta h_1}{\theta_1 - s};$$

$$\theta = 1, \quad L(\theta) = 0, \quad \bar{n}_1 = \frac{h_2}{1-s}.$$

Последовательный анализ в случае распределения Пуассона.

$$H_0: \theta = \theta_0, \quad H_1: \theta = \theta_1, \quad \theta_0 > \theta_1.$$

Если параметр распределения равен θ, то вероятность появления r отказов за время t равна [23]

$$P = \left(\frac{t}{\theta}\right)^r \frac{e^{-t/\theta}}{r!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{B} \leqslant \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r e^{-\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)T} \leqslant A,$$

где r — число отказов, T — общее время испытаний. Логарифмируя и производя перегруппировку, получаем

$$\frac{\ln\frac{\beta}{1-\alpha} + r\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}}{\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}} > T > \frac{\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + r\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}}{\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}} \tag{4.147}$$

или

$$\frac{\ln\frac{\beta}{1-\alpha} + \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)T}{\ln\frac{\theta_0}{\theta_1}} < r < \frac{\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)T}{\ln\frac{\theta_0}{\theta_1}}.$$

Пример 4.70. Пусть $\theta_0 = 1500$ *час*, $\theta_1 = 500$ *час*, $\alpha = \beta = 0{,}10$.

$$\ln\frac{\beta}{1-\alpha} = \ln\frac{1}{9} = -2{,}19722,$$

$$\ln\frac{1-\beta}{\alpha} = \ln 9 = 2{,}19722,$$

$$\ln\frac{\theta_1}{\theta_0} = \ln\frac{1}{3} = -1{,}0986,$$

$$\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} = \frac{1}{1500} - \frac{1}{500} = -\frac{1}{750}.$$

Следовательно, $-1642{,}9 + 824{,}0\,r < T < 1642{,}9 + 824{,}0\,r$. Ниже приведены формулы для среднего времени испытаний, необходимого для принятия решения, при четырех значениях θ:

$$\theta = 0, \qquad \bar{T} = 0;$$

$$\theta = \theta_0, \qquad \bar{T} = \frac{\beta \ln \dfrac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \dfrac{\theta_0}{\theta_1} - \left(1 - \dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right)}\,\theta_0;$$

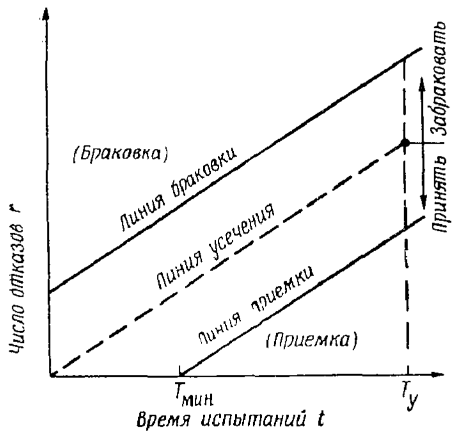
$$\theta = \theta_s = \frac{\ln \dfrac{\theta_0}{\theta_1}}{\dfrac{1}{\theta_1} - \dfrac{1}{\theta_0}}, \qquad \bar{T} = \frac{\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha} \ln \dfrac{1-\alpha}{\beta}}{\ln (\theta_0/\theta_1)^2}\,\theta_s;$$

$$\theta = \theta_1, \qquad \bar{T} = \frac{(1-\alpha)\ln \dfrac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \ln \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \dfrac{\theta_0}{\theta_1} - \left(\dfrac{\theta_0}{\theta_1} - 1\right)}\,\theta_1.$$

Если требуется ограничить длительность испытаний временем $T_у$, то параллельно линиям приемки и браковки через начало координат проводят линию усечения. Если испытания должны прекращаться в момент $\theta = T_у$, когда еще не принято решение, то гипотезу H_0 следует принимать, если

$$r \leqslant \frac{\dfrac{1}{\theta_1} - \dfrac{1}{\theta_0}}{\ln \dfrac{\theta_0}{\theta_1}}\,T_у,$$

и отвергать (браковать) в противном случае. Если время $T_у$ велико по сравнению с минимально допустимым временем приемки $T_{мин}$, то α и β изменяются незначительно. Графически эта процедура иллюстрируется на фиг. 4.26. План анализа отражают две параллельные линии, которые делят выборочное пространство на три области: приемки, браковки и продолжения испытаний.



Фиг. 4.26. Последовательный анализ испытаний на надежность при $\alpha = \beta$.

4.11. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Для выяснения вопроса о равенстве двух средних значений некоторых распределений использовался t-критерий Стьюдента.

Более общей является задача сравнения нескольких средних значений. Возможным методом решения является попарное сравнение средних с использованием t-критерия. Однако в случае нескольких выборочных средних, даже если они получены из одной совокупности, можно ожидать как достаточно больших, так и достаточно малых значений выборочных средних. Таким образом, перед исследователем может возникнуть вопрос: какие выборочные средние свидетельствуют о действительном различии? Соответствующий анализ группы средних значений называют *дисперсионным анализом*. Так как математическая модель, используемая в дисперсионном анализе, как правило, линейна, то по существу вводятся те же допущения, с которыми мы имели дело при анализе методом линейной регрессии [1]). Последствия, возникающие при отсутствии подобных допущений, исследованы в работе [13].

4.11а. Однофакторный анализ. *Модель с фиксированными уровнями факторов.* В этой модели исследователь анализирует только те условия, которые действительно встречаются в эксперименте. Предположим, что анализируется влияние k различных условий хранения на долговечность батарей. При условиях i хранятся n_i батарей; результаты эксперимента приведены в табл. 4.37. Математическая модель для данных, представленных в табл. 4.37, имеет вид

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, n_i, \tag{4.148}$$

где μ — истинное среднее, α_i — истинный эффект i-го условия хранения, $\sum_{i=1}^{k} n_i\alpha_i = 0$, ε_{ij} — случайный эффект, который предполагается независимым и имеющим распределение $N(0, \sigma^2)$. Схема дисперсионного анализа данных табл. 4.37 представлена в табл. 4.38. В модели с фиксированными уровнями факторов полученные выводы распространяются только на рассмотренные условия.

Модель со случайными уровнями факторов. Математическая модель в этом случае остается прежней, однако интерпретация α_i другая. В модели со случайными уровнями факторов α_i — независимые случайные величины с законом распределения $N(0, \sigma_\alpha^2)$.

Примечание. Мы отобрали k условий из заданного распределения условий. Выводы, полученные в эксперименте, распространяются на все комбинации условий. Схема дисперсионного анализа по-прежнему такая же, как в табл. 4.38, за исключением

[1]) Предполагается, что каждая группа состоит из нормально распределенных случайных величин с постоянной неизвестной дисперсией. — *Прим. ред.*

Таблица 4.37

Долговечность батарей при различных условиях хранения

	Условия хранения				Сумма
	1	2	. . . .	k	
	X_{11} X_{12} . . . . X_{1n_1}	X_{21} X_{22} . . . . X_{2n_2}	. . . .	X_{k1} X_{k2} . . . . X_{kn_k}	
Сумма	T_1	T_2	. . . .	T_k	$T=\sum\limits_{i=1}^{k} T_i$
Число наблюдений	n_1	n_2	. . . .	n_k	$n=\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$

Таблица 4.38

Схема дисперсионного анализа данных, приведенных в табл. 4.37

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Математическое ожидание средних квадратов	Отношение F
Между условиями хранения	$k-1$	$\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{T_i^2}{n_i}-\frac{T^2}{n}=S_y$	$\frac{S_y}{k-1}$	$\sigma^2+\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n_i\alpha_i^2}{k-1}$	$\frac{S_y/(k-1)}{S_0/(n-k)}$
При данных условиях хранения	$\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k$	$\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{T_i^2}{n_i}=S_0$	$\frac{S_0}{n-k}$	σ^2	
Сумма	$\sum\limits_{i=1}^{n} n_i-1=n-1$	$\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-\frac{T^2}{n}=S$	. . . . .		

того, что математическое ожидание среднего квадрата взаимодействия между условиями равно $\sigma^2+n_0\sigma_\alpha^2$, где

$$n_0=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i-\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \Big| \sum_{i=1}^{k} n_i}{k-1}. \qquad (4.149)$$

Для модели с фиксированными уровнями факторов H_0: $\alpha_i=0$, $i=1, 2, \ldots, k$. Если гипотеза H_0 верна, то величина

$$\frac{S_y/(k-1)}{S_0/(n-k)}$$

имеет F-распределение с $k-1$ и $n-k$ степенями свободы. Если эта величина больше $F_{1-\alpha;\,k-1;\,n-k}$, где α — уровень значимости, то гипотеза H_0 отвергается и делается вывод, что между условиями хранения имеются статистически значимые различия. Для модели со случайными уровнями факторов $H_0:\sigma_\alpha^2=0$. Применяется тот же метод проверки, что и в случае модели с фиксированными уровнями факторов. Однако при более сложном анализе могут использоваться различные методы проверки.

Пример 4.71. При проведении эксперимента по оценке влияния постоянной влажности на эффективное сопротивление 10-омных резисторов, поступающих от четырех различных поставщиков, получены данные, приведенные в табл. 4.39. Имеются ли

Таблица 4.39

Эффективные сопротивления

Поставщик				Поставщик			
A	*B*	*C*	*D*	*A*	*B*	*C*	*D*
8	12	9	10	6	7	12	9
11	11	13	10	7	6	14	7

статистически значимые различия между резисторами четырех поставщиков при уровне значимости $\alpha=0{,}05$? Поскольку эти поставщики не были выбраны из некоторой совокупности поставщиков, более подходящей является модель с фиксированными уровнями факторов. Сумма квадратов равна

$$S=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} X_{ij}^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} X_{ij}\right)^2}{16}=1540-152^2/16=96,$$

$$S_y=1/4\,(32^2+36^2+48^2+36^2)-152^2/16=36,$$

$$S_o=1540-1480=60.$$

Таблица 4.40

Схема дисперсионного анализа для данных табл. 4.39

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	F
Между поставщиками	3	36	12	2,4
Внутри партии от данного поставщика	12	60	5	
Сумма	15	96		

Таблица 4.41

Эффективное сопротивление некоторого резистора при различных уровнях температуры и влажности

(n наблюдений на каждую комбинацию условий)

Влажность	Температура				Сумма
	T_1	T_2	....	T_c	
H_1	X_{111} X_{112} ...... X_{11n}	X_{121} X_{122} ...... X_{12n}	....	X_{1c1} X_{1c2} ...... X_{1cn}	R_1
H_2	X_{211} X_{212} ...... X_{21n}	X_{221} X_{222} ...... X_{22n}	....	X_{2c1} X_{2c2} ...... X_{2cn}	R_2
....	....	....	....	....	....
Hr	X_{r11} X_{r12} ...... X_{r1n}	X_{r21} X_{r22} ...... X_{r2n}	....	X_{rc1} X_{rc2} ...... X_{rcn}	R_r
Сумма	C_1	C_2	....	C_c	T

Схема дисперсионного анализа показана в табл. 4.40. Так как $F_{0,95;\,3;\,12} = 3{,}49 > 2{,}4$, нет оснований отвергать гипотезу H_0: $\alpha_i = 0$; это означает, что у рассмотренных резисторов, находящихся в условиях постоянной влажности, нет различий в эффективном сопротивлении.

4.11б. Двухфакторный анализ. Можно проводить эксперименты для исследования влияния нескольких факторов на нескольких уровнях с одним или большим числом наблюдений на каждом уровне.

Определение. Если наблюдения проводят для всех возможных комбинаций условий, то такой *эксперимент* называется *факторным*. Предположим, что исследуется эффективное сопротивление некоторого резистора при c различных уровнях температуры и r уровнях влажности. Если при каждой комбинации условий производятся n наблюдений, то получим результаты, представленные в табл. 4.41. Схема дисперсионного анализа данных табл. 4.41 приведена в табл. 4.42.

Таблица 4.42

Схема дисперсионного анализа для табл. 4.41

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат
Температура	$c-1$	$S_{\text{тр}} = \dfrac{1}{nr}\sum\limits_{i=1}^{c} C_i^2 - \dfrac{T^2}{rcn}$	$\dfrac{S_{\text{тр}}}{c-1}$
Влажность	$r-1$	$S_{\text{вл}} = \dfrac{1}{nc}\sum\limits_{i=1}^{r} R_i^2 - \dfrac{T^2}{rcn}$	$\dfrac{S_{\text{вл}}}{r-1}$
Взаимодействие (температура $\times$ $\times$ влажность)	$(c-1)(r-1)$	$S_{\text{вз}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{c}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)^2 - \dfrac{T^2}{rcn} - S_{\text{тр}} - S_{\text{вл}}$	$\dfrac{S_{\text{вз}}}{(c-1)(r-1)}$
Ошибка	$rc(n-1)$	$S_0 = \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{c}\sum\limits_{k=1}^{n} X_{ijk}^2 - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{c}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)^2$	$\dfrac{S_0}{rc(n-1)}$
Сумма	$rcn-1$	$S = \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{c}\sum\limits_{k=1}^{n} X_{ijk}^2 - \dfrac{T^2}{rcn}$	

Математическая модель для эксперимента такого типа имеет вид

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \begin{matrix} i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ c, \\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \end{matrix} \qquad (4.150)$$

где μ — истинное среднее, α_i — истинный эффект i-го уровня влажности; β_j — истинный эффект j-го уровня температуры; $(\alpha\beta)_{ij}$ — истинный эффект взаимодействия i-го уровня влажности и j-го уровня температуры, т. е. истинный эффект комбинации условий (i, j), не объясняемый эффектами α_i и β_j; ε_{ijk} — истинный эффект k-го наблюдения при комбинации условий (i, j), ε_{ijk} — независимые случайные величины с распределением $N(0, \sigma^2)$.

Принимаем следующие допущения.

Модель с фиксированными уровнями факторов. (Рассматриваются только уровни температуры и влажности, действительно встречающиеся в эксперименте.)

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{c} \beta_j = \sum_{i=1}^{r} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{c} (\alpha\beta)_{ij} = 0.$$

Модель со случайными уровнями факторов. (Рассматривается некоторая совокупность уровней температуры и влажности.)

α_i — независимые случайные величины, распределенные по закону $N(0, \sigma_\alpha^2)$.

β_j — независимые случайные величины, распределенные по закону $N(0, \sigma_\beta^2)$.

$(\alpha\beta)_{ij}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$.

Модель смешанного типа. (Для одного фактора рассматриваются только уровни, представленные в эксперименте, а для другого — совокупность уровней.) Предположим, что уровни влажности фиксированы, а уровни температуры случайны; тогда

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} (\alpha\beta)_{ij} = 0,$$

β_j — независимые случайные величины, распределенные по закону $N(0, \sigma_\beta^2)$.

Математические ожидания средних квадратов для этих трех моделей показаны в табл. 4.43. С помощью математических ожиданий средних квадратов, приведенных в табл. 4.43, можно определить соответствующий F-критерий. В случае взаимодействия эффект, вызываемый совместным действием двух факторов, следует рассматривать самостоятельно, если он отличается от суммы эффектов, вызываемых каждым из факторов в отдельности.

Таблица 4.43

Математические ожидания средних квадратов для схемы дисперсионного анализа табл. 4.42

Источник изменчивости	Модель с фиксированными уровнями факторов	Модель со случайными уровнями факторов	Модель смешанного типа (фиксированные уровни влажности; случайные уровни температуры)
Температура	$\sigma^2 + nr \sum_{j=1}^{c} \beta_j^2/(c-1)$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + nr\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + nr\sigma_\beta^2$
Влажность	$\sigma^2 + nc \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2/(r-1)$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + nc\sigma_\alpha^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + nc \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2/(r-1)$
Взаимодействие (температура $\times$ влажность)	$\sigma^2 + n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\alpha\beta_{ij}^2}{(r-1)(c-1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
Ошибка	σ^2	σ^2	σ^2
Сумма	. . . .	. . . .	. . . .

Примечание. Если в случае модели с фиксированными уровнями факторов для каждой комбинации условий имеется только одно наблюдение, то необходимо принять допущение об отсутствии взаимодействия, чтобы получить приемлемый критерий для проверки эффектов влажности и температуры.

4.11в. Латинский квадрат. Этот план часто используется в технических приложениях. Табл. 4.44 хорошо иллюстрирует рассматриваемый план.

Примечание. Пусть имеются три фактора и для каждого из них рассматриваются четыре уровня. Уровни для станков и операторов размещены соответственно в столбцах и строках таблицы. Материалы распределяются между станками и операторами случайным образом, при этом каждый оператор только один раз работает на определенном станке и только один раз

Таблица 4.44

Латинский квадрат 4×4

Операторы	Станки 1	Станки 2	Станки 3	Станки 4	Сумма
1	D	A	B	C	$T_{1.}$
2	A	C	D	B	$T_{2.}$
3	B	D	C	A	$T_{3.}$
4	C	B	A	D	$T_{4.}$
Сумма	$T_{.1}$	$T_{.2}$	$T_{.3}$	$T_{.4}$	T

Примечание. A, B, C, D обозначают четыре вида материала, а T_A, T_B, T_C и T_D — соответствующие суммы.

обрабатывает определенный вид материала. В случае единственного наблюдения для каждой комбинации условий для плана, показанного в табл. 4.44, математическая модель имеет вид

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \quad \begin{array}{l} i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \\ k = A,\ B,\ C,\ D \\ (k \text{ не зависит от } i,\ j), \end{array} \tag{4.151}$$

где μ — истинное среднее; α_i — истинный эффект i-го оператора; β_j — истинный эффект j-го станка; γ_k — истинный эффект k-го материала; ε_{ijk} — истинный случайный эффект, ε_{ijk} — независимые случайные величины с распределением $N(0, \sigma^2)$.

Схема дисперсионного анализа данных, приведенных в табл. 4.44, дается в табл. 4.45. Соответствующие F-критерии получают как отношение средних квадратов факторов к среднему квадрату ошибки.

Латинский квадрат представляет собой эффективный план эксперимента, если выполняются принятые допущения, при этом требуется выборка меньшего объема. Этот план можно использовать только в случае отсутствия взаимодействия факторов. Если информация о взаимодействии факторов недостаточна, то следует применять факторный план.

Одним из последних достижений в области статистических методов исследования является планирование эксперимента на поверхности отклика. Этот план обеспечивает наиболее экономичное расположение условий эксперимента, дающих максимальный или минимальный «отклик», с помощью некоторого последовательного метода. Теория этих методов и их практиче-

Таблица 4.45

Схема дисперсионного анализа данных, приведенных в табл. 4.44

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Математическое ожидание средних квадратов
Станок	3	$\sum_{j=1}^{4} \frac{T_{.j}^2}{4} - \frac{T^2}{16} = S_{\text{ст}}$	$\frac{S_{\text{ст}}}{3}$	$\sigma^2 + \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{4} \beta_j^2$
Оператор	3	$\sum_{i=1}^{4} \frac{T_{.i}^2}{4} - \frac{T^2}{16} = S_{\text{оп}}$	$\frac{S_{\text{оп}}}{3}$	$\sigma^2 + \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2$
Материал	3	$\sum_{k=A}^{D} T_k^2 - \frac{T^2}{16} = S_{\text{м}}$	$\frac{S_{\text{м}}}{3}$	$\sigma^2 + \frac{4}{3} \sum_{k=A}^{D} \gamma_k^2$
Ошибка	6	$S_{\text{о}} = S - S_{\text{ст}} - S_{\text{оп}} - S_{\text{м}}$	$\frac{S_{\text{о}}}{6}$	σ^2
Сумма	15	$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{16} = S$		

ское применение излагаются в работах [14—16]. Детали и особенности применения и анализа огромного числа существующих в настоящее время планов эксперимента рассматриваются во многих превосходных книгах и статьях. Некоторые планы приведены в приложении к данной книге. Необходимо проявлять осторожность при выборе того или иного плана. Правильный план эксперимента зависит от многих факторов. Рекомендуется также обращаться за консультацией к квалифицированным специалистам в области математической статистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pieruschka E., Principles of Reliability, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963.
2. Bowker A., Lieberman G., Engineering Statistics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Gliffs, N. J., 1959.
3. Hald A., Statistical Theory with Engineering Applications, Wiley, New York, 1952; русский перевод: Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, 1956.
4. Lloyd D., Lipow M., Reliability: Management, Methods, and Mathematics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Gliffs, N. J., 1962; русский перевод: Ллойд Д., Липов М., Надежность: организация, исследования, методы, математический аппарат, изд-во «Советское радио», 1964.

5. Buehler R. J., Confidence Intervals for the Product of Two Binomial Parameters, *J. Am. Statist. Assoc.*, 52, 482 (1953).
6. Goldthwaite L. R., Failure Rate Study for the Lognormal Lifetime Model, Proc. Seventh Natl. Symp. Reliability Quality Control, Philadelphia, 1961, p. 208.
7. Aitchison J., Brown J., The Lognormal Distribution, Cambridge Univ. Press, London, 1951.
8. Kao J. H. K., The Beta Distribution in Reliability and Quality Control, Tech. Rept. 2, Depart. of Industrial and Engineering Administration, Cornell Univ., Ithaca, N. Y.
9. Goode H. P., Kao J. H. K., Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing Based on the Weiball Distribution (Hazard Rate Criterion), Tech. Rept. TR4, Office of the Assistant Secretary of Defense (Installations and Logistics), GPO, 1962.
10. Gumbel E. J., Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications, Appl. Math., Ser. 33, Natl. Bur. Standards, 1954.
11. Mood A. M., Graybill F. A., Introduction to the Theory of Statistics, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1963.
12. Fisher R. A., On the Probable Error of a Coefficient of Correlation Deduced from Small Samples, *Metron*, 1, № 4, 3 (1921).
13. Cochran W. G., Some Consequences When the Assumptions for the Analysis of Variance Are Not Satisfied, *Biometrics*, 3, 22 (1947).
14. Davies O. L., Design and Analysis of Industrial Experiments, Hafner Publ. Co., Inc., New York, 1954.
15. Hunter J. S., Determination of Optimum Operating Conditions by Experimental Methods, *Indus. Quality Control*, 15 (1958), 16 (1959).
16. Box G. E. P., Hunter J. S., Experimental Designs for Exploring Response Surfaces, в книге V. Chew (ed.) Experimental Designs in Industry, Wiley, New York, 1958.
17. Epstein B., Testing of Hypotheses, Wayne State Univ. Tech. Rept., 3, 1958.
18. Epstein B., Sobel N., Life Testing, *J. Am. Statist. Assoc.*, 48, 486 (1953).
19. Epstein B., Truncated Life Tests in the Exponential Case, *Ann. Math. Statist.*, 25, 555 (1954).
20. Weibull W., A Statistical Representation of Fatigue Failures in Solids, Roy. Inst. Technology (Stockholm), November, 1954.
21. Wald A., Sequential Analysis, New York, 1947; русский перевод: Вальд А., Последовательный анализ, Физматгиз, 1960.
22. Reliability of Military Electronic Equipment, Report of Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment, Office of the Assistant Secretary of Defense, GPO, 1957.
23. Epstein B., Sobel M., Sequential Life Tests in the Exponential Case, *Ann. Math. Statist.*, 26, 82 (1955).
24*. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики, изд-во «Наука», 1965.
25*. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
26*. Гумбель Э., Статистика экстремальных значений, изд-во «Мир», 1965.
27*. Коуден Д., Статистические методы контроля качества, Физматгиз, 1961.
28*. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
29*. Келли Т. Л., Статистические таблицы, ВЦ АН СССР, 1966.
30*. Слуцкий Е. Е., Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятностей, Изд. АН СССР, 1950.
31*. Пагурова В. И., Таблицы неполной Г-функции, ВЦ АН СССР, 1964.

ГЛАВА 5

ПРИЕМОЧНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

К. М. Райерсон

Clifford M. Ryerson

Senior Staff Engineer, Head, Components Assurance Hughes Aircraft Company, Culver City, California

5.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе излагаются методы проведения приемочных испытаний, достаточное внимание уделяется анализу полученных результатов.

Большинство испытаний на надежность просты и осуществить их нетрудно, если понятны основные требования. Чаще всего допускают ошибки в истолковании показателей надежности, используемых для описания результатов испытаний на надежность. Различные авторы определяют надежность различными показателями, и зачастую ошибки возникают вследствие того, что либо испытания проводятся не для требуемого показателя, либо оценивают показатель, который не характерен для этого вида испытаний.

Ниже описаны различные виды приемочных испытаний, приведены основные показатели надежности и планы испытаний для каждого из них. В ряде разделов обсуждается понятие доверительного интервала и доверительных пределов. Приведены графики и несколько примеров.

5.2. ВИДЫ ПРИЕМОЧНЫХ ИСПЫТАНИЙ

5.2.1. Общие замечания. Первым видом приемочных испытаний является приемка элементов для сборки в узлы (или подсистемы) или в качестве запасных. Вторым видом испытаний являются приемочные испытания аппаратуры или оборудования определенного назначения. Приемочные испытания третьего вида применяются к большим системам. Основные показатели, связанные с этими видами приемочных испытаний, приведены в табл. 5.1.

5.2.2. Приемочные испытания элементов. Приемочные испытания первого вида могут быть с разрушением образцов и без разрушения. Приемочные испытания типа IA выполняются на небольшом числе выбранных образцов, а испытания типа IB

Таблица 5.1

Виды приемочных испытаний

Вид испытания	Испытываемые изделия	Объем испытываемой партии	Условия испытания	Показатели надежности
IA	Элементы, детали (образцы)	Небольшая выборка	С разрушением	Наработка на отказ Нагрузка, вызывающая отказ Процент отказов или положительных исходов Интенсивность отказов
IB	Элементы, детали (партии)	Большие партии	Без разрушения	Параметры в пределах допуска Процент брака Стабильность
II	Аппаратура	Небольшое число типовых образцов	Ухудшение характеристик	Среднее время между отказами Среднее время до первого отказа Ресурс (показатель долговечности) Период постоянной интенсивности отказов Средний период постоянной интенсивности отказов
III	Системы	Одна система определенного назначения	Без разрушения; иногда в условиях эксплуатации	Вероятность безотказной работы

зачастую проводятся на всей партии. Обычно в план испытаний элементов входят испытания двух типов, что обеспечивает полный анализ основных показателей надежности.

Испытания типа IA зачастую характеризуются условиями повышенной нагрузки. Испытания типа IB обычно проводятся при номинальных рабочих режимах. Более удачный, но не всегда осуществимый план предусматривает испытания по типу IB при наибольших значениях номинальной нагрузки на элементы. В следующих разделах условия испытаний описаны более подробно.

5.2.3. Приемочные испытания аппаратуры. Приемочные испытания аппаратуры почти всегда проводятся без разрушения. Планы составляются для получения оценки показателей надежности при четко заданных рабочих условиях. Эти испытания обычно выполняются под нагрузкой и приводят к отказу и последующему ремонту отдельных частей или элементов оборудования. Цель этих испытаний, как правило, заключается в оценке достаточности числа отказов для выполнения полной программы испытаний и в определении влияния отказов на характеристики оборудования после ремонта. Для приемочных испытаний второго вида характерно испытание либо небольшого числа образцов, либо одного образца.

5.2.4. Приемочные испытания систем. Приемочные испытания систем обычно проводятся на единственном образце. Планы испытаний систем очень разнообразны, и для разработки приемлемой методики испытаний обычно требуется много времени и усилий. Для испытаний этого вида характерно то, что размеры системы зачастую исключают возможность проведения испытаний в условиях реальной эксплуатации. Испытания узлов, как правило, проводятся независимо, а полученные результаты объединяются с целью получения общих выводов о системе расчетным путем. Основным исключением являются ракетные системы, испытания которых проводятся с помощью действительных запусков в космос. Возникает вопрос, можно ли считать испытания узлов системы приемочными для всей системы; большинство фирм, выпускающих системы, отказываются в этом случае доверять полученным результатам, ссылаясь на то, что многие параметры в такой программе испытаний остаются неизвестными и неконтролируемыми.

5.2.5. Показатели надежности в приемочных испытаниях. В испытаниях разных видов для решения о приемке применяются различные показатели надежности. Использование неподходящего показателя приводит к ошибке. Большинство показателей надежности взаимосвязано. Эти взаимосвязи рассматриваются в гл. 4 и т. II, гл. 4. Здесь приводятся описания различных показателей надежности и даются указания по поводу их применения в приемочных испытаниях.

А. Наработка на отказ. Этот показатель обычно используется для оценки надежности небольшой выборки элементов, испытываемых при определенной нагрузке до полного отказа всей выборки. Он определяется как среднее арифметическое значений наработок на отказ всех образцов выборки. Получающийся при этом закон распределения наработки на отказ дает возможность определить ресурс элементов в данных условиях. Это в свою очередь позволяет судить о возможности использования элементов при такой нагрузке. Иногда для оперативного определения влияния на надежность изменений, произведенных в конструкции, материалах или технологии, используются форсированные (повышенные) нагрузки. Испытания с переменной нагрузкой описаны в подразд. 5.4.5. Наработку на отказ не следует путать со средним временем до первого отказа или средним временем между отказами.

Б. Нагрузка, вызывающая отказ. Измерение нагрузки, вызывающей отказ, первоначально использовалось для оценки слабых звеньев в аппаратуре. Один или несколько нагрузочных факторов, таких, как температура или напряжение, увеличиваются до тех пор, пока не откажут все испытываемые образцы выборки. Среднее значение нагрузки, вызывающей отказ, и закон распределения нагрузки позволяют оценить прочность элементов. Недостатком такого подхода является то, что немногие элементы имеют простую форму зависимости между форсированными нагрузками и надежностью при нормальной или пониженных нагрузках. Нагрузка, вызывающая отказ, используется главным образом при анализе запаса прочности конструкции, что помогает найти правильное применение элементам партий. Эти вопросы рассматриваются в гл. 4, т. II.

В. Проценты отказов и положительных исходов. Эти показатели часто используются при решении вопроса о приемке изделий одноразового действия. Приемочные испытания с этими показателями могут проводиться, например, при определении качества винтовочных патронов. Известно, что качество пороха при хранении со временем ухудшается, поэтому через определенные промежутки времени производится выборка патронов для стрельбы из типовой винтовки. Пригодность хранящихся патронов определяется процентом положительных исходов.

Иногда эти показатели применяются для таких элементов, как предохранитель, или даже для таких систем одноразового действия, как ракеты. Последний пример, однако, не совсем удачен, поскольку процент отказов уникальных систем одноразового действия нельзя определять и использовать аналогично проценту отказов патронов. Для сложных систем вводят другие показатели (см. 5.2.5 *Л*).

Г. Интенсивность отказов. Этот показатель обычно применяется для элементов. Он представляет собой вероятность отказа невосстанавливаемого элемента в единицу времени после данного момента времени при условии, что до этого момента отказа не было. Интенсивность отказов обычно измеряют отношением числа отказов партии к ее объему в процентах за 1000 *час* работы. Подробное объяснение этого понятия и его математическое выражение даны в гл. 4 и т. II, гл. 5. Иногда интенсивность отказов измеряют числом отказов за 10^6 *час* работы, что на порядок больше числа отказов за 10^5 *час* (эквивалент процента за 1000 *час*). Еще одна используемая единица —

число отказов за 10^9 *час* работы. Оба последних показателя называют иногда битами (единицами интенсивности отказов), но такая терминология обычно не рекомендуется из-за путаницы с термином «бит», используемым в теории информации и вычислительной технике.

Д. Среднее время между отказами. Этот показатель обычно применяется при оценке надежности аппаратуры. Он отражает среднее время между отказами для периода нормальной эксплуатации, когда действует экспоненциальный закон распределения времени безотказной работы и еще не наступило предельное состояние, определяющее долговечность. (См. гл. 3 и 4, в которых обсуждаются понятия ресурса элемента и долговечности.) При использовании рассматриваемого показателя существует опасность истолкования его в качестве постоянной характеристики аппаратуры, что не соответствует действительности. Несмотря на то что после разработки и изготовления аппаратура имеет период постоянной интенсивности отказов, предшествующий предельному состоянию, определяющему долговечность, любая оценка среднего времени между отказами справедлива только для того периода, для которого она проведена. Для других периодов времени возможны другие оценки. Даже если кривая изменения интенсивности отказов аппаратуры полностью известна и среднее время между отказами определено, полученное значение этого показателя справедливо лишь для периода нормальной эксплуатации. Эту характеристику можно использовать для приемочных испытаний аппаратуры только вместе с оценками других характеристик, например долговечности.

Величину среднего времени между отказами можно определить путем испытания ряда образцов аппаратуры, фиксацией моментов отказа и делением суммарной наработки на общее количество отказов. (См. последующие разделы, где приведены примеры определения числа испытываемых образцов и времени испытания.)

Е. Среднее время до первого отказа. Аппаратура или ее отдельные узлы нередко размещаются в местах, недоступных для обслуживания. Важным показателем в таких случаях является среднее время до первого отказа. Этот показатель идентичен используемой в ряде случаев средней наработке на отказ. Величину среднего времени до первого отказа можно определить путем испытания ряда образцов аппаратуры в течение времени, пока впервые не откажет каждый из образцов. Очевидно, что использование того или другого показателя при планировании приемочных испытаний зависит от условий применения аппаратуры. Интересно отметить, что среднее время до первого отказа не равно среднему времени между отказами, если аппаратура не прошла период приработки.

Ж. Ресурс. Показателем долговечности служит ресурс. Под ресурсом понимают [1] наработку, при которой интенсивность отказов достигает удвоенного значения обратной величины среднего времени между отказами. Капитальный ремонт после исчерпания ресурса может вернуть (а может и не вернуть) аппаратуру в состояние с первоначальным значением среднего времени между отказами. Это зависит от того, насколько все элементы аппаратуры исчерпали к этому моменту свой ресурс.

З. Период постоянной интенсивности отказов. Сложная аппаратура, содержащая элементы с различными ресурсами, имеет несколько периодов постоянной интенсивности отказов. Многочисленные замены элементов и ремонты приводят к «перемешиванию» элементов с различными законами распределения ресурса; после каждого такого ремонта новое постоянное значение интенсивности отказов, как правило, становится несколько больше предыдущего. Наработка до установления этой новой постоянной интенсивности отказов в пределах долговечности аппаратуры определяется как период постоянной интенсивности отказов [1]).

И. Средний период постоянной интенсивности отказов. Обратная величина средней интенсивности отказов аппаратуры, получаемой после проведения некоторого числа замен элементов и ремонтов, называется средним периодом постоянной интенсивности отказов. Средний период постоянной интенсивности отказов будет равен периоду постоянной интенсивности отказов только в том случае, если после каждого ремонта и замены элементов с помощью совершенных методов проектирования, технологии и контроля при наличии качественных запасных частей для новых элементов удается получить такие же кривые интенсивности отказов, как и для первоначальных. Простейший путь для достижения подобного результата — замена целиком всей аппаратуры; при этом восстанавливается первоначальная надежность аппаратуры. На практике средний период постоянной интенсивности отказов составляет половину или четверть периода постоянной интенсивности отказов. Это необходимо учитывать при планировании приемочных испытаний.

К. Среднее время между профилактиками. Эта величина представляет собой средний интервал времени между профилактическими обслуживаниями с целью устранения или предупреждения неисправностей. От периода постоянной интенсивности отказов и среднего периода постоянной интенсивности

---

[1]) См. также [3*], гл. 20. — *Прим. ред.*

отказов этот показатель отличается тем, что он, во-первых, определяется запланированной периодичностью профилактических работ даже в случае отсутствия каких-либо отказов или неисправностей и, во-вторых, в него обычно включается весь период времени, в течение которого аппаратура работоспособна, в том числе время, когда аппаратура не должна функционировать.

Л. Вероятность безотказной работы. Вероятность безотказной работы P_s и надежность системы R являются обычно синонимами (более подробное объяснение см. в гл. 1, 4 и т. II, гл. 4). Этот показатель обычно означает степень соответствия системы требованиям приемки и определяется комбинированным методом теоретического анализа и обработки результатов испытаний (о прогнозировании надежности см. в гл. 1, т. II). Кратко можно записать

$$P_s = e^{-t/m}, \tag{5.1}$$

где P_s — вероятность положительного исхода, t — время испытания, m — среднее время между отказами, e — основание натурального логарифма.

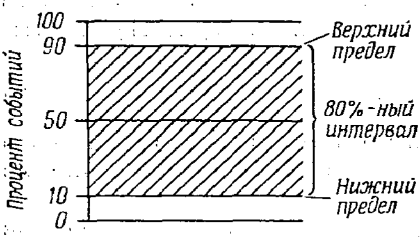
М. Уровни приемки и браковки (a, r). В большинстве приемочных испытаний условия приемки и браковки определяются значениями некоторых определяющих параметров. Уход параметров за допустимые пределы рассматривается как полное отсутствие работоспособности. Процент случаев выхода (% выхода) за допустимые пределы $(\pm X)$ определяет показатели приемки a и браковки r. Изменение величины определяющего параметра во время испытания под нагрузкой часто обозначают через Δ. Численные оценки величины Δ обычно называют Δ-измерениями (см. подразд. 5.4.6 об испытаниях с проверкой на уход параметров).

5.3. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ

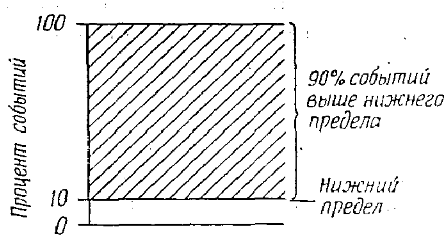
Доверительный интервал обычно задается верхним и нижним доверительными пределами. Вообще говоря, чем шире доверительный интервал, тем больше уверенности в том, что оцениваемая величина будет заключена между его границами. Проиллюстрируем это примером.

5.3.1. Доверительные пределы. Чтобы уяснить понятие доверительных пределов, рассмотрим время прибытия поезда, на котором в определенный день должен приехать ваш друг. Если известна только дата прибытия, то со 100%-ной уверенностью можно утверждать, что он прибудет от 0 час. до 24.00. Если же станет известно, что ночные поезда с 6 час. вечера до 6 час. утра в городе не останавливаются, то удастся сузить 100%-ный доверительный интервал времени прибытия до 12 час. пополудни ± 6 *час.* Если посчастливится узнать, что поезда этого направления приходят утром, то 100%-ный интервал сузится еще более. Теперь он будет между 6 час. утра и 12 час. дня. Однако при наличии таких данных вероятность прибытия в какую-то определенную минуту будет очень мала. Даже если известны расписание и номер поезда, 100%-ный доверительный интервал будет достаточно широким, если учесть причины, которые могут повлиять на рассматриваемое событие.

Предположим, что по расписанию поезд должен прибыть в 11 час. утра. Можно просмотреть контрольные записи времени прибытия поездов и найти, что в среднем 8 дней из 10 этот



Фиг. 5.1. Двусторонний доверительный интервал.



Фиг. 5.2. Односторонний доверительный интервал.

поезд приходит на 5 мин. позже или раньше. Таким образом, 80%-ный доверительный интервал отклонения от времени прибытия имеет длительность 10 *мин* с нижним пределом 10 час. 55 мин. и верхним пределом 11 час. 5 мин. На языке статистики это называется двусторонним доверительным интервалом, что означает наличие двух пределов — нижнего и верхнего.

Пусть теперь вы желаете убедиться в том, что этот поезд является одним из тех, которые прибывают в пределах указанного 80%-ного доверительного интервала. Для этого можно, например, справиться у дежурного администратора за некоторое время до прибытия поезда, по расписанию ли идет поезд. В 20% случаев интересующий вас поезд не будет укладываться в 80%-ный доверительный интервал по каким-либо особым причинам. Такая справка у дежурного эквивалентна в некотором смысле инженерной оценке результатов испытания через вспомогательные факторы для определения системы взаимосвязанных основных факторов.

Предположим также, что вы сейчас не на вокзале и не знаете точно, когда там будете. В этом случае для вас важнее всего уверенность в том, что вы не опоздаете к прибытию поезда и успеете встретить своего друга. Если вы собираетесь приехать по крайней мере за час до прибытия поезда по расписанию, то практически на 100% можно гарантировать, что вы не опоздаете. Если же вы захотите приехать к прибытию поезда, то уверенность в том, что вы приедете раньше, уменьшится до 50%. При таких условиях основным фактором становится непостоянство времени прибытия поезда. Этот пример является иллюстрацией статистического метода определения одностороннего доверительного интервала. Односторонний (фиг. 5.2) и двусторонний (фиг. 5.1) интервалы описываются ниже.

5.3.2. Двусторонний доверительный интервал. Для приемочных испытаний на надежность двусторонний доверительный интервал может быть определен с помощью χ^2-распределения.

Значения χ^2 приведены в табл. А.6. В дополнение к табл. А.6 можно рекомендовать таблицу, приведенную в книге Муда [2]. Верхний предел $m_в$ и нижний предел $m_н$ определяются по формулам

$$m_в = \frac{2f\hat{m}}{\chi^2_{2f;\ 1-\frac{1-P}{2}}}, \qquad (5.2)$$

$$m_н = \frac{2f\hat{m}}{\chi^2_{2f;\ \frac{1-P}{2}}}, \qquad (5.3)$$

где $\hat{m}$ — среднее время между отказами, f — число отказов, P — коэффициент доверия.

Предположим, например, что требуется определить 90%-ный доверительный интервал для среднего времени между отказами m, если суммарная наработка за время испытаний составила 1000 *час* и было зафиксировано 5 отказов. Оценка максимального правдоподобия для m определяется делением суммарной наработки t на число отказов f:

$$\hat{m} = \frac{t}{f}. \qquad (5.4)$$

Следовательно, $\hat{m} = \frac{1000}{5} = 200$ *час*. Из формулы (5.2) получаем

$$m_в = \frac{2 \cdot 5 \cdot 200}{\chi^2_{10;\ 0,95}} = \frac{2000}{3,94} = 508 \text{ час} \qquad (5.5а)$$

и из (5.3)

$$m_н = \frac{2 \cdot 5 \cdot 200}{\chi^2_{10;\ 0,05}} = \frac{2000}{18,3} = 109 \text{ час}. \qquad (5.5б)$$

Таким образом, полученный для искомой величины 90%-ный доверительный интервал простирается от 109 до 508 *час*. Другими словами, на 90% гарантируется, что истинная величина m лежит между 109 и 508 *час.*

Решение этой задачи можно упростить, если применить следующие преобразования:

$$m_{в} = K_{в}\hat{m}, \tag{5.6}$$

$$m_{н} = K_{н}\hat{m}, \tag{5.7}$$

где

$$K_{в} = \frac{2f}{\chi^2_{2f;\ 1-\frac{1-P}{2}}}, \quad K_{н} = \frac{2f}{\chi^2_{2f;\ \frac{1-P}{2}}}. \tag{5.8}$$

Таблица 5.2

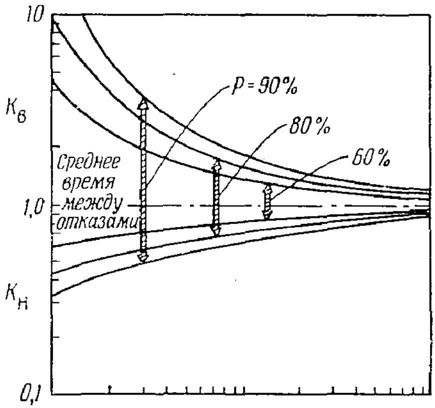
Значения коэффициентов $K_{н}$ и $K_{в}$ для двусторонней оценки параметра m

Число отказов f	Верхний доверительный предел $K_{в}$					Нижний доверительный предел $K_{н}$				
	95%	90%	80%	70%	60%	60%	70%	80%	90%	95%
1	28,6	19,2	9,44	6,50	4,48	0,620	0,530	0,434	0,333	0,270
2	9,2	5,62	3,76	3,00	2,43	0,667	0,600	0,515	0,422	0,360
3	4,8	3,68	2,72	2,25	1,95	0,698	0,630	0,565	0,476	0,420
4	3,7	2,92	2,29	1,96	1,74	0,724	0,662	0,598	0,515	0,455
5	3,0	2,54	2,06	1,80	1,62	0,746	0,680	0,625	0,546	0,480
6	2,73	2,30	1,90	1,70	1,54	0,760	0,700	0,645	0,568	0,515
7	2,50	2,13	1,80	1,63	1,48	0,768	0,720	0,667	0,592	0,535
8	2,32	2,01	1,71	1,57	1,43	0,780	0,730	0,680	0,610	0,555
9	2,19	1,92	1,66	1,52	1,40	0,790	0,740	0,690	0,625	0,575
10	2,09	1,84	1,61	1,48	1,37	0,800	0,752	0,704	0,637	0,585
11	2,00	1,78	1,56	1,45	1,35	0,805	0,762	0,714	0,650	0,598
12	1,93	1,73	1,53	1,42	1,33	0,815	0,770	0,720	0,660	0,610
13	1,88	1,69	1,50	1,40	1,31	0,820	0,780	0,730	0,662	0,620
14	1,82	1,65	1,48	1,38	1,30	0,824	0,785	0,736	0,675	0,630
15	1,79	1,62	1,46	1,36	1,28	0,826	0,790	0,746	0,685	0,640
16	1,75	1,59	1,44	1,35	1,27	0,830	0,795	0,750	0,690	0,645
17	1,71	1,57	1,42	1,33	1,26	0,835	0,800	0,760	0,700	0,655
18	1,69	1,54	1,40	1,32	1,25	0,840	0,805	0,765	0,710	0,660
19	1,66	1,52	1,39	1,31	1,24	0,845	0,808	0,767	0,715	0,665
20	1,64	1,51	1,38	1,30	1,23	0,847	0,810	0,768	0,719	0,675
25	1,55	1,44	1,33	1,26	1,21	0,860	0,830	0,790	0,740	0,700
30	1,48	1,39	1,29	1,23	1,18	0,870	0,840	0,806	0,756	0,720
40	1,40	1,32	1,24	1,19	1,16	0,884	0,860	0,826	0,787	0,750
50	1,35	1,28	1,21	1,17	1,14	0,892	0,872	0,847	0,806	0,770
70	1,28	1,23	1,18	1,14	1,11	0,910	0,890	0,860	0,830	0,800
100	1,23	1,19	1,14	1,12	1,09	0,924	0,906	0,880	0,852	0,830
200	1,16	1,13	1,10	1,08	1,06	0,940	0,935	0,916	0,890	0,870
300	1,12	1,10	1,08	1,06	1,05	0,955	0,942	0,930	0,910	0,895
500	1,09	1,08	1,06	1,05	1,04	0,965	0,954	0,942	0,930	0,915

В табл. 5.2 приведены вычисленные автором коэффициенты $K_н$ и $K_в$ для ряда значений числа отказов f. На фиг. 5.3 показаны зависимости этих коэффициентов от f для различных доверительных интервалов.

5.3.3. Односторонний доверительный интервал. При испытаниях на надежность во многих случаях целесообразно определение одностороннего доверительного интервала. Так, например, с заданным коэффициентом доверия требуется показать, что среднее время между отказами m больше некоторого нижнего предела. Вероятность такого события описывается площадью одного из «хвостов» плотности вероятности. Для экспоненциального распределения нижний предел величины m определяется по формуле:

$$m_{н.\,о.} = \frac{2f\hat{m}}{\chi^2_{2f;\,1-P}}, \qquad (5.9)$$



Фиг. 5.3. Двусторонние доверительные интервалы.

где f — число отказов, P — коэффициент доверия, $m_{н.\,о}$ — нижний односторонний предел величины m, $\hat{m}$ — полученное при испытаниях значение величины m; χ^2 берется из вышеуказанной таблицы χ^2-распределения для значений $2f$ и $1 - P$.

Пусть требуется доказать с коэффициентом доверия 90%, что среднее время между отказами $\bar{m}$ не меньше $m_{н.о.} = 100$ *час*. Какое значение $\hat{m}$ нужно в этом случае получить при испытаниях, продолжающихся только до первого отказа?

Из формулы (5.9)

$$\hat{m} = \frac{m_{н\ о.}\chi^2_{2f;\,1-P}}{2f} = \frac{100 \cdot 4{,}605}{2 \cdot 1} = 230\ \textit{час}.$$

Следовательно, если длительность испытания до первого отказа составляет 230 *час*, то с коэффициентом доверия 90% можно гарантировать, что истинное значение величины m не меньше 100 *час*.

Но предположим, что аппаратура отказала, не проработав 230 *час*. Это еще не доказывает, что величина m меньше 100 *час*. Необходимо учитывать, что даже при истинном значении m, равном 100 *час*, можно быть на 90% уверенным в том, что в течение 230 *час* работы отказ произойдет. Поэтому, если аппаратура откажет первый раз, не проработав 230 *час*, можно продолжить испытания, чтобы получить информацию о последующих отказах и определить уровень доверия к результатам.

Продолжим испытания до второго отказа, чтобы определить, не превышает ли среднее время между отказами величину $m_{\text{н. о}}$. Как долго должны длиться испытания до второго отказа, чтобы на 90% быть уверенным в том, что $m_{\text{н. о}}$ равно или превышает 100 *час*? Из (5.9) следует

$\hat{m} = \frac{m_{\text{н. о}}\chi^2_{2f;\,1-P}}{2f}$, и так как в рассматриваемом случае $f = 2$ и $\chi^2_{4;\,10\%} = 7{,}779$, то

$$\hat{m} = \frac{100 \cdot 7{,}779}{4} = 194{,}5 \text{ час.}$$

Однако полученная при испытаниях оценка $\hat{m}$ для m равна суммарной наработке за время испытаний t, деленной на число отказов:

$$\hat{m} = \frac{t}{f}, \tag{5.10}$$

т. е. суммарная наработка за время испытаний $t = f\hat{m}$. Так как $\hat{m} = 194{,}5$ и $f = 2$, то суммарная наработка до второго отказа

$$t = 2 \cdot 194{,}5 = 389 \text{ час.} \tag{5.11}$$

Для непосредственного определения суммарной наработки соотношение (5.10) можно привести к виду

$$t = \frac{m_{\text{н. о}}\chi^2_{2f;\,1-P}}{2}. \tag{5.12}$$

Таким образом, суммарную наработку t можно получить прямо из таблицы χ^2-распределения (табл. А.6). Для этого берется значение, которое соответствует числу степеней свободы $2f$ и вероятности $1 - P$, делится пополам и умножается на $m_{\text{н. о}}$.

Выражение (5.12) можно проще записать как

$$t = \varpi m_{\text{н. о}}, \tag{5.13}$$

где множитель ϖ определяется из таблиц χ^2. Рассчитанные автором коэффициенты ϖ для ряда значений f и P приведены в табл. 5.3. Как видно из таблицы, для гарантии того, что значение нижнего предела величины m с коэффициентом доверия 90% равно 100 *час*, нужно, чтобы аппаратура до первого отказа проработала 230 *час*, а, например, до третьего отказа — 532 *час*.

Описанный метод основан на предположении экспоненциального закона распределения времени между отказами за весь период испытаний. Если это предположение недопустимо и дока-

Таблица 5.3

Значения коэффициента w, определяющего суммарную наработку t, необходимую для получения P%-ного нижнего предела $m_{н. о.}$ для величины m

f \ P, %	95	90	80	75	50	20	10
0→1	2,99	2,30	1,61	1,38	0,69	0,223	0,105
2	4,74	3,89	2,99	2,69	1,68	0,824	0,532
3	6,29	5,32	4,28	3,92	2,67	1,530	1,102
4	7,75	6,70	5,51	5,10	3,67	2,297	1,745
5	9,15	8,00	6,72	6,25	4,67	3,089	2,432
6	10,51	9,25	7,90	7,40	5,65	3,903	3,152
7	11,84	10,60	9,07	8,55	6,65	4,733	3,895
8	13,15	11,70	10,23	9,70	7,65	5,576	4,656
9	14,43	13,00	11,38	10,80	8,65	6,428	5,432
10	15,70	14,20	12,52	11,90	9,65	7,289	6,221
11	16,96	15,40	13,65	13,00	10,65	8,160	7,020
12	18,20	16,60	14,77	14,10	11,65	9,031	7,829
13	19,44	17,80	15,90	15,20	12,65	9,91	8,646
14	20,67	18,90	17,01	16,30	13,65	10,794	9,469
15	21,88	20,10	18,12	17,40	14,65	11,682	10,299

Пример. Для утверждения с коэффициентом доверия 90%, что $m \geqslant 100$ *час*, необходимо получить суммарную наработку:

$t_{90\%;\ 1} = 230$ *час* до первого отказа,

или $t_{90\%;\ 2} = 389$ *час* до второго отказа,

или $t_{90\%;\ 3} = 532$ *час* до третьего отказа,

или $t_{90\%;\ 4} = 670$ *час* до четвертого отказа и т. д.

зано, что поток отказов во время испытаний не является пуассоновским, применяют непараметрические методы оценки результатов испытания.

5.3.4. Непараметрические испытания с односторонней оценкой. Иногда возникает необходимость определить надежность без каких-либо предположений относительно плотности вероятности отказов на данном отрезке времени. В таких случаях проводят непараметрические испытания. Такие испытания основаны на использовании F-распределения и формулы[1])

$$\widehat{R}(t) = \frac{1}{1 + \dfrac{f+1}{n-f} F_{\alpha;\ \nu_2;\ \nu_1}}, \tag{5.14}$$

[1]) См. [4*]. — *Прим. ред.*

где $\hat{R}(t)$ — надежность, полученная в результате испытаний с наработкой t *час*, f — число полученных отказов, n — число испытываемых невосстанавливаемых образцов либо число интервалов заданной длительности безотказной работы одного образца аппаратуры; $F_{\alpha;\ \nu_1;\ \nu_2}$ есть $\alpha\%$-ная точка F-распределения с соответствующими степенями свободы (табл. А.7).

Таким образом, с коэффициентом доверия $1-\alpha$ истинная вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени t равна или больше $\hat{R}(t)$. Необходимо заметить, что надежность здесь определяется непосредственно объемом выборки и количеством отказов без учета неизвестных параметров, таких, как среднее время между отказами или интенсивность отказов.

Для использования таблицы F-распределения следует заметить, что

Таблица 5.4

Непараметрические испытания для определения $\hat{R}(t)$ в процентах с коэффициентом доверия 90%

n \ f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0											
2	10	0										
3	19	10	0									
4	26,5	18	8	0								
5	33,5	25,5	15	8	0							
6	40	32	21	14	8	0						
7	44	37	27	20	13	6	0					
8	48	41	33	25	18	11	5	0				
9	51	45	37	30	23	16	10	4	0			
10	54	48	41	34	28	21	15	8,5	3,5	0		
11	56	50	44	38	32	25,5	19	12	8	4	0	
12	58	53	47	41	35,5	29,5	22	16	11	8	3	0
15	64,5	59,5	54,5	45,5	44	39	33	27	22,5	18,5	14,5	10
18	69	65	60,5	56	51	47	42	37	32,5	28,5	24	19,5
20	72	68	64	60	55,5	51	46,5	42,5	38	34	30	26
24	76	73	69	65,5	62	58	55	51	47	43,5	40	36
28	79	76	72,5	69,5	66,5	63	60	57	53,5	50	47	44
30	80	77	74	71	68	65	62	59	56	53	50	47
35	82	79,5	76,7	74	71,3	68,5	66	64	60,6	58	55,1	52,5
40	84	81,5	79	76,6	74	71,5	69	66,7	64,5	62	59,5	57
50	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65
60	89	87,5	86	84	82,2	80,6	78,8	77	75,5	73,6	72	70
70	90,6	89,2	87,8	86,1	84,5	83	81,4	79,8	78,5	77	75,5	74
80	91,6	90,4	89,1	87,7	86,2	84,9	83,5	82	81,9	79,5	78,2	76,9
90	92,3	91,2	90,1	89	87,8	86,5	85,3	84,1	83	81,8	80,6	79,5
100	93	92	91	90	89	88	87	86	85	84	88	82

α%-ная точка определяется

$$\textit{коэффициентом доверия} = 1 - \alpha, \tag{5.15}$$

$$\nu_2 = 2f + 2, \tag{5.16}$$

$$\nu_1 = 2n - 2f. \tag{5.17}$$

Предположим, например, что суммарная наработка аппаратуры за время испытаний в 20 раз превысила заданное время безотказной работы t, а отказала аппаратура всего 4 раза. Применяем непараметрический метод оценки надежности за это

Таблица 5.5

Непараметрические испытания для определения $\hat{R}(t)$ в процентах с коэффициентом доверия 50%

n \ f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0											
2	38											
3	51,5	33,5										
4	60,5	44										
5	68	52	36									
6	70,5	58	44	31,5								
7	74	62,5	50	39	29							
8	76,6	66,5	55	45	36							
9	79	69,5	59	50,5	41	31,5						
10	80,8	72	63	55	46	37	29					
11	82,2	74	66	59	50	42	34					
12	83,5	76	68	62	54	46	38,2	30,2				
15	86,5	80	74	69	62	56	50	43	38	31,1		
18	88,5	83	78	73,6	68	63	57,5	52,5	47	41,6		
20	89,8	84,2	80	76	71	66,6	61,5	57,2	52	43	39	
22	90,8	85,6	81,5	78	73,6	69,5	65	61	57	52	47,5	44,2
24	91,5	86,6	83	79,5	75,6	72	67,7	64	60,2	56	52	48,5
26	92,1	87,4	84	80,8	77,3	74	70	66,8	63	59	55,1	52,2
30	93,2	89	86	83	80,2	77,2	74	71	67,5	64	61	58,5
35	94,2	90,2	87,7	85,3	83	80,5	77,5	75	72	69	66,5	64
40	95	91,3	89	87	85,2	83	80,2	78	75,2	73	70,3	68,5
50	96	93	91,2	89,5	88	86	84	82	80	78	76	74
60	96,8	94,2	93	91	90	88	86,5	84,8	83,2	81,5	80	78
70	97,2	95,2	94	92,3	91,2	89,6	88,2	87	85,5	84	82,6	81
80	97,7	96	94,8	93,3	92,4	91	89,7	88,5	87,3	86	84,8	83,3
90	97,8	96,5	95,5	94,2	93,2	92	91	90	88,8	87,8	86,5	85,1
100	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89	88	87
200	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89	88

время с коэффициентом доверия 90%. Из формулы (5.14) находим

$$\hat{R}(t) = \frac{1}{1 + \frac{5}{16} F_{10\%;\ 10;\ 32}} = \frac{1}{1 + 0{,}316 \cdot 2{,}15} = 0{,}6. \quad (5.18)$$

Следовательно, на 90% можно быть уверенным в том, что надежность превышает значение 0,6.

С целью облегчения и ускорения обработки результатов испытаний автором подготовлены две простые таблицы — 5.4 и 5.5 для коэффициентов доверия 90 и 50% соответственно. В этих таблицах приведены значения нижнего предела надежности испытываемой аппаратуры.

Пусть, например, суммарная наработка составила 60 интервалов требуемого времени безотказной работы t и было зафиксировано 3 отказа. Из табл. 5.4 получаем значение $\hat{R}(t) = 86\%$ с коэффициентом доверия 90%, из табл. 5.5 на пересечении столбца $f = 3$ и строки $n = 60$ получаем $\hat{R}(t) = 0{,}93$ с коэффициентом доверия 50%.

5.3.5. Предупреждение. По определению непараметрическая надежность не является показателем, который можно экстраполировать за пределы отрезка времени испытаний. Чтобы можно было экстраполировать надежность, необходимо вернуться к параметрическим методам, при которых вводятся дополнительные предположения о параметрах. Наиболее часто предполагается экспоненциальный закон распределения времени между отказами. Следует подчеркнуть, что в случае ошибочности экспоненциального предположения последствия могут оказаться серьезными, особенно для изготовителя аппаратуры. Основной задачей методики в этом случае является проверка приемлемости экспоненциального закона с целью прогнозирования.

5.4. ПРИЕМОЧНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ НА НАДЕЖНОСТЬ

5.4.1. Общие замечания. Надежность элементов зависит от отказов двух типов: внезапных и износовых (постепенных). В обоих случаях можно проводить одинаковые испытания, но полученные данные должны анализироваться по-разному. Ниже испытания для этих двух типов отказов вначале рассматриваются отдельно, а затем показывается, как следует планировать объединенные испытания. Излагаются вопросы, связанные с ограниченностью объема выборки при испытаниях и разрушением испытываемых образцов.

5.4.2. Идеальные испытания надежности элементов. Идеальные испытания надежности элементов должны проводиться при следующих условиях:

1. Число испытываемых образцов велико.

2. Небольшая стоимость испытываемых образцов, испытания проводятся до отказа образцов.

3. Условия испытаний полностью соответствуют реальным условиям эксплуатации.

4. Испытания не ограничиваются во времени.

5. Определяющие параметры всех испытываемых образцов непрерывно контролируются.

6. В течение всего периода испытаний анализируются полученные данные о надежности каждого элемента.

На основании подобного рода испытаний с высоким уровнем доверия может быть получена следующая информация о надежности:

1. Существование периода приработки или выжигания, его длительность и точное значение интенсивности отказов за этот период.

2. Наличие «плоского» участка на графике зависимости интенсивности отказов от времени, на котором интенсивность отказов почти постоянна и отказы имеют внезапный характер. Это позволяет оценить интенсивность внезапных отказов.

3. Кривые ухода параметров для элементов, по которым определяется ресурс элементов в соответствии с заданными требованиями к параметрам.

4. Среднее значение ресурса для всей испытываемой партии и его распределение.

Испытания такого типа проводились для оценки элементов, использованных в трансляционных усилителях американских подводных телефонных линий связи. Большой процент элементов из каждой поставляемой партии расходовался на проведение всесторонних испытаний. Для многих современных разработок подобные идеальные испытания не могут быть проведены. Обычно объем испытываемой партии невелик, время испытаний сильно ограничено, элементы дорогие, а действительные условия эксплуатации отличаются от условий испытаний. Но несмотря на все эти препятствия, информация о надежности необходима. Задача как раз и состоит в том, чтобы упростить испытания, не снижая заданного доверия к полученным результатам.

5.4.3. Определение периода приработки. Для определения длительности периода приработки испытаниям подвергается как можно большее число элементов для того, чтобы получить наработку порядка нескольких сот часов в условиях максимально допустимой нагрузки. Интенсивность отказов подсчитывается в течение всего периода через относительно короткие промежутки времени. Период приработки, если он существует, заканчивается снижением интенсивности отказов до какого-то установившегося уровня. С этого момента и должны начинаться испытания на надежность. Период приработки может составлять до 500 *час*, но у хороших современных элементов он обычно не превышает 150 *час*. Многие фирмы-изготовители поставляют партии элементов только с установившейся интенсивностью отказов. Аппаратуру, собранную на этих элементах, можно сразу испытывать на надежность без дополнительной приработки.

5.4.4. Внезапные отказы. Интенсивность внезапных отказов зависит от электрических нагрузок и от окружающих условий. Поэтому для ускорения испытаний и повышения точности их результатов все элементы испытываются в максимально утяжеленных условиях.

Чем больше испытывается элементов, тем лучше, причем необходимо следить за изменением интенсивности отказов во времени, чтобы не пропустить момент, когда элементы выработают свой ресурс. Этот момент, как уже отмечалось, рекомендуется определять временем, когда интенсивность отказов возрастет вдвое. Но при этом в силу случайной природы отказов возможны и допустимы отклонения в ту или другую сторону. Эти отклонения сглаживаются путем усреднения интенсивности отказов.

Объем испытываемой выборки определяется предусмотренным планом временем испытания и требуемым уровнем доверия к получаемой информации об интенсивности отказов. Для интенсивности отказов λ точечная оценка максимального правдоподобия $\hat{\lambda}$ с коэффициентом доверия 60% определяется следующим образом:

$$\lambda_{60\%} = \frac{f}{Nt} \cdot 10^{-5}\%/1000 \textit{ час}, \tag{5.19}$$

где N — число элементов в выборке, t — время испытаний, *час*, f — число отказов за время испытаний.

(*Замечание*. В большинстве практических случаев число отказов f настолько мало по сравнению с объемом выборки N, что можно пренебречь незначительной погрешностью из-за уменьшения выборки после каждого отказа. Совершенно излишне пытаться сохранить постоянный объем выборки заменой отказавших элементов. Это может привести к гораздо более серьезным ошибкам вследствие неодинаковой наработки элементов выборки и того, что новые элементы могут иметь другие характеристики надежности.)

По формуле (5.19) определяется точечная оценка максимального правдоподобия с коэффициентом доверия примерно 60%. Если этой гарантии достаточно, испытания можно спланировать следующим образом.

Таблица 5.6

Значения интенсивности отказов $\lambda_p \cdot 10^5$, *час*$^{-1}$ (коэффициент доверия 60%)

l / Nt, 10^3 *час*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
20	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
30	3,33	6,66	10	13,3	16,6	20	23,3	26,6	30	33,3	36,6	40	43,3	46,6	50
50	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
100	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
200	0,5	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5
300	0,33	0,66	1,0	1,33	1,66	2,0	2,33	2,66	3,0	3,33	3,66	4,0	4,33	4,66	5,0
500	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
1 000	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
2 000	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
3 000	0,033	0,06	0,10	0,13	0,16	0,20	0,23	0,26	0,30	0,33	0,36	0,40	0,43	0,46	0,5
5 000	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
10 000	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
20 000	0,005	0,01	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075
30 000	0,003	0,006	0,010	0,013	0,016	0,020	0,023	0,026	0,030	0,033	0,036	0,040	0,043	0,046	0,050
50 000	0,002	0,004	0,006	0,008	0,010	0,012	0,014	0,016	0,018	0,020	0,022	0,024	0,026	0,028	0,030
100 000	0,01	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015

Предположим, что требуется с коэффициентом доверия 60% определить интенсивность внезапных отказов на основании испытаний 1000 элементов. Какой должна быть длительность испытаний, если интенсивность отказов не меньше 0,1%/1000*час* = $= 10^{-6}$ *час*$^{-1}$. Из формулы (5.19) следует, что:

при $f = 1$

$$t = \frac{f}{N\lambda \cdot 10^5} = \frac{1}{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 10^5} = 1000 \text{ час},$$

при $f = 2$

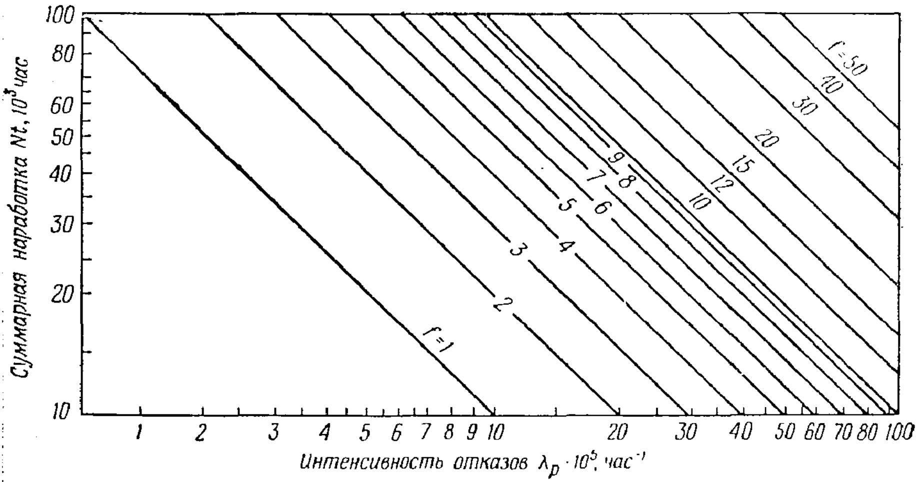
$$t = \frac{2}{0{,}001} = 2000 \text{ час},$$

при $f = 3$

$$t = \frac{3}{0{,}001} = 3000 \text{ час}$$

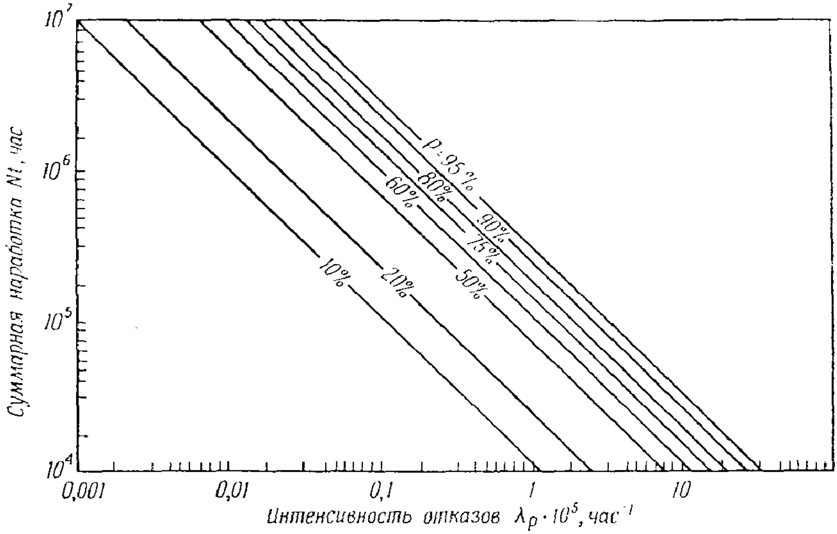
и т. д.

Произведение Nt в формуле (5.19) играет важную роль, и для быстрого построения нужного плана испытаний при различных значениях объема выборки и числа отказов автором составлена табл. 5.6. Эта таблица иллюстрируется семейством

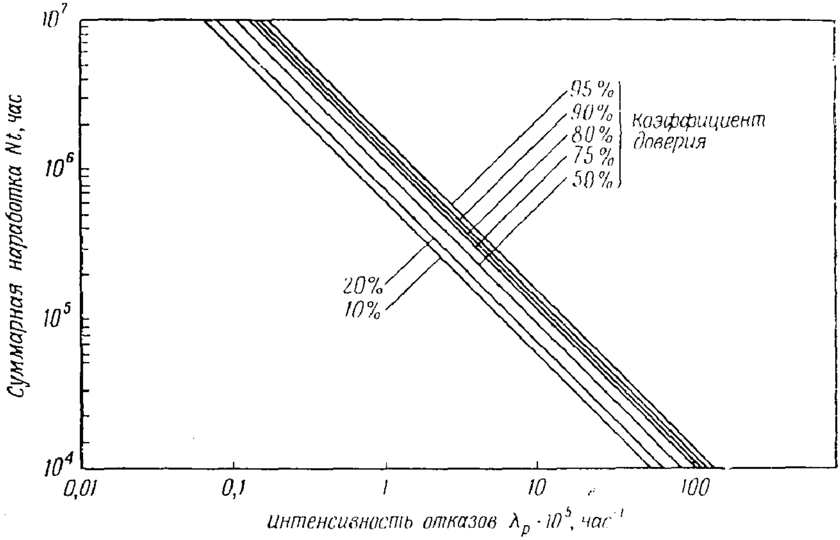


Фиг. 5.4. Графики зависимости NT от λ_p при различных значениях f (коэффициент доверия 60%).

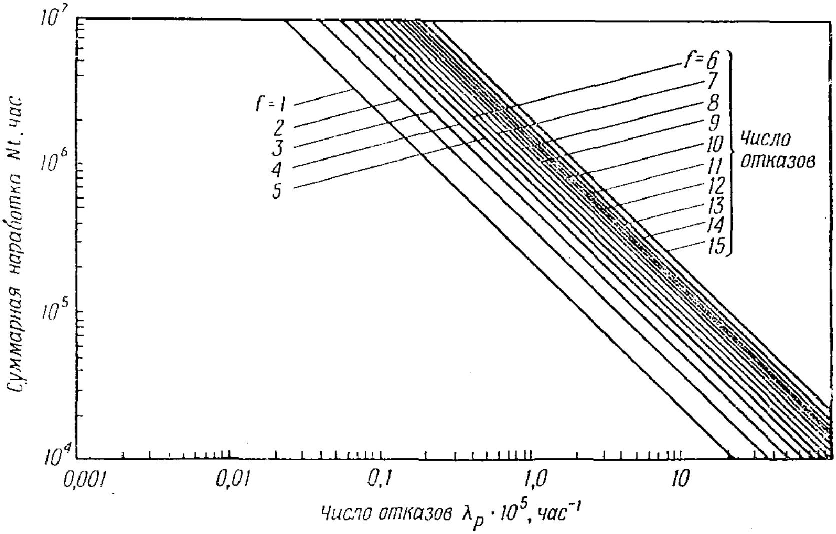
прямых на фиг. 5.4. С помощью этих графиков можно для различных значений f и Nt найти любое промежуточное λ_p с коэффициентом доверия 60%. Из табл. 5.6 и фиг. 5.4 видно, что в случае интенсивности отказов $\lambda = 10^{-8}$ *час*$^{-1}$ требуется значение Nt, равное 10^8 *час*. Другими словами, при испытаниях в течение 5000 *час* необходимо использовать 20 000 элементов, допуская при этом всего один отказ за все время испытаний. Задача



Фиг. 5.5. Графики зависимости Nt от λ_p при различных значениях P (испытания до одного отказа).



Фиг. 5.6. График зависимости Nt от λ_p при различных значениях P (испытания до 10 отказов).



Фиг. 5.7. Зависимость Nt от λ_p для различных f (коэффициент доверия 90%).

несколько облегчается, если допустить снижение 60%-ного коэффициента доверия к гарантии интенсивности отказов на уровне $\lambda = 10^{-8}$ *час*$^{-1}$.

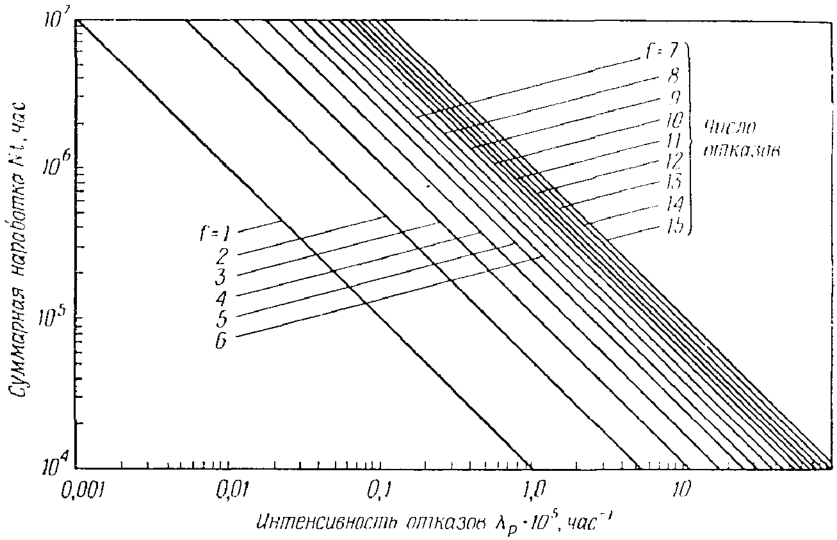
Используя обратные величины средней наработки на отказ, найденной с помощью коэффициента w в табл. 5.3 или непосредственно из таблицы χ^2 по формуле одностороннего доверительного интервала (5.10), можно проиллюстрировать влияние доверительного уровня на размер выборки. Из фиг. 5.5 видно, что для испытаний до первого отказа при $Nt = 100\,000$ *час*.

$$\lambda_p = 3 \cdot 10^{-5} \quad \text{при} \quad P = 95\%,$$
$$\lambda_p = 1 \cdot 10^{-5} \quad \text{при} \quad P = 60\%,$$
$$\lambda_p = 0{,}1 \cdot 10^{-5} \quad \text{при} \quad P = 10\%.$$

На фиг. 5.6 показано, как сближаются прямые, если испытания продолжаются до 10 отказов.

Фиг. 5.7 отражает зависимость $Nt(\lambda)$ с коэффициентом доверия 90% при числе отказов от 1 до 15. На фиг. 5.8 показана аналогичная зависимость, но с коэффициентом доверия всего лишь 10%.

Как видно из приведенных графиков, нельзя за малое время с удовлетворительной точностью определить интенсивность отказов высоконадежных элементов, необходимых для современных сложных систем. Одним из часто используемых методов



Фиг. 5.8. Зависимость Nt от λ_p для различных f (коэффициент доверия 10%).

являются ускоренные испытания партий умеренного объема выборок, проводимые с целью доказательства отсутствия снижения надежности модернизированных элементов, показавших ранее высокую надежность. Другим методом является определение интенсивности отказов путем суммирования данных испытаний, проведенных за некоторый промежуток времени на многих партиях [1]). Еще одним методом является использование в качестве показателя доверия 10%-ного риска поставщика. Это равносильно тому, что поставщик элементов имеет определенную уверенность относительно того, что во время испытаний откажет всего лишь 10% изготовленных им элементов. Такой показатель хорош для поставщика элементов, но является слабой защитой для изготовителя аппаратуры и заказчика, эксплуатирующего аппаратуру.

В табл. 5.7 приведена классификация интенсивности отказов, взятая из технических условий MIL-R-38100 A, в которой указаны объемы выборочных партий элементов, соответствующих различным уровням интенсивности отказов; объем выборки соответствует длительности испытаний 1000 *час* с приемочным числом 1, т. е. в случае двух отказов за это время партия бракуется с коэффициентом доверия 60%.

---

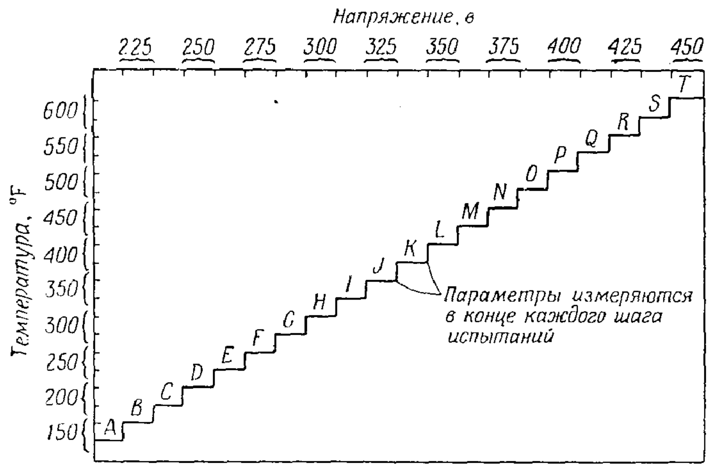
[1]) Метод оценки показателя надежности при таких испытаниях рассмотрен в [5*] — *Прим. ред.*

Таблица 5.7

Объем суммарной выборки для испытаний ряда партий

Шифр уровня интенсивности отказов	Интенсивность отказов λ_p, %/1000 *час*	Объем выборки	Шифр уровня интенсивности отказов	Интенсивность отказов λ_p, %/1000 *час*	Объем выборки
M	1,0	110	*S*	0,001	750
P	0,1	150	*T*	0,0001	1500
R	0,01	300			

Как видно из табл. 5.7, 1500 элементов, испытываемых в течение 1000 *час*, имеют интенсивность отказов на уровне *T*, если будет зафиксирован всего один отказ. Недостаток такого подхода становится ясным, если получить на основании этих же



Фиг. 5.9. Типичная программа испытаний с переменной нагрузкой.

данных оценку максимального правдоподобия для интенсивности отказов элементов. Суммарное $Nt = 1{,}5 \cdot 10^6$ *час*, т. е. для одного отказа и коэффициента доверия 60% имеем $\lambda_P = 0{,}066 \cdot 10^{-5}$ *час*$^{-1}$. Если предположить, что второй отказ может произойти сразу после окончания испытаний, то элементы должны были бы иметь $\lambda_P = 0{,}13 \cdot 10^{-5}$ *час*$^{-1}$ с коэффициентом доверия 60%, а не $\lambda = 10^{-9}$ *час*$^{-1}$, как предполагается в технических условиях MIL-R-38100A.

5.4.5. Ускоренные приемочные испытания. *А. Факторы, ускоряющие испытания.* Для ускорения испытаний обычно используется предельно допустимая нагрузка[1]). Интенсивность отказов в облегченных реальных условиях эксплуатации рассчитывается с помощью коэффициента ускорения. Этот коэффициент для бумажных конденсаторов представляет собой пятую степень отношения напряжений. Для большинства других элементов он близок к третьей степени отношений определяющих параметров, поэтому третья степень отношения часто используется как стандартный коэффициент ускорения. Предположим, например, что интенсивность отказов при предельном напряжении равна 10^{-5} *час*$^{-1}$. Если же рабочее напряжение будет в 5 раз меньше напряжения, используемого в ускоренных испытаниях, то интенсивность отказов составит всего лишь $8 \cdot 10^{-8}$ *час*$^{-1}$. Это рассчитывается по формуле

$$\text{Рабочая интенсивность отказов } d = \frac{\text{Предельная интенсивность отказов}}{\left(\dfrac{\text{Предельное напряжение}}{\text{Рабочее напряжение}}\right)^3}, \qquad (5.20)$$

$$d = \frac{10^{-5}}{\left(\dfrac{V_R}{0{,}2V_R}\right)^3} = \frac{10^{-5}}{5^3} = 8 \cdot 10^{-8} \ \text{час}^{-1}.$$

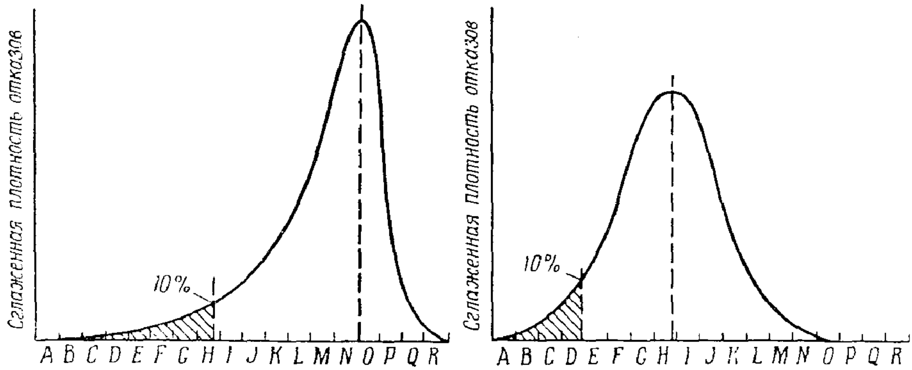
Б. Испытания с переменной нагрузкой. Другой важный вид ускоренных испытаний — испытания с переменной нагрузкой. Эти испытания дают возможность определить однородность и прочность продукции, но не всегда позволяют получить интенсивность отказов. Во время этих испытаний нагрузка периодически повышается в соответствии с заранее разработанным планом. При этом могут изменяться нагрузки нескольких видов, такие, например, как температура и напряжение. На каждом уровне нагрузки детали выдерживаются в течение заданного интервала времени, в конце которого определяется число отказавших элементов, а у неотказавших измеряются параметры. Нагрузка увеличивается до отказа всех испытываемых элементов.

Типичная последовательность изменения величины нагрузок показана на фиг. 5.9, а фиг. 5.10 иллюстрирует типичные плотности распределения отказов для этой последовательности. На основании данных, полученных при испытаниях, строится график зависимости плотности распределения отказов от нагрузки. Любые изменения или различия в материалах, технологии или конструкции быстро приводят к изменению этого графика и поэтому быстро выявляются.

[1]) См. также [6*]. — *Прим. ред.*

Испытания с переменной нагрузкой проходят довольно быстро и не требуют большого числа элементов. Наиболее подходящий объем выборки — 20—40 элементов. Многие важные решения принимаются на основе испытаний партий из 20 образцов. Выборки, превышающие 40 элементов, дают мало дополнительной информации.

Испытания начинаются в условиях окружающей среды и при номинальных электрических нагрузках, затем нагрузки посте-



Фиг. 5.10. Типичные графики испытаний с переменной нагрузкой.

Справа — выборка I (30 элементов): 1) 10% элементов отказали при малых нагрузках (раньше этапа *E*); вывод — малый запас прочности. 2) Большая дисперсия; некоторые элементы выдерживают большие нагрузки; вывод — плохая однородность продукции. 3) Максимум плотности (мода распределения) находится на этапе *H*.

Слева — выборка II (30 элементов): 1) Этап *H* достигнут до того, как отказало 10% выборки; вывод — высокий запас прочности. 2) Небольшая дисперсия; вывод — однородность продукции выше. 3) Максимум распределения (мода) находится на этапе *O*.

пенно повышаются до нагрузок, близких к предельным, и испытания продолжаются до отказа всех элементов. Результаты испытаний статистически обрабатываются и строится график плотности распределения отказов.

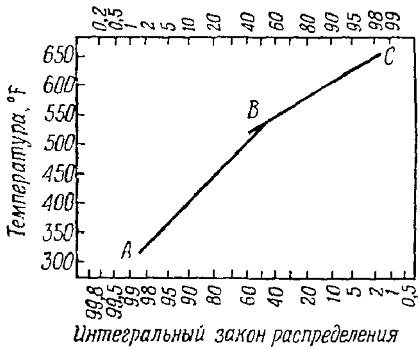
Два графика на фиг. 5.10 дают представление о прочности и однородности элементов партий I и II. С помощью таких графиков можно сравнивать партии однотипных элементов, поступающих от различных изготовителей или от одного изготовителя. Кроме того, эти графики показывают, в какой мере испытания могут считаться неразрушающими. До начала испытаний на надежность проводят дополнительные испытания с переменной нагрузкой на небольшой выборочной партии, а после окончания — на второй. Об износе элементов за время испытаний на надежность судят по уменьшению нагрузки, соответствующей максимуму плотности. Такие испытания называют иногда дельта-испытаниями с переменной нагрузкой.

На основе анализа результатов испытаний с переменной нагрузкой можно установить ряд закономерностей и причин появления отказов, а также уровни нагрузок, на которых эти закономерности проявляются. Эта информация полезна при анализе вида плотности распределения отказов в зависимости от величины нагрузки, а также при разработке ускоренных испытаний на надежность. Чтобы ускоренные испытания давали верное представление об истинной величине интенсивности отказов, нагрузки не должны приводить в действие те механизмы отказов, которые отсутствуют при режимах нормальной эксплуатации. В противном случае будет нарушаться корреляция между значениями интенсивности отказов при ускоренных испытаниях и в условиях нормальной эксплуатации.

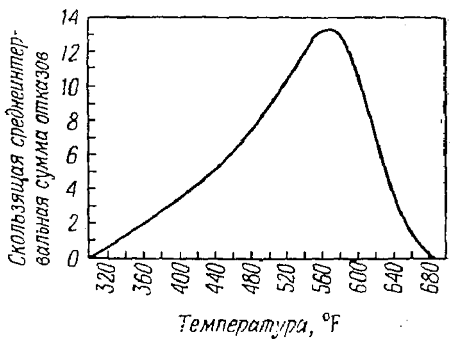
Следует заметить, что вид зависимости плотности распределения отказов от нагрузки имеет большое значение; нагрузки, используемые для получения подобной зависимости, должны достигать таких величин, чтобы можно было обнаружить не одну, а несколько причин отказов. Поэтому, как указывалось выше, по результатам испытаний с переменной нагрузкой нельзя рассчитывать интенсивность отказов. В то же время по этим результатам можно определить прочность и характеристики материалов, а также стабильность технологического процесса. Любое изменение в материалах или технологии приводит к изменению формы зависимости плотности распределения отказов от нагрузки и сразу же обнаруживается. Хотя такие изменения могут и не повлиять на надежность, однако в этих случаях следует провести дополнительный анализ данных, полученных при обычных испытаниях. Изменение зависимости плотности отказов от нагрузки указывает на необходимость выбора новых условий испытаний на надежность.

В. Определение причин отказов. Как только нагрузка поднимается до уровня, вызывающего определенные химические или физические изменения в материале, появляется некоторая причина отказов. Например, если температура достигает значения, при котором начинается химическое разложение диэлектрика, интенсивность отказов резко возрастает из-за изменения свойств материала. Это приводит к хорошо заметному изменению наклона построенного на вероятностной бумаге графика интегральной функции распределения температуры. Когда график этой функции представляется прямой линией, предполагается, что имеет место какая-либо одна причина отказов и что интенсивность отказов находится в определенной функциональной зависимости от величины приложенной нагрузки. Моменту излома линии соответствует появление новой причины отказов.

Испытания с целью выявления причин отказов часто проводятся отдельно для каждого из определяющих видов нагрузок. Типичный пример показан на фиг. 5.11. Прямая линия *AB* свидетельствует о наличии одной причины отказов. Излом прямой в точке *B* говорит о появлении новой причины — такой, например, как обугливание изолятора или пробой диэлектрика из-за ионизации. Высокое напряжение при испытаниях часто вызывает отказы из-за появления коронного разряда. До некоторой



Фиг. 5.11. Определение причин отказов.



Фиг. 5.12. Испытания с переменной температурой.

критической величины напряжения никакой короны не возникает. Но при достижении этой величины начинаются резкие разрушения и наклон прямой меняется. Из рассмотрения фиг. 5.11 можно сделать важный вывод, что для получения достоверной информации об интенсивности отказов нельзя поднимать температуру выше 530° F.

Те же данные можно представить и в линейном масштабе, как показано на фиг. 5.12. В табл. 5.8 приведены все исходные данные. В столбце (1) записаны значения температуры на каждом этапе испытаний, в столбце (2) — число полученных на соответствующих этапах отказов. На основе данных этой таблицы плотность вероятности можно получить по-разному. В данном случае использовался метод скользящего суммирования для интервала в 65°; полученные скользящие суммы числа отказов записаны в столбце (3). Так как целью построения графика является выявление вида зависимости, а не абсолютного значения величин, нет необходимости в получении среднеинтервального значения числа отказов. Однако, чтобы можно было сравнивать различные кривые, необходимо использовать одинаковый способ сглаживания исходных данных. В столбце (4) приве-

Таблица 5.8

Температура, °F	Число отказов f	Скользящая сумма числа отказов в интервале 65°	Средне-интервальное число отказов	Число отказов нарастающим итогом Σf	Средне-интервальное число отказов нарастающим итогом	Процент отказов относительно объема выборки (30 элементов)	Средне-интервальная температура, °F
(1)	(2)	(3)	(4) [1]	(5)	(6)	(7) [2]	(8)
320	0	. . . .	0,5	0			
		1	. . . .	. . . .	0,5	1,66	330
340	1	. . . .	1,5	1			
		2	. . . .	. . . .	1,0	3,3	350
360	0	. . . .	2,5	1			
		3	. . . .	. . . .	1,5	5	370
380	1	. . . .	3	2			
		3	. . . .	. . . .	2,5	8,3	390
400	1	. . . .	3,5	3			
		4	. . . .	. . . .	3,5	11,6	410
420	1	. . . .	4,5	4			
		5	. . . .	. . . .	4,5	15	430
440	1	. . . .	5,5	5			
		6	. . . .	. . . .	6	20	450
460	2	. . . .	6,5	7			
		7	. . . .	. . . .	8	26,6	470
480	2	. . . .	7,5	9			
		8	. . . .	. . . .	10	33,3	490
500	2	. . . .	8,5	11			
		9	. . . .	. . . .	12	40	510
520	2	. . . .	9,5	13			
		11	. . . .	. . . .	14,5	48	530
540	3	. . . .	12	16			
		13	. . . .	. . . .	18	60	550
560	4	. . . .	13,5	20			
		14	. . . .	. . . .	22	73,3	570
580	4	. . . .	13	24			
		12	. . . .	. . . .	25,5	85	590
600	3	. . . .	10,5	27			
		9	. . . .	. . . .	27,5	91,5	610
620	1	. . . .	7	28			
		5	. . . .	. . . .	28,5	95	630
640	1	. . . .	3,5	29			
		2	. . . .	. . . .	29,5	98	650
660	0	. . . .	1,0				

[1]) График на фиг. 5.8.
[2]) График на фиг. 5.11.

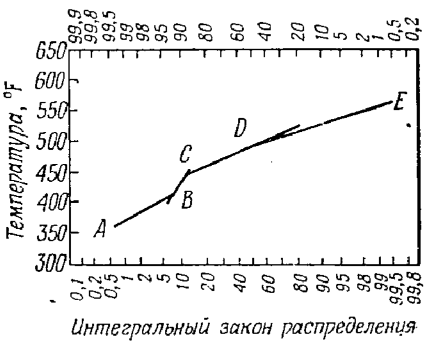
Таблица 5.9

Температура, °F	Число отказов f	Скользящая сумма числа отказов в интервале 45°	Среднеинтервальное число отказов	Число отказов нарастающим итогом Σf	Среднеинтервальное число отказов нарастающим итогом	Процент отказов относительно объема выборки (40 элементов)	Среднеинтервальная температура, °F
(1)	(2)	(3)	(4) [1]	(5)	(6)	(7) [2]	(8)
320	0	0	. . . .	0			
			0	. . . .	0	0	333
340	0	0	. . . .	0			
			0,5	. . . .	0	0	350
360	0	1	. . . .	0			
			1,5	. . . .	0,5	1,25	370
380	1	2	. . . .	1			
			3	. . . .	1,5	3,75	390
400	1	4	. . . .	2			
			3,5	. . . .	3	7,5	410
420	2	3	. . . .	4			
			5	. . . .	4	10	430
440	0	7	. . . .	4			
			9,5	. . . .	6,5	16,2	450
460	5	12	. . . .	9			
			22,5	. . . .	12,5	31,2	470
480	7	33	. . . .	16			
			29,5	. . . .	31,5	53,8	490
500	11	26	. . . .	27			
			24,5	. . . .	31	77,4	510
520	8	23	. . . .	35			
			18	. . . .	37	92,5	530
540	4	13	. . . .	39			
			9	. . . .	39,5	98,8	550
560	1	5	. . . .	40			
			3	. . . .	40	100	570
580	0	1	. . . .	40			
			0,5	. . . .	40	100	
600	0	0	. . . .	40			
			0				
620	0	0	. . . .				
			0				
640	0	0	. . . .				
			0				
660	0	0	. . . .				

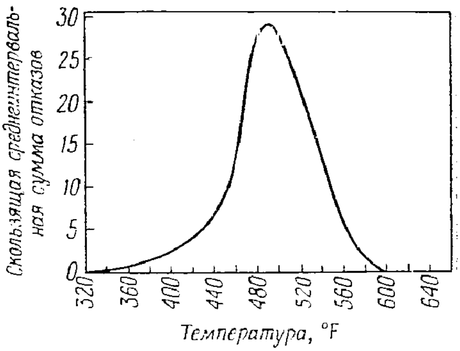
[1] График на фиг. 5.14.
[2] График на фиг. 5.13.

дены полученные из столбца (3) средненнтервальные числа отказов. По данным столбцов (1) и (4) построен график на фиг. 5.12.

График на фиг. 5.11 построен на основе последних четырех столбцов табл. 5.8. В столбце (5) записаны числа отказов нарастающим итогом, полученные на основе данных столбца (2). В столбце (6) приведены среднеинтервальные числа отказов. В столбце (7) эти же данные представлены в виде процентного



Фиг. 5.13. Несколько причин отказов.



Фиг. 5.14. Плотность вероятности температуры.

отношения к общему числу элементов (30) в выборке. В столбце (8) записаны среднеинтервальные по отношению к данным столбца (1) (значения температуры).

В большинстве случаев угловой коэффициент при появлении новой причины отказов увеличивается (фиг. 5.11). Однако это не всегда так. Бывают случаи, когда изменение угла наклона сопровождается уменьшением интенсивности отказов. В табл. 5.9 и на фиг. 5.13 и 5.14 приведены данные, иллюстрирующие этот факт.

На фиг. 5.13 прямые AB и CD соответствуют одной и той же причине отказов (отверждение эпоксидного связующего). В точке D начинает действовать новая причина отказов — обугливание. Когда эти причины отказов были сообщены изготовителям элементов, то в качестве первого шага на пути улучшения продукции было решено увеличить температуру отверждения. В результате исчез участок между точками B и C на фиг. 5.13. В дальнейшем был изменен химический состав смеси, что повысило начальную температуру, соответствующую появлению второй причины отказов, на 250° С. В результате повысились стабильность и надежность продукции.

5.4.6. Испытания на уход параметров. *А. Общие замечания.* В большинстве описанных выше планов испытаний на надежность принимались во внимание только внезапные отказы. Такие испытания хорошо подходят для прогноза надежности в случаях, когда запасы прочности достаточно велики, чтобы не происходило отказа изделия из-за ухода параметров его элементов. Испытания на уход параметров проводят для определения того, насколько допустимы изменения значений определяющих параметров во время эксплуатации.

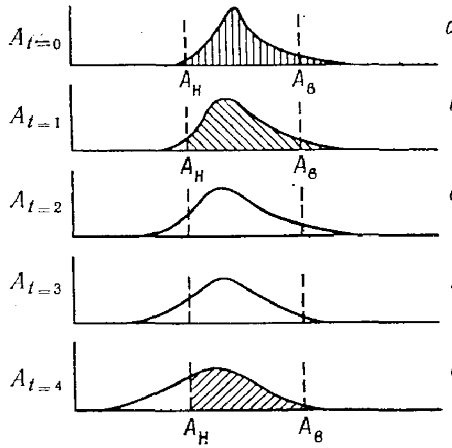
У большинства элементов имеется от одного до трех определяющих параметров, которые не должны выходить за пределы допуска. Обычно эти допуски устанавливаются с помощью матричных испытаний (путем анализа схемы на наихудшие сочетания параметров). Установленные предельные границы ухода параметров используются в свою очередь для разработки планов испытаний на уход параметров. Испытания элементов на уход параметров позволяют определить вероятность ухода параметров за допустимые пределы в течение заданного времени. Эти испытания дают возможность за относительно короткое время и без разрушения получить ожидаемую наработку элементов до отказа.

Б. Планирование испытаний на уход параметров. Испытания на уход параметров обычно продолжаются 1000—1500 *час* и проводятся на всех элементах каждой партии. Периодичность включения — выключения такая же, как и при нормальной работе. Электрическую нагрузку и температуру предпочтительнее устанавливать на уровнях, предельно допустимых для элементов. Испытания при средних уровнях нагрузки дают меньше информации; однако иногда такие менее жесткие условия более предпочтительны из-за опасности разрушения элементов. Испытания на уход параметров, между прочим, можно использовать и для определения диапазона предельно допустимых нагрузок.

Испытания на уход параметров заключаются в периодических замерах определяющих параметров с целью контроля стабильности или направления и скорости убывания параметров во времени. При замерах параметров строго учитывается, с каким образцом и моментом времени эти замеры связаны.

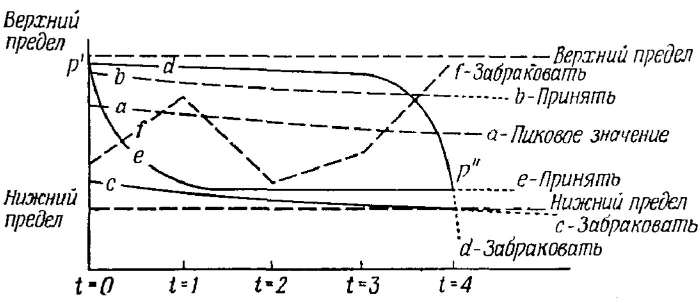
Точные значения параметров для каждого образца в начале и в конце испытаний не так важны, как графики последовательного изменения их во времени, получаемые на основе периодических замеров. Такие графики дают представление о внутренне присущей элементам стабильности и позволяют прогнозировать надежность путем экстраполяции.

Для примера рассмотрим кривые на фиг. 5.15—5.17. Фиг. 5.15, *а* иллюстрирует плотность распределения, которая может быть получена при испытаниях для параметра A некоторой партии элементов в момент времени $t = 0$. У всех элементов измерялся один основной параметр A; кривые распределения построены таким образом, чтобы можно было проследить изменения параметра во времени для всей совокупности элементов. График плотности распределения параметра на фиг. 5.15, *а* представляет собой несколько сжатую к центру кривую плотности нормального распределения. Максимум кривой находится почти в центре допустимого интервала, и только незначительный процент испытываемой партии попадает в «хвосты» распределения, выходящие за нижний и верхний пределы $A_н$ и $A_в$.



Фиг. 5.15. Испытания на уход параметра A.

Предположим теперь, что такие же измерения проведены сразу после окончания периода приработки. Обозначим этот момент через $t = 1$ и построим кривую плотности распределения параметра (фиг. 5.15, *б*). Кривая оказывается слегка сдвинутой в сторону нижнего допуска и размах распределения стал шире.

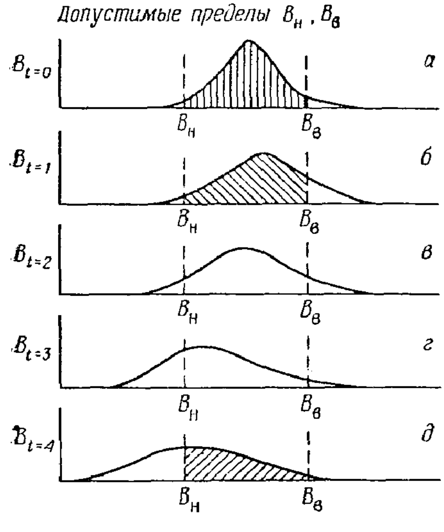


Фиг. 5.16. Кривые ухода параметра A.

Увеличение размаха распределения — типичное следствие старения (или износа), приводящего к выходу параметра за пределы допусков для все большей доли элементов. Аналогичный эффект сдвига влево и увеличения размаха распределения параметра показан для последовательности интервалов на фиг. 5.15, *в*, *г*. Как видно из фиг. 5.15, *д*, к моменту времени $t = 4$

пик кривой все еще находится внутри допустимого интервала, но параметр большей части элементов имеет значение, меньшее нижнего предела допуска. Из этого примера видно, что по максимуму и дисперсии плотности распределения параметра нельзя получить исчерпывающих данных о надежности каждого из элементов партии в отдельности.

Результаты периодических замеров определяющего параметра каждого элемента откладываются в виде точек на графике, и по этим точкам строятся кривые ухода параметров, или кривые старения, для каждого элемента в отдельности. Для выяснения значения этих кривых рассмотрим фиг. 5.16. Центральная штриховая линия *a* показывает движение пика плотности, соответствующее смещению его влево на фиг. 5.15 от замера к замеру. Долговечность элементов с такой кривой ухода параметра зависит от значения параметра в начальный момент $t = 0$. Выберем, например, две кривые ухода параметра *b* и *c*, одна из которых начинается вблизи верхнего предела допуска, а другая — возле нижнего. В результате к моменту $t = 4$ выясняется, что хотя обе кривые еще находятся внутри пределов допуска, элемент, соответствующий кривой *c*, следует браковать как потенциально ненадежный.



Фиг. 5.17. Испытания на уход параметра B.

Экстраполяция кривых ухода параметра, построенных по результатам периодических замеров, показывает, что элемент, соответствующий кривой *c*, откажет вскоре после момента $t = 4$. С другой стороны, элемент, соответствующий кривой *b*, может работать в течение времени, во много раз большего $t = 4$, прежде чем значение его параметра достигнет нижнего предела допуска. Это доказывает, что смещение максимума плотности распределения не является полной характеристикой процесса старения элемента.

Рассмотрим кривые ухода параметра *d* и *e*. Обе они начинаются (при $t = 0$) и кончаются (при $t = 4$) в одних и тех же точках P' и P'', т. е. за одинаковое время потеря ресурса, или старение, у них одинаково. Однако кривая d показывает, что параметр все время убывает очень медленно, но ко времени $t = 4$ начинает уменьшаться очень быстро. Будучи экстраполирована за $t = 4$, кривая быстро пересекает допустимый предел. С другой стороны, кривая e отражает быстрое убывание параметра вначале, а затем стабилизацию на уровне P''. После этого *ухода параметра почти не наблюдается. Это типичная характеристика* приработки хорошего элемента. Экстраполяция кривой e свидетельствует о большом запасе времени до отказа.

Кривая f характеризует типично нестабильный элемент, от которого трудно ожидать надежной работы. Даже если все время до момента $t = 4$ кривая ухода параметра находится в пределах допуска, элемент, соответствующий такой кривой, следует забраковать как потенциально ненадежный. Исходя из этого принципа, бракуются все элементы, параметры которых хотя бы раз выйдут за пределы допусков во время испытаний.

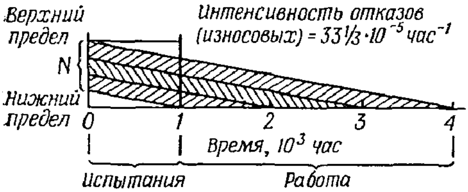
В. Определяющие параметры. Различные параметры элемента могут иметь неодинаковую стабильность. Например, последовательность графиков плотности распределения параметра B, приведенная на фиг. 5.17, может быть получена при тех же испытаниях и для тех же элементов, что и графики плотности распределения параметра A на фиг. 5.15. Максимум плотности распределения параметра B вначале смещается вправо, а затем начинает смещаться влево. Критерии приемки и браковки с помощью экстраполяции полученных при испытаниях кривых применяются к каждому из параметров элемента в отдельности. Если элемент имеет какой-то один определяющий параметр, можно проводить испытания на основе измерений этого параметра.

Если область и способ применения элемента заранее неизвестны, можно проводить испытания, основываясь на том, что для прогноза надежности большинства существующих типов элементов достаточно изучить не более двух определяющих параметров. Если оба эти параметра стабильны и не проявляют опасных тенденций старения, то элемент можно принять как надежный. Но если хотя бы по одному из определяющих параметров элемент бракуется, он не может считаться надежным.

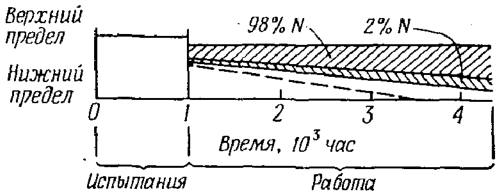
Г. Обработка результатов испытаний на уход параметров. Для обработки результатов испытаний на долговечность применяются несколько методов. При построении кривых и их линейной и нелинейной экстраполяции используются как машинные, так и ручные вычисления. Излагаемый ниже материал позволяет выяснить роль некоторых взаимосвязанных факторов.

Пусть все N предположительно одинаковых элементов, составляющих выборочную партию, изнашиваются с такой скоростью, что после проведения испытаний через каждые 1000 *час* работы отказывает одна треть партии. Эта довольно-таки нереальная ситуация иллюстрируется на фиг. 5.18. Из наклона прямых, полученных при испытании в течение 1000 *час* на уход параметров, путем экстраполяции до пересечения параметрами всех N элементов нижнего предела допуска получается ожидаемая интенсивность отказов равная $33\frac{1}{3}\cdot 10^{-5}$ *час*$^{-1}$.

Распределение износовых отказов на некотором отрезке времени никогда не может быть таким равномерным, как показано на фиг. 5.18. При обработке результатов испытаний на уход параметров нужно иметь в виду не только старение, или износ,



Фиг. 5.18. Экстраполированные характеристики износа (нереальный случай).



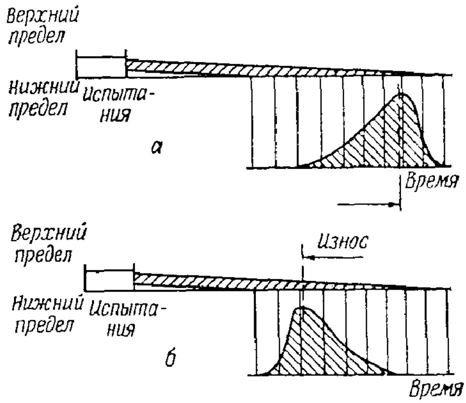
Фиг. 5.19. Вероятность безотказной работы в течение 1000 *час*.

элементов, но и предъявляемые к элементам эксплуатационные требования. Если, например, время работы должно быть равно 3000 *час*, то вероятность безотказной работы в течение этого времени для любого элемента из партии, характеризуемой графиком на фиг. 5.18, очень мала. Если же время работы невелико, то значительная доля элементов может проработать соответствующее время безотказно.

Более реальная ситуация иллюстрируется фиг. 5.19. Экстраполяция кривых ухода параметров, полученных при испытании в течение 1000 *час*, показывает, что 98% элементов проработают безотказно свыше 10 000 *час*, 2% элементов — более 5000 *час* и только один элемент, возможно, откажет между 3000 и 4000 *час*. Если требуемое время работы этих элементов равно 1000 *час*, то вероятность износового отказа за это время будет незначительной. Эту ситуацию можно интерпретировать следующим образом: при данном значении нижнего предела допуска большой запас прочности элементов позволяет пренебречь износовыми отказами. В этом случае надежность рассчитывается с учетом только внезапных отказов.

Большое значение испытаний на уход параметров состоит в том, что по их результатам можно производить, во-первых, отсев всех ненадежных элементов и, во-вторых, последовательное во времени сравнение предположительно одинаковых партий с помощью графиков плотностей распределения параметров. То небольшое число элементов, ожидаемый ресурс которых недопустимо мал, изымается, а по результатам экстраполяции полученных при испытаниях характеристик долговечности для оставшихся элементов строятся графики плотности распределения их ожидаемых ресурсов. (Ожидаемые значения ресурсов элементов соответствующим образом группируются, и путем сглаживания получается кривая плотности.)

Любое изменение в условиях испытаний или в прочности элементов отражается на форме кривой распределения ресурсов, как показано, например, на фиг. 5.20. Кривыми на фиг. 5.20, *а* и 5.20, *б* представлены две различные партии с одного завода. Полученное различие в ходе этих кривых должно явиться предметом немедленного исследования вызвавших его причин. Могли измениться материалы, технология или конструкция, что в свою очередь приводит к изменению закономерностей отказов. Даже в случае небольших изменений в распределении ресурсов необходим тщательный анализ опасных последствий этих изменений.



Фиг. 5.20. Плотность распределения ресурса элемента.

До сих пор речь шла только о нижнем пределе допуска. Очевидно, некоторые параметры, такие, как обратный ток диода, могут по мере старения диода увеличиваться. В таких случаях достаточно учитывать только верхний предел. Бывают случаи, когда изменения вниз и вверх одинаково возможны, тогда необходимо анализ проводить с учетом как нижнего, так и верхнего допустимых пределов.

Д. Анализ данных. Кривые, полученные во время испытаний на уход параметров, чаще всего экстраполируются линейно вплоть до пересечения с одним из допустимых уровней. Если полученная при испытаниях зависимость изменения параметра от времени линейна, то ожидаемый ресурс находится с помощью формул:

$$t_{x_н} = \frac{(Y' - L)\,t}{Y' - Y''}, \tag{5.21}$$

$$t_{x_в} = \frac{(U - Y')\,t}{Y'' - Y'}, \tag{5.22}$$

где $t_{x_н}$ — значение ресурса, когда определяющий параметр достигает нижнего предела;
$t_{x_в}$ — значение ресурса, когда определяющий параметр достигает верхнего предела;
t — наработка за время испытаний, *час*;
L — значение нижнего предела;
U — значение верхнего предела;
Y' — значение параметра в начале испытаний;
Y'' — значение параметра в конце испытаний.

Графически эти два случая иллюстрируются на фиг. 5.21.

Если полученная при испытаниях кривая ухода параметра нелинейна, то отдельно анализируются два отрезка этой кривой. В качестве первого берется отрезок, соответствующий наработке за первые 200 *час* испытаний, а в качестве второго — отрезок, соответствующий наработке за другую половину или $^2/_3$ времени испытаний. Предположим, что кривая износа имеет вид, как показано на фиг. 5.22. Измерения произведены при $t = 0$, 200, 300 и 1000 *час*. В этом случае приработочный уход параметра не должен учитываться. Если элементы прирабатываются в пределах 200 *час*, испытания на уход параметров следует начинать уже после 250 *час* работы под нагрузкой. Наклон прямой, определяющий ресурс в этом случае, задается отношением t''_x к t'_x, а среднее значение ресурса оценивается выражением

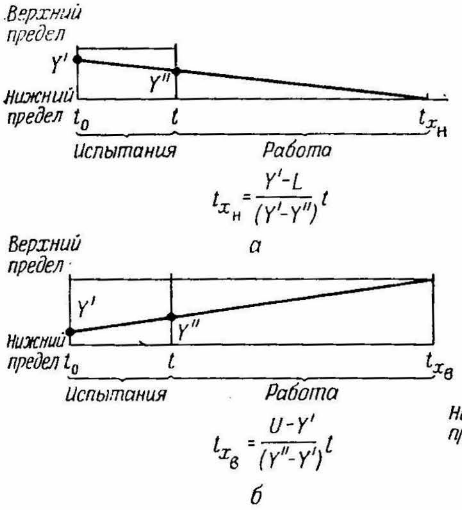
$$\text{Ресурс } L_x = \frac{(t''_x)^2}{t'_x}. \tag{5.23}$$

Эта формула основана на предположении, что кривая ухода параметра, пересекающая нижний предел, вогнута, а кривая, пересекающая верхний предел, выпукла. Если на втором участке кривая линейна, то считается, что испытания на уход параметра проводились только на этом участке.

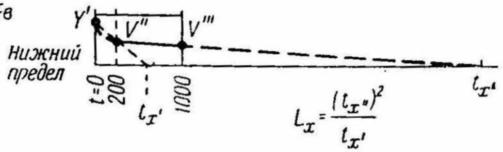
Расчеты $t_{x_н}$ и $t_{x_в}$ по формулам (5.21) и (5.22) можно запрограммировать и значение ресурса L_x определить с помощью вычислительной машины, что особенно удобно при испытаниях больших партий. Однако не всегда это возможно и, когда приходится считать вручную, удобнее использовать отношения Y''/Y' и Y'/L или Y'/U.

Из формулы (5.21) для $t_{x_н}$ при $a = \frac{Y''}{Y'}$, $b = \frac{Y'}{L}$ имеем

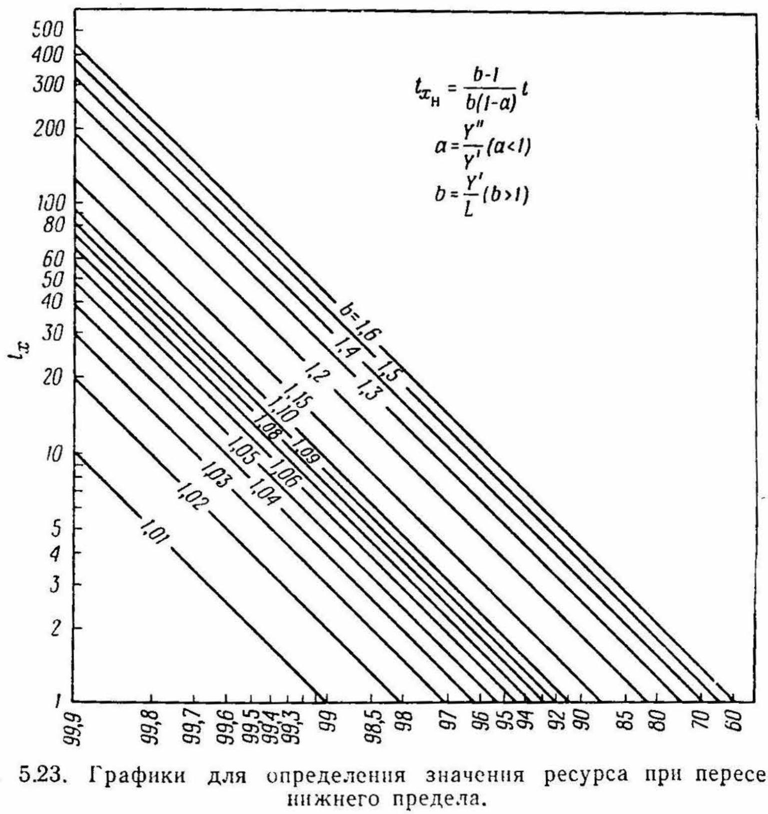
$$t_{x_н} = \frac{b-1}{b(1-a)}\, t. \tag{5.24}$$



Фиг. 5.21. *а* — анализ при пересечении нижнего предела; *б* — анализ при пересечении верхнего предела.



Фиг. 5.22. Нелинейная экстраполяция (двухступенчатый анализ).

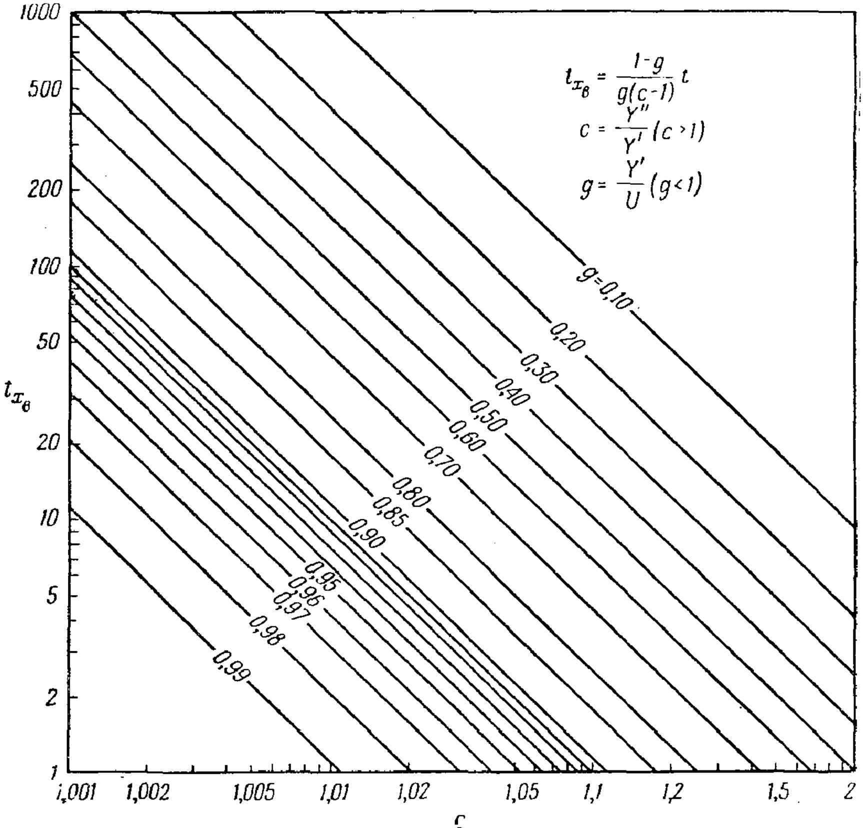


Фиг. 5.23. Графики для определения значения ресурса при пересечении нижнего предела.

Аналогично при $c = \frac{Y''}{Y'}$, $g = \frac{Y'}{U}$ получаем

$$t_{x_в} = \frac{1-g}{g(c-1)} t. \tag{5.25}$$

На фиг. 5.23 и 5.24 приведены графики двух семейств кривых. По этим графикам значение t_x определяется с помощью соответствующих значений a, b, c, g.



Фиг. 5.24. Графики для определения значения ресурса при пересечении верхнего предела.

5.5. ПРИЕМОЧНЫЕ ИСПЫТАНИЯ АППАРАТУРЫ

5.5.1. Общие замечания. Обычно в качестве показателя надежности используется среднее время между отказами m. Для его обозначения иногда применяются и другие символы, например θ, ϕ или ψ. Приемочные испытания аппаратуры на надежность заключаются в контроле с заданным коэффициентом доверия соответствия среднего времени между отказами требуемому значению, причем аппаратура испытывается в таких же условиях, как и при реальной эксплуатации. Когда условия испытаний максимально приближены к реальным, основное внимание должно быть уделено оценке ожидаемой во время эксплуатации надежности по результатам не очень длительных испытаний и определению доверительного уровня полученной оценки (см. т. II, гл. 4, и т. III, гл. 1).

Если проведена необходимая приработка аппаратуры и должным образом осуществляются профилактическое обслуживание и замены, то практически исключаются как приработочные, так и износовые отказы и остаются только внезапные отказы. Основная задача в этом случае состоит в оценке за малое время испытаний интенсивности внезапных отказов и определении вероятности того, что в период нормальной эксплуатации интенсивность отказов будет соответствовать оценке, полученной при испытаниях. Другими словами, необходимо получить сведения о значении среднего времени между отказами в результате испытаний и об уровне доверия, с которым можно утверждать, что это же значение времени будет получено усреднением по всему сроку службы аппаратуры.

Прежде всего следует уточнить, почему показателем надежности аппаратуры служит среднее время между отказами, а не коэффициент доверия. Коэффициент доверия связан лишь с оценкой результатов испытаний. Нельзя потребовать, чтобы аппаратура имела заранее заданное среднее время между отказами с заданным коэффициентом доверия. Можно потребовать, чтобы испытания гарантировали определенное минимальное среднее время между отказами с заданным коэффициентом доверия.

Вопрос обычно ставится так: «Как долго должны длиться испытания, чтобы с коэффициентом доверия 90% среднее время между отказами превышало x часов?». На этот вопрос нельзя ответить без дополнительной информации. Например, если действительное среднее время между отказами меньше x часов, то, как бы долго ни продолжались испытания, нельзя доказать, что оно больше, чем на самом деле. Если истинное значение чуть больше x, то требуемая длительность испытаний будет значительно больше, чем в случае, когда оно намного превышает значение x.

По результатам испытаний рассчитывается оценка максимального правдоподобия для среднего времени между отказами, а объем полученных при испытаниях статистических данных определяет уровень доверия к этим расчетам. После испытаний можно утверждать, например, следующее: «Наилучшая оценка среднего времени между отказами составляет 13 *час*, и на основании полученных данных можно быть уверенным, например, на 90%, что верхняя граница истинной величины равна *A час*, и на 90%, что ее нижняя граница составляет *C час*». В этом примере определяется 80%-ный двусторонний интервал между пределами *A* и *C*. Другими словами, коэффициент доверия для утверждения, что истинное значение находится между случайными пределами *A* и *C*, равен 80%.

Обычно для приемочных испытаний наиболее полезным оказывается односторонний доверительный интервал, определяемый вероятностью, с которой значение среднего времени между отказами больше некоторого минимума. Оба эти подхода иллюстрируются приводимыми ниже примерами.

5.5.2. Испытания с определением доверительного интервала. Предположим, что за время испытаний при суммарной наработке 600 *час* произошло 3 отказа. Наилучшая оценка среднего времени между отказами равна 600/3 = 200 *час*. Интуиция подсказывает, что если еще раз провести испытания с наработкой 600 *час*, то вряд ли снова будет ровно 3 отказа. Другими словами, если даже действительное среднее время между отказами у испытываемой аппаратуры равно 200 *час*, то и тогда в каждом из серии 600-часовых испытаний будут случайным образом получаться различные результаты. Деление общей наработки за весь срок службы аппаратуры на суммарное число возникших отказов дает действительное значение среднего времени между отказами. В нашем примере это 200 *час*, однако случайно полученная во время коротких 600-часовых испытаний цифра 200 *час* еще не является доказательством.

Для определения верхнего и нижнего пределов двустороннего доверительного интервала обратимся к табл. 5.2, откуда находим, что при трех отказах и 90%-ном коэффициенте доверия $K_н = 0{,}476$ и $K_в = 3{,}68$. Если эти значения K умножить на величину наилучшей оценки 200 *час*, то получим, что нижний предел равен 95,2 *час*, а верхний — 736 *час*. Другими словами, можно сказать, что с доверием 90% истинное значение лежит между 95 и 736 *час*.

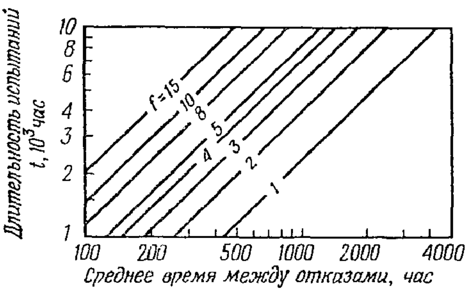
Для 60%-ного доверительного интервала из табл. 5.2 при трех отказах получаем $K_н = 0{,}698$, а $K_в = 1{,}95$, которые после умножения на 200 *час* дают границы 60%-ного доверительного интервала — 140 и 390 *час*.

Из приведенных примеров ясно, что, когда за время испытаний успевает произойти лишь несколько отказов, доверительный интервал получается широким. Лучше всего, чтобы число отказов было не меньше 10. Пусть, например, испытываются три образца аппаратуры по 1000 *час* каждый и при этом фиксируется 10 отказов. Общая суммарная наработка равна 3000 *час*, поэтому наилучшая оценка среднего времени между отказами составляет 3000/10 = 300 *час*. Из табл. 5.2 для $f = 10$ и коэффициента доверия 90% находим $K_н = 0{,}637$, а $K_в = 1{,}84$. Таким образом, с доверием 90% истинное значение среднего времени между отказами лежит между 191 и 552 *час*. Этот результат равносилен тому, что с коэффициентом доверия 95% нижним пределом средней наработки на отказ служит 191 *час*. Другими словами, истинное значение среднего времени между отказами с гарантией 95% больше 191 *час*.

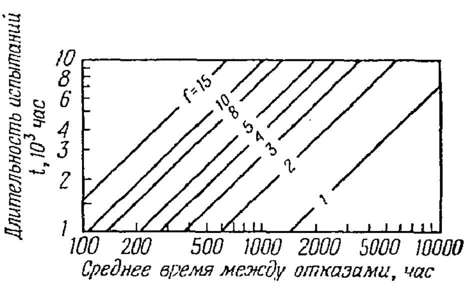
Это наводит на мысль о том, что, как правило, приемочные испытания следует планировать на основе одностороннего доверительного интервала для значений среднего времени между отказами. Для этого можно использовать половину табл. 5.2 со значениями $K_н$. Однако те же результаты можно проще получить с помощью табл. 5.3. Пусть, например, нужно с 95-ным уровнем доверия доказать, что среднее время между отказами больше 191 *час*. Какая потребуется суммарная наработка за время испытаний, если приемочное число отказов установить равным 10. Из табл. 5.3 для коэффициента доверия 95% и $f = 10$ значение ω равно 15,7. Если эту постоянную умножить на заданные 191 *час*, необходимая суммарная наработка снова получается равной 3000 *час*. Для этого можно испытывать один образец аппаратуры в течение 3000 *час* или любое количество образцов с суммарной наработкой 3000 *час* (например, 6 образцов по 500 *час* каждый с $f = 10$).

В этих примерах закон распределения времени между отказами предполагается экспоненциальным. Иногда это предположение встречает возражение из-за отсутствия уверенности в том, что распределение действительно является экспоненциальным. Если аппаратура успешно проходит испытания, спланированные с помощью табл. 5.3, то отличие закона распределения от экспоненциального не скажется существенно на результатах испытаний. В таких испытаниях аппаратура, у которой интенсивность отказов увеличивается со временем, бракуется быстрее. Другими словами, с точки зрения риска заказчика предположение экспоненциальности закона распределения во многих случаях безопаснее.

С точки зрения изготовителя имеет место обратное. Предположение об экспоненциальности закона распределения может привести к ошибочной браковке аппаратуры с меняющейся во времени интенсивностью отказов. Из этого положения у изготовителя есть два выхода. Во-первых, можно до приемочных испытаний предварительно испытать аппаратуру с тем, чтобы или убедиться в экспоненциальности закона распределения, или усовершенствовать аппаратуру до получения этого закона. Во-вторых, в предположении экспоненциального закона распределения можно заранее договориться об увеличении сроков испытаний, чтобы получить более узкий доверительный интервал. В последнем случае больше надежды на то, что небольшое число нетипичных отказов не приведет к браковке аппаратуры. Ни при каких обстоятельствах не следует планировать такие испытания, в которых браковка может быть произведена на основании одного или двух отказов. Наиболее предпочтительное приемочное число отказов лежит в пределах от шести до десяти.



Фиг. 5.25. Значения нижнего предела среднего времени между отказами с коэффициентом доверия 90%. (Риск заказчика равен 10%.)



Фиг. 5.26. Значения нижнего предела среднего времени между отказами с коэффициентом доверия 50%. (Риск заказчика равен 50%.)

5.5.3. Испытания, основанные на риске заказчика. Выше было показано, как пользоваться таблицами при анализе результатов обычных испытаний на надежность с определением доверительного интервала. На основе этих таблиц построены графики (особенно полезные для заказчика), с помощью которых по результатам испытаний легко определяется значение нижнего предела среднего времени между отказами с определенным уровнем доверия. Приведенные на фиг. 5.25 графики показывают зависимость между значениями 90%-ного нижнего предела среднего времени между отказами и длительностью испытаний для различных значений приемочного числа отказов. Графики на фиг. 5.26 отражают аналогичную зависимость для 50%-ного одностороннего доверительного интервала. Для большинства испытаний оказываются вполне достаточными эти два уровня доверия. В случае необходимости с помощью табл. 5.2 и 5.3 и фиг. 5.3 можно построить такие графики для любых уровней доверия.

5.5.4. Последовательные приемочные испытания. *А. Общие замечания.* Последовательные испытания отличаются от испытаний других видов тем, что их длительность не устанавливается заранее, а определяется самим ходом испытаний. Выборка испытывается в определенных условиях эксплуатации и окружающей среды до тех пор, пока не будут выполнены некоторые предварительно оговоренные ограничения, связанные с риском принятия неправильных решений. Другими словами, испытания продолжаются до получения достаточного относительно указанных ограничений количества статистических данных. Соотношение между длительностью испытаний и числом полученных за это время отказов представляется в виде специального графика или таблицы плана последовательных испытаний. Очень хорошие образцы принимаются быстро, очень плохие — быстро бракуются, а образцы промежуточного качества требуют более длительных испытаний.

Основное преимущество последовательных испытаний состоит в том, что в среднем при одинаковых рисках принятия неправильных решений они короче испытаний другого типа. Главный недостаток заключается в невозможности точного определения длительности испытаний вплоть до их окончания. Иногда может встретить возражение то обстоятельство, что для проведения последовательных испытаний и обработки их результатов требуется более высококвалифицированный персонал.

Во время последовательных испытаний определяется, превышает ли среднее время между отказами m аппаратуры, имеющей постоянную интенсивность отказов, требуемое значение $M_{\text{Т}}$. Так как целью испытаний обычно является определение интенсивности отказов до начала периода старения (износа) $T_{\text{и}}$, испытываемые образцы должны заменяться до наступления старения. Испытания продолжаются до того момента, когда по выборочным результатам можно будет принять решение о приемке или браковке. При этом возможны два рода ошибок.

Ошибка первого рода. Аппаратура принимается, когда $m < M_{\text{Т}}$. Вероятность этой ошибки зависит от того, насколько мало истинное значение m. Вероятность приемки очень плохой аппаратуры крайне мала. У совокупности с m, меньшим $M_{\text{Т}}$, вероятность быть принятой выше. Максимальная вероятность такой ошибки представляет собой риск заказчика (потребителя) β.

Ошибка второго рода. Аппаратура бракуется, когда $m \geqslant M_{\text{Т}}$. Максимальная вероятность такой ошибки представляет собой риск поставщика (изготовителя) α.

Оба риска не могут быть устранены, если решение должно быть принято в какие-то разумные сроки. Поскольку $M_{\text{Т}}$ — минимально допустимая величина среднего времени между отказами, ошибка первого рода считается наиболее серьезной, и ее обычно стараются сделать как можно менее вероятной. Ошибка,

Таблица 5.10

Критерии приемки или браковки для последовательных испытаний

Нормализованная длительность испытаний, *час*	Общее количество отказов для		
	браковки	приемки	продолжения испытаний
(1)	(2)	(3)	(4)
0,5	6	. . . .	0—5
1,3	7	. . . .	0—6
2,1	8	. . . .	0—7
2,9	9	. . . .	0—8
3,7	10	. . . .	0—9
4,4	. . . .	0	1—10
4,5	11	. . . .	1—10
5,2	. . . .	1	2—11
5,3	12	. . . .	2—11
6,0	. . . .	2	3—12
6,1	13	. . . .	3—12
6,8	. . . .	3	4—13
6,9	14	. . . .	4—13
7,6	. . . .	4	5—14
7,8	15	. . . .	5—14
8,5	. . . .	5	6—15
8,6	16	. . . .	6—15
9,3	. . . .	6	7—16
9,4	17	. . . .	7—16
10,1	. . . .	7	8—17
10,2	18	. . . .	8—17
10,9	. . . .	8	9—18
11,0	19	. . . .	9—18
11,7	. . . .	9	10—19
11,8	20	. . . .	10—19
12,5	. . . .	10	11—20
12,6	21	. . . .	11—20
13,3	. . . .	11	12—21
13,4	22	. . . .	12—21
14,1	. . . .	12	13—22
14,2	23	. . . .	13—23
14,9	. . . .	13	14—23
15,0	24	. . . .	14—23
15,7	. . . .	14	15—24
15,9	25	. . . .	15—24
16,6	. . . .	15	16—25
16,7	26	. . . .	16—25
17,4	. . . .	16	17—26
17,5	27	. . . .	17—26
18,2	. . . .	17	18—27
18,3	28	. . . .	18—27
19,0	. . . .	18	19—28
19,1	29	. . . .	19—28
19,8	. . . .	19	20—29
19,9	30	. . . .	20—29
20,6	. . . .	20	21—30
20,7	31	. . . .	21—30
21,4	. . . .	21	22—31
21,5	32	. . . .	22—31
22,2	. . . .	22	22—32
22,3	33	. . . .	23—32
23,0	. . . .	23	24—33
23,1	34	. . . .	24—33
23,8	. . . .	24	25—34
24,0	35	. . . .	25—34
24,7	. . . .	25	26—35
24,8	36	. . . .	26—35
25,5	. . . .	26	27—36
25,6	37	. . . .	27—36
26,3	. . . .	27	28—37
26,4	38	. . . .	28—37

Продолжение табл. 5.10

Нормализованная длительность испытаний, *час*	Общее количество отказов для			Нормализованная длительность испытаний, *час*	Общее количество отказов для		
	браковки	приемки	продолжения испытаний		браковки	приемки	продолжения испытаний
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
27,1	. . . .	28	29—38	29,5	. . . .	31	32—40
27,2	39	. . . .	29—38	30,3	. . . .	32	33—40
27,9	. . . .	29	30—39	31,1	. . . .	33	34—40
28,0	40	. . . .	30—39	31,9	. . . .	34	35—40
28,7	. . . .	30	31—40	32,8	. . . .	35	36—40
				33,0	41	40	

Примечания: 1. В столбце (1) записано суммарное время испытаний (в часах) всех образцов аппаратуры, деленное на заданное в ТУ значение среднего времени между отказами M_T (в часах).

2. Если общее количество отказов, полученных на всех образцах испытываемой аппаратуры за время испытаний: а) больше или равно числу в столбце (2), принимается решение о браковке; б) меньше или равно числу в столбце (3), принимается решение о приемке; в) попадает в промежуток, указанный в столбе (4), принимается решение о продолжении испытаний.

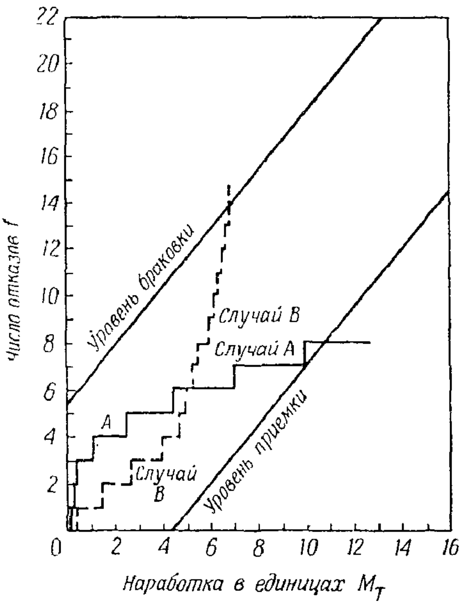
3. Испытываемая выборка образцов аппаратуры может не содержать всех образцов партии. Решение о приемке или браковке испытываемой группы распространяется на всю партию, из которой эта группа выбрана.

подобная ошибке второго рода, а именно браковка аппаратуры, у которой m больше некоторого верхнего предела приемки, может быть уменьшена путем выбора некоторого приемочного числа $M_П$, большего M_T. Чем больше значение $M_П$, тем дольше в среднем будет приниматься решение. Если отношение $M_П/M_T$ сделать слишком большим, теряется преимущество последовательных испытаний. AGREE рекомендует [1] отношение $M_П/M_T = 1{,}5$. Последовательные испытания, предложенные AGREE, применяются в промышленности чаще всего. Используемые в этих испытаниях риски поставщика и заказчика равны ($\alpha = \beta = 0{,}1$).

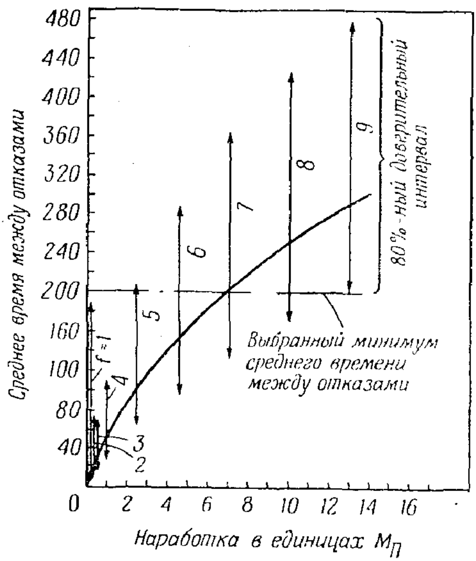
Б. Последовательные испытания, рекомендуемые AGREE. В табл. 5.10 приведены значения числа отказов, позволяющие принять решение о приемке или браковке для последовательных испытаний, рекомендуемых AGREE. В первом столбце даются значения нормализованной длительности испытаний, которая находится путем умножения количества испытываемых образцов аппаратуры N на длительность испытаний t и деления этого произведения на заданное значение M_T, т. е.

$$t_m = \frac{Nt}{M_T}. \tag{5.26}$$

Во втором и третьем столбцах приведены значения браковочного и приемочного числа отказов соответственно. В четвертом столбце указан интервал чисел для каждого значения нормализованной длительности испытаний [столбец (1)], при которых испытания должны продолжаться. На фиг. 5.27 приведены



Фиг. 5.27. Последовательные испытания.



Фиг. 5.28. Оценка доверительных интервалов для случая А.

графики для верхнего и нижнего приемочных уровней, построенные на основе данных этой таблицы с использованием формул для указанных выше условий ($M_П/M_T = 1{,}5$; $\alpha = \beta = 0{,}1$):

$$t_{nП} = 0{,}81F_П + 4{,}4 \text{ — уровень приемки,} \qquad (5.27)$$

$$t_{nБ} = 0{,}81F_Б - 4{,}4 \text{ — уровень браковки.} \qquad (5.28)$$

Последовательные испытания, как и любые другие, имеют смысл только в условиях, максимально приближенных к реальным. Эти условия включают такие факторы окружающей среды, как температура и вибрации, электрические и механические нагрузки, условия работы. К последним относятся период включения — выключения и профилактическое обслуживание. Были установлены четыре уровня условий окружающей среды. При согласовании последовательных испытаний обязательно должны оговариваться уровни нагрузок окружающей среды, которым подвергается аппаратура. Эти уровни будут описаны после примеров типичных последовательных испытаний, которые иллюстрируются табл. 5.10 и фиг. 5.27.

Предположим, что проводятся последовательные испытания аппаратуры с требуемым значением среднего времени между отказами 200 *час*.

Дано: требуемое значение $M_T = 200$ *час*, число испытываемых образцов $N = 2$.

Начало испытаний. Два образца установлены на испытательной станции и находятся в заранее согласованных условиях окружающей среды и работы. Работоспособность аппаратуры непрерывно контролируется, и каждый отказ быстро обнаруживается и устраняется. Наработка испытываемой аппаратуры фиксируется при каждом отказе. В табл. 5.11 приведены типичные данные последовательных испытаний.

Таблица 5.11

Результаты последовательных испытаний для случая ***А***

Число отказов f	Длительность испытаний t, *час*	Общая наработка Nt, *час*	Нормализованная длительность испытаний $t_n = \frac{Nt}{200}$	Принимаемое решение (из фиг. 5.19 и 5.20)
1	10	20	0,1	Продолжать
2	20	40	0,2	»
3	40	80	0,4	»
4	100	200	1,0	»
5	250	500	2,5	»
6	450	900	4,5	»
7	700	1400	7,0	»
8	1000	2000	10,0	»
9	1300	2600	13,0	Принять

Эти данные (t_n, f) на фиг. 5.27 изображены сплошной линией *А*. Для сравнения можно провести анализ тех же данных с помощью обычного метода доверительных интервалов, получаемых после каждого отказа. Верхний и нижний пределы 80%-ного доверительного интервала определены с помощью коэффициентов $K_н$ и $K_в$ из табл. 5.2. Эти данные приведены в табл. 5.12, откуда видно, что для любого приемочного числа, меньшего семи отказов, при обычных испытаниях аппаратура была бы забракована, тогда как последовательные испытания продолжались бы и в случае восьми отказов, пока не стало бы ясно, что следует принять аппаратуру. Это проиллюстрировано на фиг. 5.28. Здесь

Таблица 5.12

Результаты определения доверительного интервала в испытаниях для случая *A*

Общая наработка Nt, *час*	Число отказов f	Оценка средней наработки на отказ $\frac{Nt}{f}$	80%-ный доверительный интервал [1]			
			верхний предел		нижний предел	
			$K_в$	$M_в^*$	$K_н$	$M_н^*$
20	1	20	9,44	188,8	0,434	8,68
40	2	2)	3,76	75,2	0,515	10,30
80	3	26,6	2,72	72,4	0,565	15,0
200	4	50	2,29	114,5	0,598	29,9
500	5	100	2,06	206	0,625	62,5
900	6	150	1,90	285	0,645	97,0
1400	7	200	1,80	360	0,667	133
2000	8	250	1,71	427	0,680	170
2600	9	290	1,66	482	0,690	200

[1] $M_н^*$ и $M_в^*$ — *нижний и верхний пределы среднего времени между отказами в момент* появления очередного отказа (для 80%-ного доверительного интервала).

вертикальные отрезки показывают 80%-ный доверительный интервал.

Приведем еще один пример последовательных испытаний. Полученные данные сведены в табл. 5.13 и показаны в виде ли-

Таблица 5.13

Результаты последовательных испытаний для случая *B*

Количество отказов f	Длительность испытаний t, *час*	Общая наработка Nt, *час*	Нормализованная длительность испытаний $t_n = \frac{Nt}{200}$	Принимаемое решение (из фиг. 5.19 и 5.20)
1	50	100	0,5	Продолжать
2	150	300	1,5	»
3	270	540	2,7	»
4	400	800	4,0	»
5	470	940	4,7	»
6	500	1000	5,0	»
7	530	1060	5,3	»
8	550	1100	5,5	»
9	600	1200	6,0	»
10	620	1240	6,2	»
11	640	1280	6,4	»
12	650	1300	6,5	»
13	660	1320	6,6	»
14	680	1360	6,8	Забраковать

нии *В* на фиг. 5.27. Из графика видно, что кривая интенсивности отказов во времени для случая *В* резко отличается от аналогичной кривой для случая *А*. В табл. 5.14 приведены результаты анализа случая *В* методом доверительных интервалов.

Таблица 5.14

Результаты определения доверительного интервала в испытаниях для случая *В*

Общая наработка Nt	Число отказов f	Оценка наработки на отказ $\frac{Nt}{f}$	80%-ный доверительный интервал			
			верхний предел		нижний предел	
			$K_в$	$M_в$	$K_н$	$M_н$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
100	1	100	9,44	944	0,434	43,4
300	2	150	3,76	566	0,515	77,0
540	3	180	2,72	490	0,565	102
800	4	200	2,29	458	0,598	119,6
940	5	188	2,06	386	0,625	116
1000	6	166	1,90	315	0,645	107
1060	7	151	1,80	272	0,667	101
1100	8	138	1,71	236	0,680	94
1200	9	132	1,66	218	0,690	91
1240	10	124	1,61	200	0,704	87
1280	11	116	1,56	181	0,714	83
1300	12	108	1,53	165	0,720	78
1320	13	102	1,50	153	0,730	74
1360	14	97	1,48	144	0,736	71

На примере случая *В* можно видеть, что при проведении испытаний обычным методом с приемочным числом, равным четырем или пяти отказам, аппаратура была бы принята, тогда как при проведении последовательных испытаний принятие решения откладывается до тех пор, пока в конце концов не становится очевидной необходимость браковки аппаратуры. Последовательные испытания в этом случае дают возможность выявить наступление износового периода, или старения, что трудно сделать при более кратковременных испытаниях.

5.5.5. Условия проведения испытаний. Выше уже указывалось, что AGREE рекомендует проведение последовательных испытаний аппаратуры в одной из четырех групп стандартизованных условий окружающей среды. Эти условия близки аналогичным условиям военного стандарта США MIL-R-22973. Ниже приведены 5 групп, установленных этим стандартом.

На фиг. 5.29 показан температурный цикл.

Условия окружающей среды

	Группа I
Температура	25±5° C (68—86° F)
Вибрации	Нет
Температурные циклы	Нет
Входное напряжение	Номинальное по ТУ на аппаратуру
	Группа II
Температура	40±5° C (95—113° F)
Вибрации	2*g* при нерезонансной частоте от 20 до 60 *гц*; измерения проводятся в точке закрепления аппаратуры на вибростенде
Температурные циклы	Нет
Входное напряжение	Максимальное по ТУ минус 0—2% при 45° C Минимальное по ТУ плюс 0—2% при 35° C

При испытаниях на вибрацию аппаратура жестко (без амортизаторов) закрепляется на столе вибростенда, который снабжен двигателем с асимметричным маховиком, дающим нужные амплитуду и частоту колебаний. Направление колебаний безразлично. Испытания на вибрацию во время температурного цикла по 10 минут в час.

	Группа III
Температура в камере	От —54 до 55° C (от —65 до 131° F)
Вибрации	То же, что и в группе II
Температурный цикл	Выдержка при максимальной температуре в течение трех часов плюс время достижения этой температуры; выдержки при минимальной температуре нет. Производится лишь охлаждение до минимальной температуры
Входное напряжение	То же, что и в группе II

Для проведения испытаний по группе III требуется камера, позволяющая за 2 *час* изменить температуру от —54 до 55° C, или две камеры и средства, обеспечивающие быстрое перемещение аппаратуры из одной камеры в другую. Время проверки на нагрев зависит от времени установления максимальной температуры, периода включения — выключения аппаратуры и времени работы. При помещении в камеру негерметичной аппаратуры принимаются меры предосторожности. Высокая влажность и конденсация недопустимы. Рекомендуется проводить не менее 4 температурных циклов в сутки.

	Группа IV
Температура	От —65 до 71° C(—85 до 160° F)
Вибрации	Те же, что и в группе II
Температурные циклы	Те же, что и в группе III
Входное напряжение	То же, что и в группе II

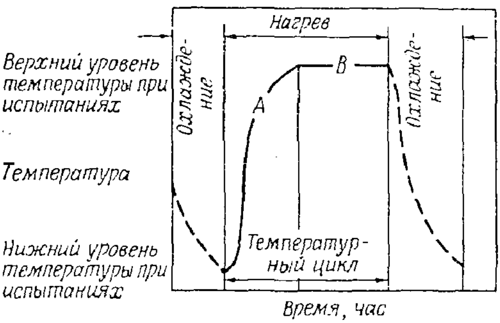
Группа IV отличается от группы III только бо́льшим диапазоном температур. Для обеих групп важно, чтобы аппаратура включалась сразу после переноса из камеры холода в камеру тепла или после включения нагревателя.

	Группа V
Температура	50±5° C (113—131° F)
Давление	760 *мм рт. ст.*
Влажность	70—90%
Вибрации	Такие же, как в группе II
Входное напряжение	Номинальное по ТУ
Температурные циклы	Нет

5.6. ПРИЕМОЧНЫЕ ИСПЫТАНИЯ СИСТЕМ

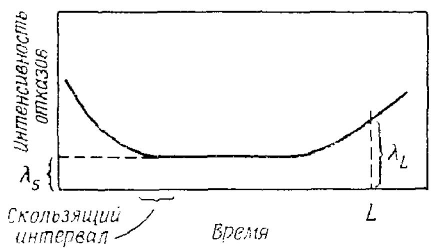
5.6.1. Общие замечания. Ввиду большого разнообразия видов испытаний систем ограничимся здесь довольно идеальным случаем, когда вся система испытывается длительное время на надежность при реальной эксплуатации или в условиях, имитирующих реальные условия.

Совершенно естественно от испытаний системы ожидать чего-то большего, чем просто определения среднего времени между



Фиг. 5.29. График изменения температуры в температурном цикле.

A — нагрев; *B* — выдержка при максимальной температуре.



Фиг. 5.30. Изменение интенсивности отказов со временем.

λ_s — установившаяся интенсивность отказов периода нормальной эксплуатации. Скользящий интервал усреднения равен утроенному значению среднего времени между отказами. Ресурс $L = t(\lambda_L = 2\lambda_s)$.

отказами. В качестве показателя надежности системы принимается готовность системы к эффективной и безотказной работе, которая оценивается по результатам испытаний. Как указывалось в гл. 1, этот показатель выражается в виде

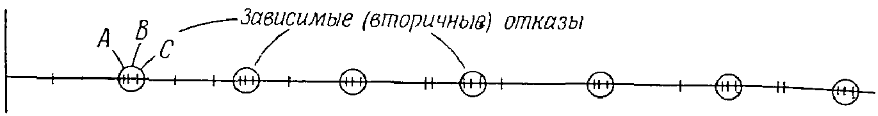
$$A = \frac{\bar{t}_0}{\bar{t}_0 + \bar{t}_r}, \qquad (5.29)$$

где A — готовность системы, $\bar{t}_0$ — среднее время безотказной работы, $\bar{t}_r$ — среднее время ремонта.

Численное значение готовности системы A может быть получено путем подстановки средних значений $\bar{t}_0$ и $\bar{t}_r$ в формулу (5.29). Однако значительно больше информации можно извлечь из полученных при испытаниях данных с помощью анализа временных закономерностей отказов и выявления причин отказов и большого времени восстановления [1]).

[1]) См. [7*]. — *Прим. ред.*

5.6.2. Временные закономерности отказов. Очень полезным при анализе результатов испытаний оказывается построенный в линейном масштабе график изменения интенсивности отказов в зависимости от времени. Статистические данные сглаживаются с помощью интервального скользящего усреднения и затем наносятся на график. Оптимальная величина интервала группирования приблизительно равна утроенному среднему времени между отказами. Типичный график представлен на фиг. 5.30. Периода приработки в принципе может и не быть, все зависит от качества и стабильности используемых в системе элементов. «Плоского» участка периода нормальной эксплуатации также



Фиг. 5.31. Поток отказов системы.

может не оказаться, если запас прочности элементов слишком мал. Системы, работоспособность которых нарушается уже при слабом износе или старении элементов, имеют очень короткий период стабильной работы до наступления состояния износа. По определению, точка полного исчерпания ресурса соответствует моменту увеличения интенсивности отказов вдвое:

$$L = t_{(\lambda_L = 2\lambda_S)}. \tag{5.30}$$

Испытания систем должны обеспечить возможность количественного определения указанных величин.

5.6.3. Зависимые отказы. Зависимые отказы легко выявляются, если моменты возникновения отказов отмечать на оси времени. При этом гораздо быстрее, чем каким-либо другим способом анализа, выявляются участки с повышенной частотой отказов. На фиг. 5.31 показан типичный пример, где кружками выделены группы зависимых (вторичных) отказов. Каждый раз, когда наступало событие A, происходила перегрузка других элементов, что приводило к их отказам, обозначаемым на фиг. 5.31 как события B и C. При оценке надежности, ожидаемой после проведения мероприятий, в принципе устраняющих возможность появления события A, данные испытаний пересматриваются, все события, зависимые от A, исключаются и в график вносятся изменения. При оценке надежности элементов зависимые (вторичные) отказы не учитываются.

Совершенно очевидно, что все сказанное здесь о системах полностью относится к функционально обособленной аппаратуре или устройствам. В этом случае аппаратура рассматривается как простая независимая система.

5.6.4. Влияние на систему взаимодействующих факторов. Любое описание приемочных испытаний систем не будет полным без рассмотрения различных взаимодействующих факторов в системе. Ценность данных, полученных при испытаниях систем, почти полностью определяется тем, насколько полно учитываются эти взаимодействующие факторы. Не вдаваясь в детали, достаточно привести здесь список наиболее важных факторов, рассматриваемых при испытаниях систем:

1. Общие источники питания: скачки напряжения, плохая регулировка, гальванические связи, потеря мощности.

2. Излучения: радиочастотные, низкочастотные, электромагнитные, акустические шумы.

3. Воздействия окружающей среды: нагрев, вибрации, удары, физические воздействия и т. д.

4. Функциональное воздействие: взаимосвязь лучей, биение частоты, плотность монтажа, безопасность.

5. Непредусмотренные в ТУ условия: окружающей среды, рабочие, обслуживания, транспортировки, хранения, приведения в готовность, контроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Advisory Group for Reliability of Electronic Equipment OASD-(R&E), June 4, 1957.
2. Mood, Theory of Statistics, New York, 1950.
3*. Базовский И., Надежность: теория и практика, изд-во «Мир», 1965.
4*. Dixon W. J., Massey F. J., Introduction to Statistical Analysis, McGraw-Hill, 1957.
5*. Бялый Л. И., Левин Б. Р., Оценка параметра надежности по результатам испытаний, «Радиотехника», т. 19, № 9, 1964.
6*. Цветаев К. Н., Перроте А. И., Карташов Г. Д., Основы ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность, изд-во «Советское радио», 1968.
7*. Gray H., Lewis T. O., A Confidence Interval for the Availability Ratio, *Technometrics*, 9 (3) (1967).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ТАБЛИЦЫ

Таблица А.1

Интегральное распределение Пуассона $F(c)=\sum\limits_{k=0}^{c}\frac{(c')^{k}e^{-c'}}{k!}$ **как предел биномиального распределения с параметрами** $(n,\ p')$

1000 · (вероятность появления не более c событий, когда среднее число событий равно $c'=np'$) Grant E. L., Statistical Quality Control, 3d ed., 1964, McGraw-Hill

$c' = np'$ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,02	980	1000								
0,04	961	999	1000							
0,06	942	998	1000							
0,08	923	997	1000							
0,10	905	995	1000							
0,15	861	990	999	1000						
0,20	819	982	999	1000						
0,25	779	974	998	1000						
0,30	741	963	996	1000						
0,35	705	951	994	1000						
0,40	670	938	992	999	1000					
0,45	638	925	989	999	1000					
0,50	607	910	986	998	1000					
0,55	577	894	982	998	1000					
0,60	549	878	977	997	1000					
0,65	522	861	972	996	999	1000				
0,70	497	844	966	994	999	1000				
0,75	472	827	959	993	999	1000				
0,80	449	809	953	991	999	1000				
0,85	427	791	945	989	998	1000				
0,90	407	772	937	987	998	1000				
0,95	387	754	929	984	997	1000				
1,00	368	736	920	981	996	999	1000			
1,1	333	699	900	974	995	999	1000			
1,2	301	663	879	966	992	998	1000			
1,3	273	627	857	957	989	998	1000			
1,4	247	592	833	946	986	997	999	1000		
1,5	223	558	809	934	981	996	999	1000		

Продолжение табл. А.1

$c' = np'$ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	202	525	783	921	976	994	999	1000		
1,7	183	493	757	907	970	992	998	1000		
1,8	165	463	731	891	964	990	997	999	1000	
1,9	150	434	704	875	956	987	997	999	1000	
2,0	135	406	677	857	947	983	995	999	1000	
2,2	111	355	623	819	928	975	993	998	1000	
2,4	091	308	570	779	904	964	988	997	999	1000
2,6	074	267	518	736	877	951	983	995	999	1000
2,8	061	231	469	692	848	935	976	992	998	999
3,0	050	199	423	647	815	916	966	988	996	999
3,2	041	171	380	603	781	895	955	983	994	998
3,4	033	147	340	558	744	871	942	977	992	997
3,6	027	126	303	515	706	844	927	969	988	996
3,8	022	107	269	473	668	816	909	960	984	994
4,0	018	092	238	433	629	785	889	949	979	992
4,2	015	078	210	395	590	753	867	936	972	989
4,4	012	066	185	359	551	720	844	921	964	985
4,6	010	056	163	326	513	686	818	905	955	980
4,8	008	048	143	294	476	651	791	887	944	975
5,0	007	040	125	265	440	616	762	867	932	968
5,2	006	034	109	238	406	581	732	845	918	960
5,4	005	029	095	213	373	546	702	822	903	951
5,6	004	024	082	191	342	512	670	797	886	941
5,8	003	021	072	170	313	478	638	771	867	929
6,0	002	017	062	151	285	446	606	744	847	916

	10	11	12	13	14	15	16
2,8	1000						
3,0	1000						
3,2	1000						
3,4	999	1000					
3,6	999	1000					
3,8	998	999	1000				
4,0	997	999	1000				
4,2	996	999	1000				
4,4	994	998	999	1000			
4,6	992	997	999	1000			
4,8	990	996	999	1000			
5,0	986	995	998	999	1000		
5,2	982	993	997	999	1000		
5,4	977	990	996	999	1000		
5,6	972	988	995	998	999	1000	
5,8	965	984	993	997	999	1000	
6,0	957	980	991	996	999	999	1000

Продолжение табл. А.1

c / $c' = np'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,2	002	015	054	134	259	414	574	716	826	902
6,4	002	012	046	119	235	384	542	687	803	886
6,6	001	010	040	105	213	355	511	658	780	869
6,8	001	009	034	093	192	327	480	628	755	850
7,0	001	007	030	082	173	301	450	599	729	830
7,2	001	006	025	072	156	276	420	569	703	810
7,4	001	005	022	063	140	253	392	539	676	788
7,6	001	004	019	055	125	231	365	510	648	765
7,8	000	004	016	048	112	210	338	481	620	741
8,0	000	003	014	042	100	191	313	453	593	717
8,5	000	002	009	030	074	150	256	386	523	653
9,0	000	001	006	021	055	116	207	324	456	587
9,5	000	001	004	015	040	089	165	269	392	522
10,0	000	000	003	010	029	067	130	220	333	458

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6,2	949	975	989	995	998	999	1000			
6,4	939	969	986	994	997	999	1000			
6,6	927	963	982	992	997	999	999	1000		
6,8	915	955	978	990	996	998	999	1000		
7,0	901	947	973	987	994	998	999	1000		
7,2	887	937	967	984	993	997	999	999	1000	
7,4	871	926	961	980	991	996	998	999	1000	
7,6	854	915	954	976	989	995	998	999	1000	
7,8	835	902	945	971	986	993	997	999	1000	
8,0	816	888	936	966	983	992	996	998	999	1000
8,5	763	849	909	949	973	986	993	997	999	999
9,0	706	803	876	926	959	978	989	995	998	999
9,5	645	752	836	898	940	967	982	991	996	998
10,0	583	697	792	864	917	951	973	986	993	997

	20	21	22
8,5	1000		
9,0	1000		
9,5	999	1000	
10,0	998	999	1000

Продолжение табл. А.1

$c' = np'$ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10,5	000	000	002	007	021	050	102	179	279	397
11,0	000	000	001	005	015	038	079	143	232	341
11,5	000	000	001	003	011	028	060	114	191	289
12,0	000	000	001	002	008	020	046	090	155	242
12,5	000	000	000	002	005	015	035	070	125	201
13,0	000	000	000	001	004	011	026	054	100	166
13,5	000	000	000	001	003	008	019	041	079	135
14,0	000	000	000	000	002	006	014	032	062	109
14,5	000	000	000	000	001	004	010	024	048	088
15,0	000	000	000	000	001	003	008	018	037	070

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10,5	521	639	742	825	888	932	960	978	988	994
11,0	460	579	689	781	854	907	944	968	982	991
11,5	402	520	633	733	815	878	924	954	974	986
12,0	347	462	576	682	772	844	899	937	963	979
12,5	297	406	519	628	725	806	869	916	948	969
13,0	252	353	463	573	675	764	835	890	930	957
13,5	211	304	409	518	623	718	798	861	908	942
14,0	176	260	358	464	570	669	756	827	883	923
14,5	145	220	311	413	518	619	711	790	853	901
15,0	118	185	268	363	466	568	664	749	819	875

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
10,5	997	999	999	1000						
11,0	995	998	999	1000						
11,5	992	996	998	999	1000					
12,0	988	994	997	999	999	1000				
12,5	983	991	995	998	999	999	1000			
13,0	975	986	992	996	998	999	1000			
13,5	965	980	989	994	997	998	999	1000		
14,0	952	971	983	991	995	997	999	999	1000	
14,5	936	960	976	986	992	996	998	999	999	1000
15,0	917	947	967	981	989	994	997	998	999	1000

Продолжение табл. А.1

$c' = np'$ \ c	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	000	001	004	010	022	043	077	127	193	275
17	000	001	002	005	013	026	049	085	135	201
18	000	000	001	003	007	015	030	055	092	143
19	000	000	001	002	004	009	018	035	061	098
20	000	000	000	001	002	005	011	021	039	066
21	000	000	000	000	001	003	006	013	025	043
22	000	000	000	000	001	002	004	008	015	028
23	000	000	000	000	000	001	002	004	009	017
24	000	000	000	000	000	000	001	003	005	011
25	000	000	000	000	000	000	001	001	003	006

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
16	368	467	566	659	742	812	868	911	942	963
17	281	371	468	564	655	736	805	861	905	937
18	208	287	375	469	562	651	731	799	855	899
19	150	215	292	378	469	561	647	725	793	849
20	105	157	221	297	381	470	559	644	721	787
21	072	111	163	227	302	384	471	558	640	716
22	048	077	117	169	232	306	387	472	556	637
23	031	052	082	123	175	238	310	389	472	555
24	020	034	056	087	128	180	243	314	392	473
25	012	022	038	069	092	134	185	247	318	394

	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
16	978	987	993	996	998	999	999	1000		
17	959	975	985	991	995	997	999	999	1000	
18	932	955	972	983	990	994	997	998	999	1000
19	893	927	951	969	980	988	993	996	998	999
20	843	888	922	948	966	978	987	992	995	997
21	782	838	883	917	944	963	976	985	991	994
22	712	777	832	877	913	940	959	973	983	989
23	635	708	772	827	873	908	936	956	971	981
24	554	632	704	768	823	868	904	932	953	969
25	473	553	629	700	763	818	863	900	929	950

	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
19	999	1000								
20	999	999	1000							
21	997	998	999	999	1000					
22	994	996	998	999	999	1000				
23	988	993	996	997	999	999	1000			
24	979	987	992	995	997	998	999	999	1000	
25	966	978	985	991	994	997	998	999	999	1000

Таблица А.2

Односторонние доверительные пределы для частостей, $n \leqslant 30$)

(При $n > 30$ для построения доверительных пределов см. графики Б.1—Б.4) Для заданных r и n из таблицы получается верхний односторонний предел. Crow E. L., Davis F. A., Maxfield M. W., Statistics Manual, China Lake, Calif., U. S. Naval Ordnance Test Station, NAVORD Report 3369 (NOTS 948), pp. 262—265.

r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%
	$n=2$				$n=3$				$n=4$		
0	0,684	0,776	0,900	0	0,536	0,632	0,785—	0	0,438	0,527	0,684
1	0,949	0,975—	0,995—	1	0,804	0,865—	0,941	1	0,680	0,751	0,859
				2	0,965+	0,983	0,997	2	0,857	0,902	0,958
								3	0,974	0,987	0,997
	$n=5$				$n=6$				$n=7$		
0	0,369	0,451	0,602	0	0,319	0,393	0,536	0	0,280	0,348	0,482
1	0,584	0,657	0,778	1	0,510	0,582	0,706	1	0,453	0,521	0,643
2	0,753	0,811	0,894	2	0,667	0,729	0,827	2	0,596	0,659	0,764
3	0,888	0,924	0,967	3	0,799	0,847	0,915+	3	0,721	0,775—	0,858
4	0,979	0,990	0,998	4	0,907	0,937	0,973	4	0,830	0,871	0,929
				5	0,983	0,991	0,998	5	0,921	0,947	0,977
								6	0,985+	0,993	0,999
	$n=8$				$n=9$				$n=10$		
0	0,250	0,312	0,438	0	0,226	0,283	0,401	0	0,206	0,259	0,369
1	0,406	0,471	0,590	1	0,368	0,429	0,544	1	0,337	0,394	0,504
2	0,538	0,600	0,707	2	0,490	0,550	0,656	2	0,450	0,507	0,612
3	0,655+	0,711	0,802	3	0,599	0,655+	0,750	3	0,552	0,607	0,703
4	0,760	0,807	0,879	4	0,699	0,749	0,829	4	0,646	0,696	0,782
5	0,853	0,889	0,939	5	0,790	0,831	0,895—	5	0,733	0,778	0,850
6	0,931	0,954	0,980	6	0,871	0,902	0,947	6	0,812	0,850	0,907
7	0,987	0,994	0,999	7	0,939	0,959	0,983	7	0,884	0,913	0,952
				8	0,988	0,994	0,999	8	0,945+	0,963	0,984
								9	0,990	0,995	0,999
	$n=11$				$n=12$				$n=13$		
0	0,189	0,238	0,342	0	0,175—	0,221	0,319	0	0,162	0,206	0,298
1	0,310	0,364	0,470	1	0,287	0,339	0,440	1	0,268	0,316	0,413
2	0,415+	0,470	0,572	2	0,386	0,438	0,537	2	0,360	0,410	0,506
3	0,511	0,564	0,660	3	0,475+	0,527	0,622	3	0,444	0,495—	0,588
4	0,599	0,650	0,738	4	0,559	0,609	0,698	4	0,523	0,573	0,661
5	0,682	0,729	0,806	5	0,638	0,685—	0,765+	5	0,598	0,645+	0,727

Продолжение табл. А.2

r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%
$n = 11$				$n = 12$				$n = 13$			
6	0,759	0,800	0,866	6	0,712	0,755−	0,825+	6	0,669	0,713	0,787
7	0,831	0,865−	0,916	7	0,781	0,819	0,879	7	0,736	0,776	0,841
8	0,895+	0,921	0,957	8	0,846	0,877	0,924	8	0,799	0,834	0,889
9	0,951	0,967	0,986	9	0,904	0,928	0,961	9	0,858	0,887	0,931
10	0,990	0,995+	0,999	10	0,955−	0,970	0,987	10	0,912	0,934	0,964
				11	0,991	0,996	0,999	11	0,958	0,972	0,988
								12	0,992	0,996	0,999
$n = 14$				$n = 15$				$n = 16$			
0	0,152	0,193	0,280	0	0,142	0,181	0,264	0	0,134	0,171	0,250
1	0,251	0,297	0,389	1	0,236	0,279	0,368	1	0,222	0,264	0,349
2	0,337	0,385+	0,478	2	0,317	0,363	0,453	2	0,300	0,344	0,430
3	0,417	0,466	0,557	3	0,393	0,440	0,529	3	0,371	0,417	0,503
4	0,492	0,540	0,627	4	0,464	0,511	0,597	4	0,439	0,484	0,569
5	0,563	0,610	0,692	5	0,532	0,577	0,660	5	0,504	0,548	0,630
6	0,631	0,675−	0,751	6	0,596	0,640	0,718	6	0,565+	0,609	0,687
7	0,695+	0,736	0,805+	7	0,658	0,700	0,771	7	0,625−	0,667	0,739
8	0,757	0,794	0,854	8	0,718	0,756	0,821	8	0,682	0,721	0,788
9	0,815−	0,847	0,898	9	0,774	0,809	0,865+	9	0,737	0,773	0,834
10	0,869	0,896	0,936	10	0,828	0,858	0,906	10	0,790	0,822	0,875−
11	0,919	0,939	0,967	11	0,878	0,903	0,941	11	0,839	0,868	0,912
12	0,961	0,974	0,989	12	0,924	0,943	0,969	12	0,886	0,910	0,945−
13	0,993	0,996	0,999	13	0,964	0,976	0,990	13	0,929	0,947	0,971
				14	0,993	0,997	0,999	14	0,966	0,977	0,990
								15	0,993	0,997	0,999
$n = 17$				$n = 18$				$n = 19$			
0	0,127	0,162	0,237	0	0,120	0,153	0,226	0	0,114	0,146	0,215+
1	0,210	0,250	0,332	1	0,199	0,238	0,316	1	0,190	0,226	0,302
2	0,284	0,326	0,410	2	0,269	0,310	0,391	2	0,257	0,296	0,374
3	0,352	0,396	0,480	3	0,334	0,377	0,458	3	0,319	0,359	0,439
4	0,416	0,461	0,543	4	0,396	0,439	0,520	4	0,378	0,419	0,498
5	0,478	0,522	0,603	5	0,455+	0,498	0,577	5	0,434	0,476	0,554
6	0,537	0,580	0,658	6	0,512	0,554	0,631	6	0,489	0,530	0,606
7	0,594	0,636	0,709	7	0,567	0,608	0,681	7	0,541	0,582	0,655+
8	0,650	0,689	0,758	8	0,620	0,659	0,729	8	0,592	0,632	0,702
9	0,703	0,740	0,803	9	0,671	0,709	0,774	9	0,642	0,680	0,746
10	0,754	0,788	0,845−	10	0,721	0,756	0,816	10	0,690	0,726	0,788

Продолжение табл. А.2

r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%	r	90%	95%	96%
	$n=17$				$n=18$				$n=19$		
11	0,803	0,834	0,883	11	0,769	0,801	0,855	11	0,737	0,770	0,827
12	0,849	0,876	0,918	12	0,815−	0,844	0,890	12	0,782	0,812	0,863
13	0,893	0,915+	0,948	13	0,858	0,884	0,923	13	0,825−	0,853	0,897
14	0,933	0,950	0,973	14	0,899	0,920	0,951	14	0,866	0,890	0,927
15	0,968	0,979	0,991	15	0,937	0,953	0,975−	15	0,905−	0,925−	0,954
16	0,994	0,997	0,999	16	0,970	0,980	0,992	16	0,941	0,956	0,976
				17	0,994	0,997	0,999	17	0,972	0,981	0,992
								18	0,994	0,997	0,999
	$n=20$				$n=21$				$n=22$		
0	0,109	0,139	0,206	0	0,104	0,133	0,197	0	0,099	0,127	0,189
1	0,181	0,216	0,289	1	0,173	0,207	0,277	1	0,166	0,198	0,266
2	0,245−	0,283	0,358	2	0,234	0,271	0,344	2	0,224	0,259	0,330
3	0,304	0,344	0,421	3	0,291	0,329	0,404	3	0,279	0,316	0,389
4	0,361	0,401	0,478	4	0,345+	0,384	0,460	4	0,331	0,369	0,443
5	0,415−	0,456	0,532	5	0,397	0,437	0,512	5	0,381	0,420	0,493
6	0,467	0,508	0,583	6	0,448	0,487	0,561	6	0,430	0,468	0,541
7	0,518	0,558	0,631	7	0,497	0,536	0,608	7	0,477	0,515+	0,587
8	0,567	0,606	0,677	8	0,544	0,583	0,653	8	0,523	0,561	0,630
9	0,615+	0,653	0,720	9	0,590	0,628	0,695+	9	0,568	0,605−	0,672
10	0,662	0,698	0,761	10	0,636	0,672	0,736	10	0,611	0,647	0,712
11	0,707	0,741	0,800	11	0,679	0,714	0,774	11	0,654	0,689	0,750
12	0,751	0,783	0,837	12	0,722	0,755+	0,811	12	0,695+	0,729	0,786
13	0,793	0,823	0,871	13	0,764	0,794	0,845+	13	0,736	0,767	0,821
14	0,834	0,860	0,902	14	0,804	0,832	0,878	14	0,775+	0,804	0,853
15	0,873	0,896	0,931	15	0,842	0,868	0,908	15	0,813	0,840	0,884
16	0,910	0,929	0,956	16	0,879	0,901	0,935−	16	0,850	0,874	0,912
17	0,944	0,958	0,977	17	0,914	0,932	0,959	17	0,885+	0,906	0,938
18	0,973	0,982	0,992	18	0,946	0,960	0,978	18	0,918	0,935+	0,961
19	0,995−	0,997	0,999	19	0,974	0,983	0,993	19	0,949	0,962	0,979
				20	0,995−	0,988	1,000	20	0,976	0,984	0,993
								21	0,995+	0,998	1,000
	$n=23$				$n=24$				$n=25$		
0	0,095+	0,122	0,181	0	0,091	0,117	0,175−	0	0,088	0,113	0,168
1	0,159	0,190	0,256	1	0,153	0,183	0,246	1	0,147	0,176	0,237
2	0,215+	0,249	0,318	2	0,207	0,240	0,307	2	0,199	0,231	0,296
3	0,268	0,304	0,374	3	0,258	0,292	0,361	3	0,248	0,282	0,349
4	0,318	0,355−	0,427	4	0,306	0,342	0,412	4	0,295−	0,330	0,398
5	0,366	0,404	0,476	5	0,352	0,389	0,460	5	0,340	0,375+	0,444

Продолжение табл. А.2

r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%
	$n = 23$				$n = 24$				$n = 25$		
6	0,413	0,451	0,552	6	0,398	0,435 –	0,505 –	6	0,383	0,420	0,488
7	0,459	0,496	0,567	7	0,442	0,479	0,548	7	0,426	0,462	0,531
8	0,503	0,540	0,609	8	0,484	0,521	0,590	8	0,467	0,504	0,571
9	0,546	0,583	0,650	9	0,526	0,563	0,630	9	0,508	0,544	0,610
10	0,589	0,625 –	0,689	10	0,567	0,603	0,688	10	0,548	0,583	0,648
11	0,630	0,665 –	0,727	11	0,608	0,642	0,705 –	11	0,587	0,621	0,684
12	0,670	0,704	0,763	12	0,647	0,681	0,740	12	0,625 –	0,659	0,719
13	0,710	0,742	0,797	13	0,685 +	0,718	0,774	13	0,662	0,695 –	0,752
14	0,748	0,778	0,829	14	0,723	0,754	0,806	14	0,699	0,730	0,784
15	0,786	0,814	0,860	15	0,759	0,788	0,837	15	0,735 –	0,764	0,815 +
16	0,822	0,848	0,889	16	0,795 +	0,822	0,867	16	0,770	0,798	0,845 +
17	0,857	0,880	0,916	17	0,830	0,854	0,894	17	0,804	0,830	0,873
18	0,890	0,910	0,941	18	0,863	0,885 +	0,920	18	0,837	0,861	0,899
19	0,922	0,938	0,962	19	0,895 +	0,914	0,943	19	0,869	0,890	0,923
20	0,951	0,963	0,980	20	0,925 +	0,941	0,964	20	0,899	0,918	0,946
21	0,977	0,984	0,993	21	0,953	0,965 +	0,981	21	0,928	0,943	0,966
22	0,995 +	0,998	1,000	22	0,978	0,985 –	0,994	22	0,955 +	0,956	0,982
				23	0,996	0,998	1,000	23	0,979	0,986	0,994
								24	0,996	0,998	1,000

r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%
	$n = 26$				$n = 27$				$n = 28$		
0	0,085 –	0,109	0,162	0	0,082	0,105 +	0,157	0	0,079	0,101	0,152
1	0,142	0,170	0,229	1	0,137	0,164	0,222	1	0,132	0,159	0,215 –
2	0,192	0,223	0,286	2	0,185 +	0,215 +	0,277	2	0,179	0,208	0,268
3	0,239	0,272	0,337	3	0,231	0,263	0,326	3	0,223	0,254	0,316
4	0,284	0,318	0,385 –	4	0,275 –	0,308	0,373	4	0,265 +	0,298	0,361
5	0,328	0,363	0,430	5	0,317	0,351	0,417	5	0,306	0,339	0,404
6	0,370	0,405 +	0,473	6	0,358	0,392	0,458	6	0,346	0,380	0,445 –
7	0,411	0,447	0,514	7	0,397	0,432	0,498	7	0,385 –	0,419	0,484
8	0,451	0,487	0,554	8	0,436	0,471	0,537	8	0,422	0,457	0,521
9	0,491	0,526	0,592	9	0,475 –	0,509	0,574	9	0,459	0,494	0,558
10	0,529	0,564	0,628	10	0,512	0,547	0,610	10	0,496	0,530	0,593
11	0,567	0,602	0,664	11	0,549	0,583	0,645 +	11	0,532	0,565 –	0,627
12	0,604	0,638	0,698	12	0,585 –	0,618	0,679	12	0,567	0,600	0,660
13	0,641	0,673	0,731	13	0,620	0,653	0,711	13	0,601	0,634	0,692
14	0,676	0,708	0,763	14	0,655 +	0,687	0,743	14	0,635 +	0,667	0,723
15	0,711	0,742	0,794	15	0,689	0,720	0,773	15	0,669	0,699	0,753
16	0,746	0,774	0,823	16	0,723	0,752	0,802	16	0,701	0,731	0,782
17	0,779	0,806	0,851	17	0,756	0,783	0,831	17	0,733	0,762	0,810
18	0,812	0,837	0,878	18	0,788	0,814	0,857	18	0,765 –	0,792	0,837
19	0,843	0,866	0,903	19	0,819	0,843	0,883	19	0,796	0,821	0,863
20	0,874	0,894	0,927	20	0,849	0,871	0,907	20	0,826	0,849	0,888

Продолжение табл. А.2

r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%
	$n=26$				$n=27$				$n=28$		
21	0,903	0,921	0,948	21	0,879	0,899	0,930	21	0,855+	0,876	0,911
22	0,931	0,946	0,967	22	0,907	0,924	0,950	22	0,883	0,902	0,932
23	0,957	0,968	0,983	23	0,934	0,948	0,968	23	0,911	0,927	0,952
24	0,979	0,986	0,994	24	0,958	0,969	0,983	24	0,936	0,950	0,969
25	0,996	0,998	1,000	25	0,980	0,987	0,994	25	0,960	0,970	0,984
				26	0,996	0,998	1,000	26	0,981	0,987	0,995−
								27	0,996	0,998	1,000

r	90%	95%	99%	r	90%	95%	99%
	$n=29$				$n=30$		
0	0,076	0,098	0,147	0	0,074	0,095+	0,142
1	0,128	0,153	0,208	1	0,124	0,149	0,202
2	0,173	0,202	0,260	2	0,168	0,195+	0,252
3	0,216	0,246	0,307	3	0,209	0,239	0,298
4	0,257	0,288	0,350	4	0,249	0,280	0,340
5	0,297	0,329	0,392	5	0,287	0,319	0,381
6	0,335−	0,368	0,432	6	0,325−	0,357	0,420
7	0,372	0,406	0,470	7	0,361	0,394	0,457
8	0,409	0,443	0,507	8	0,397	0,430	0,493
9	0,445+	0,479	0,542	9	0,432	0,465+	0,527
10	0,481	0,514	0,577	10	0,466	0,499	0,561
11	0,515+	0,549	0,610	11	0,500	0,533	0,594
12	0,550	0,583	0,643	12	0,533	0,566	0,626
13	0,583	0,616	0,674	13	0,566	0,598	0,657
14	0,616	0,648	0,705−	14	0,599	0,630	0,687
15	0,649	0,680	0,734	15	0,630	0,661	0,716
16	0,681	0,711	0,763	16	0,662	0,692	0,744
17	0,712	0,741	0,791	17	0,692	0,721	0,772
18	0,743	0,771	0,818	18	0,723	0,750	0,799
19	0,774	0,800	0,843	19	0,752	0,779	0,824
20	0,803	0,828	0,868	20	0,782	0,807	0,849
21	0,832	0,855−	0,892	21	0,810	0,834	0,873
22	0,860	0,881	0,914	22	0,838	0,860	0,896
23	0,888	0,906	0,935−	23	0,865+	0,885+	0,917
24	0,914	0,930	0,954	24	0,891	0,909	0,937
25	0,938	0,951	0,970	25	0,917	0,932	0,955+
26	0,961	0,971	0,985	26	0,941	0,953	0,972
27	0,982	0,988	0,995−	27	0,963	0,972	0,985+
28	0,996	0,998	1,000	28	0,982	0,988	0,995+
				29	0,996	0,998	1,000

Таблица А.3

Двусторонние доверительные пределы для частостей, $n \leqslant 30$

(При $n > 30$ доверительные пределы можно определить из графиков фиг. Б.1 – Б.4)

Верхние пределы даны жирным шрифтом (справа), r/n — частость, полученная для случайной выборки объема n

Crow E. L., Davis F. A., Maxfield M. W., Statistics Manual, China Lake, Calif., U. S. Naval Ordnance Test Station, NAVORD Report 3369 (NOTS 948), 1955, pp. 257–261.

r	90%		95%		99%		r	90%		95%		99%	
	$n=1$							$n=2$					
0	0	**0,900**	0	**0,950**	0	**0,990**	0	0	**0,684**	0	**0,776**	0	**0,900**
1	0,100	**1**	0,050	**1**	0,010	**1**	1	0,051	**0,949**	0,025+	**0,975−**	0,005+	**0,995−**
							2	0,316	**1**	0,224	**1**	0,100	**1**
	$n=3$							$n=4$					
0	0	**0,536**	0	**0,632**	0	**0,785−**	0	0	**0,500**	0	**0,527**	0	**0,684**
1	0,035−	**0,804**	0,017	**0,865−**	0,003	**0,941**	1	0,026	**0,680**	0,013	**0,751**	0,003	**0,859**
2	0,196	**0,965+**	0,135−	**0,983**	0,059	**0,997**	2	0,143	**0,857**	0,098	**0,902**	0,042	**0,958**
3	0,464	**1**	0,368	**1**	0,215+	**1**	3	0,320	**0,974**	0,249	**0,987**	0,141	**0,997**
							4	0,500	**1**	0,473	**1**	0,316	**1**
	$n=5$							$n=6$					
0	0	**0,379**	0	**0,500**	0	**0,602**	0	0	**0,345−**	0	**0,402**	0	**0,536**
1	0,021	**0,621**	0,010	**0,657**	0,002	**0,778**	1	0,017	**0,542**	0,009	**0,598**	0,002	**0,706**
2	0,112	**0,753**	0,076	**0,811**	0,033	**0,894**	2	0,093	**0,667**	0,063	**0,729**	0,027	**0,827**
3	0,247	**0,888**	0,189	**0,924**	0,106	**0,967**	3	0,201	**0,799**	0,153	**0,847**	0,085−	**0,915+**
4	0,379	**0,979**	0,343	**0,990**	0,222	**0,998**	4	0,333	**0,907**	0,271	**0,937**	0,173	**0,973**
5	0,621	**1**	0,500	**1**	0,398	**1**	5	0,458	**0,983**	0,402	**0,991**	0,294	**0,998**
							6	0,655+	**1**	0,593	**1**	0,464	**1**
	$n=7$							$n=8$					
0	0	**0,316**	0	**0,377**	0	**0,500**	0	0	**0,255−**	0	**0,315+**	0	**0,451**
1	0,015	**0,500**	0,007	**0,554**	0,001	**0,643**	1	0,013	**0,418**	0,006	**0,500**	0,001	**0,590**
2	0,079	**0,684**	0,053	**0,659**	0,023	**0,764**	2	0,069	**0,582**	0,046	**0,685−**	0,020	**0,707**
3	0,170	**0,721**	0,129	**0,775**	0,071	**0,858**	3	0,147	**0,745+**	0,111	**0,711**	0,061	**0,802**
4	0,279	**0,830**	0,225+	**0,871**	0,142	**0,929**	4	0,240	**0,760**	0,193	**0,807**	0,121	**0,879**
5	0,316	**0,921**	0,341	**0,947**	0,236	**0,977**	5	0,255−	**0,853**	0,289	**0,889**	0,198	**0,939**
6	0,500	**0,985+**	0,446	**0,993**	0,357	**0,999**	6	0,418	**0,931**	0,315+	**0,954**	0,293	**0,980**
7	0,684	**1**	0,623	**1**	0,500	**1**	7	0,582	**0,987**	0,500	**0,994**	0,410	**0,999**
							8	0,745+	**1**	0,685−	**1**	0,549	**1**

Продолжение табл. А.3

r	90%		95%		99%		r	90%		95%		99%	
			$n=9$							$n=10$			
0	0	0,232	0	0,289	0	0,402	0	0	0,222	0	0,267	0	0,376
1	0,012	0,391	0,006	0,443	0,001	0,598	1	0,010	0,352	0,005+	0,397	0,001	0,512
2	0,061	0,515+	0,041	0,558	0,017	0,656	2	0,055−	0,500	0,037	0,603	0,016	0,624
3	0,129	0,610	0,098	0,711	0,053	0,750	3	0,116	0,648	0,087	0,619	0,048	0,703
4	0,210	0,768	0,169	0,749	0,105+	0,829	4	0,188	0,659	0,150	0,733	0,093	0,782
5	0,232	0,790	0,251	0,831	0,171	0,895−	5	0,222	0,778	0,222	0,778	0,150	0,850
6	0,390	0,871	0,289	0,902	0,250	0,947	6	0,341	0,812	0,267	0,850	0,218	0,907
7	0,485−	0,939	0,442	0,959	0,344	0,933	7	0,352	0,884	0,381	0,913	0,297	0,952
8	0,609	0,988	0,557	0,994	0,402	0,999	8	0,500	0,945+	0,397	0,963	0,376	0,984
9	0,768	1	0,711	1	0,598	1	9	0,648	0,990	0,603	0,995−	0,488	0,999
							10	0,778	1	0,733	1	0,624	1
			$n=11$							$n=12$			
0	0	0,197	0	0,250	0	0,359	0	0	0,184	0	0,236	0	0,321
1	0,010	0,315+	0,005	0,369	0,001	0,509	1	0,009	0,294	0,004	0,346	0,001	0,445+
2	0,049	0,423	0,033	0,500	0,014	0,593	2	0,045	0,398	0,030	0,450	0,013	0,555−
3	0,105−	0,577	0,079	0,631	0,043	0,660	3	0,096	0,500	0,072	0,550	0,039	0,679
4	0,169	0,685+	0,135+	0,667	0,084	0,738	4	0,154	0,602	0,123	0,654	0,076	0,698
5	0,197	0,698	0,200	0,750	0,134	0,806	5	0,184	0,703	0,181	0,706	0,121	0,765+
6	0,302	0,803	0,250	0,800	0,194	0,866	6	0,271	0,729	0,236	0,764	0,175−	0,825+
7	0,315+	0,831	0,333	0,865−	0,262	0,916	7	0,294	0,816	0,294	0,819	0,235−	0,879
8	0,423	0,895+	0,369	0,921	0,340	0,957	8	0,398	0,846	0,346	0,877	0,302	0,924
9	0,577	0,951	0,500	0,967	0,407	0,986	9	0,500	0,904	0,450	0,928	0,321	0,961
10	0,685−	0,990	0,631	0,995+	0,500	0,999	10	0,602	0,955	0,550	0,970	0,445+	0,987
11	0,803	1	0,750	1	0,641	1	11	0,706	0,991	0,654	0,996	0,555−	0,999
							12	0,816	1	0,764	1	0,679	1
			$n=13$							$n=14$			
0	0	0,173	0	0,225+	0	0,302	0	0	0,163	0	0,207	0	0,286
1	0,008	0,276	0,004	0,327	0,001	0,429	1	0,007	0,261	0,004	0,312	0,001	0,392
2	0,042	0,379	0,028	0,434	0,012	0,523	2	0,039	0,365+	0,026	0,389	0,011	0,500
3	0,088	0,470	0,066	0,520	0,036	0,594	3	0,081	0,422	0,061	0,500	0,033	0,608
4	0,142	0,545−	0,113	0,587	0,069	0,698	4	0,131	0,578	0,104	0,611	0,064	0,636
5	0,173	0,621	0,166	0,673	0,111	0,727	5	0,163	0,594	0,153	0,629	0,102	0,714
6	0,246	0,724	0,224	0,740	0,159	0,787	6	0,224	0,645+	0,206	0,688	0,146	0,751
7	0,276	0,754	0,260	0,776	0,213	0,841	7	0,261	0,739	0,207	0,793	0,195−	0,805+
8	0,379	0,827	0,327	0,834	0,273	0,889	8	0,355−	0,776	0,312	0,794	0,249	0,854
9	0,455+	0,858	0,413	0,887	0,302	0,931	9	0,406	0,837	0,371	0,847	0,286	0,898
10	0,530	0,912	0,480	0,934	0,406	0,964	10	0,422	0,869	0,389	0,896	0,364	0,936
11	0,621	0,958	0,566	0,972	0,477	0,988	11	0,578	0,919	0,500	0,939	0,392	0,967
12	0,724	0,992	0,673	0,996	0,571	0,999	12	0,635−	0,961	0,611	0,974	0,500	0,989
13	0,827	1	0,775−	1	0,698	1	13	0,739	0,993	0,688	0,996	0,608	0,999
							14	0,837	1	0,793	1	0,714	1

Продолжение табл. А.3

$n = 15$

r	90%		95%		99%	
0	0	0,154	0	0,191	0	0,273
1	0,007	0,247	0,003	0,302	0,001	0,373
2	0,036	0,326	0,024	0,369	0,010	0,461
3	0 076	0,400	0,057	0,448	0,031	0,539
4	0,122	0,500	0,097	0,552	0,059	0,627
5	0,154	0,600	0,142	0,631	0,094	0,672
6	0,205+	0,674	0,191	0,668	0,135–	0,727
7	0,247	0,675–	0,192	0,706	0,179	0,771
8	0,325+	0,753	0,294	0,808	0,229	0,821
9	0,326	0,795–	0,332	0,809	0,273	0,865+
10	0,400	0,846	0,369	0,838	0,328	0,906
11	0,500	0,878	0,448	0,903	0,373	0,941
12	0,600	0,924	0,552	0,943	0,461	0,969
13	0,674	0,964	0,631	0,976	0,539	0,990
14	0,753	0,993	0,698	0,997	0,627	0,999
15	0,846	1	0,809	1	0,727	1

$n = 16$

r	90%		95%		99%	
0	0	0,147	0	0,179	0	0,264
1	0,007	0,235+	0,003	0,273	0,001	0,357
2	0,034	0,305+	0,023	0,352	0,010	0,451
3	0,071	0,381	0,053	0,429	0,029	0,525–
4	0,114	0,450	0,090	0,500	0,055+	0,579
5	0,147	0,550	0,132	0,571	0,088	0,643
6	0,189	0,619	0,178	0,648	0,125+	0,705–
7	0,235+	0,695–	0,179	0,727	0,166	0,739
8	0,299	0,701	0,272	0,728	0,212	0,785
9	0,305+	0,765–	0,273	0,821	0,261	0,834
10	0,381	0,811	0,352	0,822	0,295+	0,875–
11	0,450	0,853	0,429	0,868	0,357	0,912
12	0,550	0,886	0,500	0,910	0,421	0,945–
13	0,619	0,929	0,571	0,947	0,475+	0,971
14	0,695–	0,966	0,648	0,977	0,549	0,990
15	0,765–	0,993	0,727	0,997	0,643	0,999
16	0,853	1	0,821	1	0,736	1

$n = 17$

r	90%		95%		99%	
0	0	0,140	0	0,167	0	0,243
1	0,006	0,225+	0,003	0,254	0,001	0,346
2	0,032	0,290	0,021	0,337	0,009	0,413
3	0,067	0,364	0,050	0,417	0,027	0,500
4	0,107	0,432	0,085–	0,489	0,052	0,587
5	0,140	0,500	0,124	0,544	0,082	0,620
6	0,175+	0,568	0 166	0,594	0,117	0,662
7	0,225+	0,636	0,167	0,663	0,155+	0,757
8	0,277	0,710	0,253	0,746	0,197	0,758
9	0,290	0,723	0,254	0,747	0,242	0,803
10	0,364	0,775–	0,338	0,833	0,243	0,845
11	0,432	0,825–	0,406	0,834	0,338	0,883
12	0,500	0,860	0,456	0,876	0,380	0,918
13	0,568	0,893	0,511	0,915+	0,413	0,948
14	0,636	0,933	0,583	0,950	0,500	0,973
15	0,710	0,968	0,663	0,979	0,587	0,991
16	0,775–	0,994	0.746	0,997	0,654	0,999
17	0,860	1	0,833	1	0 757	1

$n = 18$

r	90%		95%		99%	
0	0	0,135–	0	0,157	0	0,228
1	0,006	0,216	0,003	0,242	0,001	0,318
2	0,030	0,277	0,020	0,325–	0,008	0,397
3	0,063	0,349	0,047	0,381	0,025+	0,466
4	0,101	0,419	0,080	0,444	0,049	0,534
5	0,135–	0,482	0,116	0,556	0,077	0,603
6	0,163	0,536	0,156	0,619	0,110	0,682
7	0,216	0,584	0,157	0,625+	0,145+	0,686
8	0,257	0,651	0,236	0,675+	0,184	0,772
9	0,277	0,723	0,242	0,758	0,226	0,774
10	0,349	0,743	0,325–	0,764	0,228	0,816
11	0,416	0,784	0,375–	0,843	0,314	0,855–
12	0,464	0,837	0,381	0,844	0,318	0,890
13	0,518	0,865+	0,444	0,884	0,397	0,923
14	0,581	0,899	0,556	0,920	0,466	0,951
15	0,651	0,937	0,619	0,953	0,534	0,975
16	0,723	0,970	0,675+	0,980	0,603	0,992
17	0,784	0,994	0,758	0,997	0,682	0.999
18	0,865+	1	0,843	1	0,772	1

Продолжение табл. А.3

r	90%		95%		99%		r	90%		95%		99%	
	$n = 19$							$n = 20$					
0	0	0,130	0	0,150	0	0,218	0	0	0,126	0	0,143	0	0,209
1	0,006	0,209	0,003	0,232	0,001	0,305+	1	0,005+	0,203	0,003	0,222	0,001	0,293
2	0,028	0,265+	0,019	0,316	0,008	0,383	2	0,027	0,255−	0,018	0,294	0,008	0,375−
3	0,059	0,337	0,044	0,365−	0,024	0,455+	3	0,056	0,328	0,042	0,351	0,023	0,424
4	0,095+	0,387	0,075+	0,426	0,046	0,515+	4	0,090	0,367	0,071	0,411	0,044	0,500
5	0,130	0,440	0,110	0,500	0,073	0,564	5	0,126	0,422	0,104	0,467	0,069	0,576
6	0,151	0,560	0,147	0,574	0,103	0,617	6	0,141	0,500	0,140	0,533	0,098	0,601
7	0,209	0,613	0,150	0,635+	0,137	0,695−	7	0,201	0,578	0,143	0,589	0,129	0,637
8	0,238	0,614	0,222	0,655+	0,173	0,707	8	0,221	0,633	0,209	0,649	0,163	0,707
9	0,265+	0,663	0,232	0,688	0,212	0,782	9	0,255−	0,642	0,222	0,706	0,200	0,726
10	0,337	0,735−	0,312	0,768	0,218	0,788	10	0,325	0,675+	0,293	0,707	0,209	0,791
11	0,386	0,762	0,345−	0,778	0,293	0,827	11	0,358	0,745+	0,294	0,778	0 274	0,800
12	0,387	0,791	0,365−	0,850	0,305+	0,863	12	0,367	0,779	0,351	0,791	0,293	0,837
13	0,440	0,849	0,426	0,853	0,383	0,897	13	0,422	0,799	0,411	0,857	0,363	0,871
14	0,560	0,870	0,500	0,890	0,436	0,927	14	0,500	0,859	0,467	0,860	0,399	0,902
15	0,613	0,905−	0,574	0,925−	0,485−	0,954	15	0,578	0,874	0,533	0,896	0,424	0,931
16	0,668	0,941	0,635+	0,956	0,545−	0,976	16	0,633	0,910	0,589	0,929	0,500	0,956
17	0,735−	0,972	0,684	0,981	0,617	0,992	17	0,672	0,944	0,649	0,958	0,576	0,977
18	0,791	0,994	0,768	0,997	0,695−	0,999	18	0,745+	0,973	0,766	0,982	0,625+	0,992
19	0,870	1	0,850	1	0,782	1	19	0,797	0,995−	0,778	0,997	0,707	0,999
							20	0,874	1	0,857	1	0,791	1

r	90%		95%		99%		r	90%		95%		99%	
	$n = 21$							$n = 22$					
0	0	0,123	0	0,137	0	0,201	0	0	0,116	0	0,132	0	0,194
1	0,005+	0,192	0,002	0,213	0,000	0,283	1	0,005−	0,182	0,002	0,205+	0,000	0,273
2	0,026	0,245−	0,017	0,277	0,007	0,347	2	0,024	0,236	0,016	0,264	0,007	0,334
3	0,054	0,307	0,040	0,338	0,022	0,409	3	0,051	0,289	0,038	0,326	0,021	0,396
4	0,086	0,353	0,068	0,398	0,041	0,466	4	0,082	0,340	0,065−	0,389	0,039	0,451
5	0,121	0,407	0,099	0,455+	0,065+	0,534	5	0,115−	0,393	0,094	0,424	0,062	0,505−
6	0,139	0,458	0,132	0,506	0,092	0,591	6	0,116	0,444	0,126	0,500	0,088	0,550
7	0,191	0,542	0,137	0,551	0,122	0,653	7	0,181	0,500	0,132	0,576	0,116	0,604
8	0,192	0,593	0,197	0,602	0,155−	0,661	8	0,182	0,556	0,187	0,582	0,147	0,666
9	0,245	0,647	0,213	0,662	0,189	0,717	9	0,236	0,607	0,205+	0,617	0,179	0,682
10	0,306	0,693	0,276	0,723	0,201	0,743	10	0,289	0,660	0,260	0,674	0,194	0,727
11	0,307	0,694	0,277	0,724	0,257	0,799	11	0,290	0,710	0,264	0,736	0,242	0,758
12	0,353	0,755+	0,338	0,787	0,283	0,811	12	0,340	0,711	0,326	0,740	0,273	0,806
13	0,407	0,808	0,398	0,803	0,339	0,845+	13	0,393	0,764	0,383	0,795−	0,318	0,821
14	0,458	0,809	0,449	0,863	0,347	0,878	14	0,444	0,818	0,418	0,813	0,334	0,853
15	0,542	0,870	0,494	0,868	0,409	0,908	15	0,500	0,819	0,424	0,868	0,396	0,884
16	0,593	0,879	0,545−	0,901	0,466	0,935−	16	0,556	0,884	0,500	0,874	0,450	0,912
17	0,647	0,914	0,602	0,932	0,534	0,959	17	0,607	0,885+	0,576	0,906	0,495+	0,938
18	0,693	0,946	0,662	0,960	0,591	0,978	18	0,660	0,918	0,611	0,935+	0,546	0,961
19	0,755+	0,974	0,723	0,983	0,653	0,993	19	0,711	0,949	0,674	0,962	0,604	0,979
20	0,803	0,995−	0,787	0,998	0,717	1,000	20	0,764	0,976	0,736	0,984	0,666	0,993

Продолжение табл. А.3

r	90%		95%		99%		r	90%		95%		99%	
			$n = 21$							$n = 22$			
21	0,877	1	0,863	1	0,799	1	21	0,818	0,995+	0,795–	0,998	0,727	1,000
							22	0,884	1	0,863	1	0,806	1
			$n = 23$							$n = 24$			
0	0	0,111	0	0,127	0	0,187	0	0	0,105+	0	0,122	0	0,181
1	0,005–	0,174	0,002	0,196	0,000	0,365+	1	0,004	0,165+	0,002	0,191	0,000	0,259
2	0,023	0,228	0,016	0,256	0,007	0,323	2	0,022	0,221	0,015+	0,246	0,006	0,313
3	0,049	0,274	0,037	0,317	0,020	0,386	3	0,047	0,264	0,035–	0,308	0,019	0,364
4	0,078	0,328	0,062	0,361	0,038	0,429	4	0,075–	0,317	0,059	0,347	0,036	0,416
5	0,110	0,381	0,090	0,409	0,059	0,500	5	0,105–	0,370	0,086	0,393	0,057	0,464
6	0,111	0,431	0,120	0,457	0,084	0,571	6	0,105+	0,423	0,115–	0,443	0,080	0,536
7	0,173	0,479	0,127	0,543	0,111	0,580	7	0,165–	0,448	0,122	0,500	0,106	0,584
8	0,174	0,522	0,178	0,591	0,140	0,616	8	0,165+	0,552	0,169	0,557	0,133	0,636
9	0,228	0,569	0,198	0,639	0,171	0,677	9	0,221	0,553	0,191	0,604	0,163	0,638
10	0,273	0,619	0,217	0,640	0,187	0,702	10	0,259	0,587	0,234	0,653	0,181	0,687
11	0,274	0,672	0,255–	0,683	0,229	0,735–	11	0,264	0,630	0,246	0,661	0,216	0,720
12	0,328	0,726	0,317	0,745+	0,265+	0,771	12	0,317	0,683	0,308	0,692	0,257	0,743
13	0,381	0,727	0,360	0,753	0,298	0,813	13	0,370	0,736	0,339	0,754	0,280	0,784
14	0,431	0,772	0,361	0,802	0,323	0,829	14	0,413	0,741	0,347	0,766	0,313	0,819
15	0,478	0,826	0,409	0,322	0,384	0,860	15	0,447	0,779	0,396	0,809	0,362	0,837
16	0,521	0,827	0,457	0,873	0,420	0,889	16	0,448	0,835–	0,443	0,831	0,364	0,867
17	0,569	0,889	0,543	0,880	0,429	0,916	17	0,552	0,835+	0,500	0,878	0,416	0,894
18	0,619	0,890	0,591	0,910	0,500	0,941	18	0,577	0,895–	0,557	0,885+	0,464	0,920
19	0,672	0,922	0,639	0,938	0,571	0,962	19	0,630	0,895+	0,604	0,914	0,536	0,943
20	0,726	0,951	0,683	0,963	0,614	0,980	20	0,683	0,925+	0,653	0,941	0,584	0,964
21	0,772	0,977	0,745+	0,984	0,677	0,993	21	0,736	0,953	0,692	0,965+	0,636	0,981
22	0,826	0,995+	0,802	0,998	0,735–	1,000	22	0,779	0,978	0,754	0,985–	0,687	0,994
23	0,889	1	0,873	1	0,813	1	23	0,835–	0,996	0,809	0,993	0,741	1,000
							24	0,895–	1	0,878	1	0,819	1
			$n = 25$							$n = 26$			
0	0	0,102	0	0,118	0	0,175+	0	0	0,098	0	0,114	0	0,170
1	0,004	0,159	0,002	0,185+	0,000	0,246	1	0,004	0,152	0,002	0,180	0,000	0,235–
2	0,021	0,214	0,014	0,288	0,006	0,305–	2	0,021	0,209	0,014	0,230	0,006	0,298
3	0,045–	0,255–	0,034	0,303	0,018	0,352	3	0,043	0,247	0,032	0,283	0,017	0,342
4	0,072	0,307	0,057	0,336	0,034	0,403	4	0,069	0,299	0,054	0,325	0,033	0,393
5	0,101	0,362	0,082	0,384	0,054	0,451	5	0,097	0,343	0,079	0,374	0,052	0,442
6	0,102	0,390	0,110	0,431	0,077	0,500	6	0,098	0,377	0,106	0,421	0,073	0,487
7	0,158	0,432	0,118	0,475–	0,101	0,549	7	0,151	0,419	0,114	0,465–	0,097	0,526
8	0,159	0,500	0,161	0,525+	0,127	0,597	8	0,152	0,460	0,154	0,503	0,122	0,562
9	0,214	0,533	0,185+	0,569	0,155+	0,648	9	0,209	0,540	0,180	0,542	0,149	0,607
10	0,246	0,610	0,222	0,616	0,175+	0,658	10	0,233	0,581	0,212	0,579	0,170	0,658

Продолжение табл. А.3

$n = 25$

r	90%		95%		99%	
11	0,255	0,611	0,238	0,664	0,205+	0,695+
12	0,307	0,640	0,296	0,683	0,245+	0,754
13	0,360	0,693	0,317	0,704	0,246	0,755−
14	0,389	0,745+	0,336	0,762	0,305−	0,795−
15	0,390	0,754	0,384	0,778	0,342	0,825−
16	0,432	0,786	0,431	0,815−	0,352	0,845−
17	0,500	0,841	0,475−	0,839	0,403	0,873
18	0,563	0,842	0,525+	0,882	0,451	0,899
19	0,610	0,898	0,569	0,890	0,500	0,923
20	0,638	0,899	0,616	0,918	0,549	0,946
21	0,693	0,928	0,664	0,943	0,597	0,966
22	0,745+	0,955+	0,697	0,966	0,648	0,982
23	0,786	0,979	0,762	0,986	0,695+	0,994
24	0,841	0,995	0,815−	0,998	0,751	1,000
25	0,898	1	0,882	1	0,825−	1

$n = 26$

r	90%		95%		99%	
11	0,247	0,623	0,230	0,626	0,195−	0,678
12	0,299	0,657	0,282	0,675−	0,234	0,702
13	0,342	0,658	0,283	0,717	0,235−	0,765+
14	0,343	0,701	0,325+	0,718	0,298	0,766
15	0,377	0,753	0,374	0,770	0,322	0,805+
16	0,419	0,767	0,421	0,788	0,342	0,830
17	0,460	0,791	0,458	0,820	0,393	0,851
18	0,540	0,848	0,494	0,846	0,438	0,878
19	0,581	0,849	0,535−	0,886	0,474	0,903
20	0,623	0,902	0,579	0,894	0,513	0,927
21	0,657	0,903	0,626	0,921	0,558	0,948
22	0,701	0,931	0,675−	0,946	0,607	0,967
23	0,753	0,957	0,717	0,968	0,658	0,983
24	0,791	0,979	0,770	0,986	0,702	0,994
25	0,848	0,996	0,820	0,998	0,765+	1,000
26	0,902	1	0,886	1	0,830	1

$n = 27$

r	90%		95%		99%	
0	0	0,093	0	0,110	0	0,166
1	0,004	0,146	0,002	0,175−	0,000	0,225−
2	0,020	0,204	0,013	0,223	0,006	0,297
3	0,042	0,239	0,031	0,270	0,017	0,332
4	0,066	0,291	0,052	0,316	0,032	0,384
5	0,093	0,327	0,076	0,364	0,050	0,419
6	0,094	0,365+	0,101	0,415−	0,070	0,461
7	0,145+	0,407	0,110	0,437	0,093	0,539
8	0,146	0,447	0,148	0,500	0,117	0,581
9	0,204	0,500	0,175−	0,563	0,143	0,587
10	0,221	0,553	0,202	0,570	0,166	0,617
11	0,239	0,593	0,223	0,598	0,185−	0,668
12	0,291	0,635−	0,269	0,636	0,224	0,702
13	0,326	0,673	0,270	0,684	0,225−	0,716
14	0,327	0,674	0,316	0,730	0,284	0,775+
15	0,365+	0,709	0,364	0,731	0,298	0,776
16	0,407	0,761	0,402	0,777	0,332	0,815+
17	0,447	0,779	0,430	0,798	0,383	0,834
18	0,500	0,796	0,437	0,825+	0,413	0,857
19	0,553	0,854	0,500	0,852	0,419	0,883
20	0,593	0,855−	0,563	0,890	0,461	0,907

$n = 28$

r	90%		95%		99%	
0	0	0,090	0	0,106	0	0,162
1	0,004	0,140	0,002	0,170	0,000	0,218
2	0,019	0,201	0,013	0,217	0,005	0,273
3	0,040	0,232	0,030	0,259	0,016	0,323
4	0,064	0,284	0,050	0,307	0,031	0,365−
5	0,089	0,312	0,073	0,357	0,048	0,408
6	0,090	0,355−	0,098	0,384	0,068	0,449
7	0,139	0,396	0,106	0,424	0,089	0,500
8	0,140	0,435+	0,142	0,463	0,112	0,551
9	0,197	0,473	0,170	0,537	0,137	0,592
10	0,203	0,527	0,192	0,576	0,162	0,635+
11	0,232	0,565−	0,217	0,616	0,175+	0,636
12	0,284	0,604	0,258	0,619	0,214	0,677
13	0,310	0,645+	0,259	0,645+	0,218	0,727
14	0,312	0,688	0,307	0,693	0,272	0,728
15	0,335−	0,690	0,355−	0,741	0,273	0,782
16	0,396	0,716	0,381	0,742	0,323	0,786
17	0,435+	0,768	0,384	0,783	0,364	0,825−
18	0,473	0,792	0,424	0,808	0,365−	0,838
19	0,527	0,803	0,463	0,830	0,403	0,863
20	0,565−	0,860	0,537	0,858	0,449	0,888

Продолжение табл. А.3

r	90%		95%		99%		r	90%		95%		99%	
	$n = 27$							$n = 28$					
21	0,635−	0,906	0,585+	0,899	0,539	0,930	21	0,604	0,861	0,576	0,894	0,500	0,911
22	0,673	0,907	0,636	0,924	0,581	0,950	22	0,645+	0,910	0,616	0,902	0,551	0,932
23	0,709	0,934	0,684	0,948	0,616	0,968	23	0,688	0,911	0,643	0,927	0,592	0,952
24	0,761	0,958	0,730	0,969	0,668	0,983	24	0,716	0,936	0,693	0,950	0,635+	0,969
25	0,796	0,980	0,777	0,987	0,703	0,994	25	0,768	0,960	0,741	0,970	0,677	0,984
26	0,854	0,996	0,825+	0,998	0,775+	1,000	26	0,799	0,981	0,783	0,987	0,727	0,995−
27	0,907	1	0,890	1	0,834	1	27	0,860	0,993	0,830	0,998	0,782	1,000
							28	0,910	1	0,894	1	0,838	1
	$n = 29$							$n = 30$					
0	0	0,087	0	0,103	0	0,160	0	0	0,084	0	0,100	0	0,152
1	0,004	0,135−	0,002	0,166	0,000	0,211	1	0,004	0,130	0,002	0,163	0,000	0,206
2	0,018	0,190	0,012	0,211	0,005+	0,263	2	0,018	0,183	0,012	0,205+	0,005+	0,253
3	0,039	0,225−	0,029	0,251	0,015+	0,316	3	0,037	0,219	0,028	0,244	0,015−	0,310
4	0,062	0,279	0,049	0,299	0,030	0,354	4	0,059	0,266	0,047	0,292	0,028	0,345−
5	0,086	0,303	0,070	0,340	0,046	0,397	5	0,083	0,295−	0,068	0,325−	0,045−	0,388
6	0,087	0,345−	0,094	0,374	0,065+	0,438	6	0,084	0,336	0,091	0,364	0,063	0,430
7	0,134	0,385+	0,103	0,413	0,086	0,477	7	0,129	0,376	0,100	0,403	0,083	0,463
8	0,135−	0,425−	0,136	0,451	0,108	0,523	8	0,130	0,416	0,131	0,440	0,104	0,505+
9	0,189	0,463	0,166	0,509	0,132	0,562	9	0,182	0,455+	0,163	0,476	0,127	0,538
10	0,190	0,500	0,184	0,549	0,157	0,603	10	0,183	0,492	0,175+	0,524	0,151	0,570
11	0,225−	0,537	0,211	0,587	0,165+	0,646	11	0,219	0,524	0,205+	0,560	0,152	0,612
12	0,276	0,575+	0,247	0,626	0,206	0,654	12	0,265−	0,554	0,236	0,597	0,198	0,655+
13	0,294	0,615−	0,251	0,660	0,211	0,684	13	0,266	0,584	0,244	0,636	0,206	0,671
14	0,308	0,655+	0,299	0,661	0,260	0,737	14	0,295−	0,624	0,292	0,675+	0,294	0,692
15	0,345−	0,697	0,339	0,701	0,263	0,740	15	0,336	0,664	0,324	0,676	0,256	0,744
16	0,385+	0,706	0,340	0,749	0,316	0,789	16	0,376	0,705+	0,325−	0,708	0,308	0,751
17	0,425−	0,724	0,374	0,753	0,345	0,794	17	0,416	0,734	0,364	0,756	0,329	0,794
18	0,463	0,775+	0,413	0,789	0,354	0,835−	18	0,446	0,735+	0,403	0,764	0,345−	0,802
19	0,500	0,810	0,451	0,816	0,397	0,843	19	0,476	0,781	0,440	0,795−	0,388	0,848
20	0,537	0,811	0,500	0,834	0,438	0,868	20	0,508	0,817	0,476	0,825−	0,430	0,849
21	0,575+	0,865+	0,549	0,864	0,477	0,892	21	0,545−	0,818	0,524	0,837	0,462	0,873
22	0,615−	0,866	0,587	0,897	0,523	0,914	22	0,584	0,870	0,560	0,869	0,495−	0,896
23	0,655+	0,913	0,626	0,906	0,562	0,935−	23	0,624	0,871	0,597	0,900	0,531	0,917
24	0,697	0,914	0,660	0,930	0,603	0,954	24	0,664	0,916	0,636	0,909	0,570	0,937
25	0,721	0,938	0,701	0,951	0,646	0,970	25	0,705+	0,917	0,675+	0,932	0,612	0,955+
26	0,775+	0,961	0,749	0,971	0,684	0,985−	26	0,734	0,941	0,708	0,953	0,655+	0,972
27	0,810	0,982	0,789	0,988	0,737	0,995−	27	0,781	0,963	0,756	0,972	0,690	0,985+
28	0,865+	0,996	0,834	0,998	0,789	1,000	28	0,817	0,982	0,795−	0,988	0,744	0,995−
29	0,913	1	0,897	1	0,840	1	29	0,870	0,996	0,837	0,998	0,794	1,000
							30	0,916	1	0,900	1	0,848	1

Таблица А.4

Интегральный закон нормального распределения

Доля общей площади под кривой плотности нормального распределения, соответствующая изменению переменной X от $-\infty$ до $\dfrac{X_i - \bar{X}}{\sigma'}$ (X_i — требуемое значение переменной X)

Grant E. L.. Statistical Quality Control, 3d ed., 1964, McGraw-Hill.

$\dfrac{X_i - \bar{X}'}{\sigma'}$	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
−3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
−3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00033	0,00034
−3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
−3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
−3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
−3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
−2,9	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0017	0,0018	0,0019
−2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
−2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
−2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
−2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
−2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
−2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
−2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
−2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
−2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
−1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
−1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
−1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
−1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
−1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
−1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
−1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
−1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1057	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
−1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
−1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
−0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
−0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
−0,7	0,2148	0,2177	0,2207	0,2236	0,2266	0,2297	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
−0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
−0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
−0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
−0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
−0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
−0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
−0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

Продолжение табл. А.4

$\frac{X_i - \overline{X'}}{\sigma'}$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	[illegible]	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Таблица А.5

Верхние ($+t_\alpha$) и нижние ($-t_\alpha$) процентили t-распределения Стьюдента

Для получения нижних процентилей перед табличными значениями следует поставить отрицательный знак

Fisher, Yates, Statistical Tables, Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh and London; Dixon W. J., Massey F. J., Jr., 1957, McGraw-Hill.

Число степеней свободы	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576
Число степеней свободы	$-t_{0,40}$	$-t_{0,30}$	$-t_{0,20}$	$-t_{0,10}$	$-t_{0,05}$	$-t_{0,025}$	$-t_{0,01}$	$-t_{0,005}$

Таблица А.6

Процентили χ^2-распределения

Dixon W. J., Massey F. J., Jr., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed., 1957, McGraw-Hill.

Число степеней свободы	Проценты									
	0,5	1	2,5	5	10	90	95	97,5	99	99,5
1	0,00039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,64

Для большого числа степеней свободы можно использовать приближенную формулу $\chi^2_\alpha \approx n\left(1-\frac{2}{9n}+z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9n}}\right)^3$, где z_α — процентиль нормального распределения, n — число степеней свободы. Например, $\chi^2_{0,99}=60\,[1-0{,}00370+2{,}326\,(0{,}06086)]^3=60\,(1{,}1379)^3=88{,}4$ при $\alpha=99\%$, $n=60$.

Таблица А.7

Процентили F-распределения с числом степеней свободы ν_1 для числителя и ν_2 — для знаменателя

Dixon W. J., Massey F. J., Jr., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed., 1957, McGraw-Hill.

ν_2	Вероятность \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Вероятность
1	0,0005	$0,0^{6}62$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}38$	$0,0^{2}94$	0,016	0,022	0,027	0,032	0,036	0,039	0,042	0,045	0,0005
	0,001	$0,0^{5}25$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}60$	0,013	0,021	0,028	0,034	0,039	0,044	0,048	0,051	0,054	0,001
	0,005	$0,0^{4}62$	$0,0^{2}51$	0,018	0,032	0,044	0,054	0,062	0,068	0,073	0,078	0,082	0,085	0,005
	0,010	$0,0^{3}25$	0,010	0,029	0,047	0,062	0,073	0,082	0,089	0,095	0,100	0,104	0,107	0,010
	0,025	$0,0^{2}15$	0,026	0,057	0,082	0,100	0,113	0,124	0,132	0,139	0,144	0,149	0,153	0,025
	0,05	$0,0^{2}62$	0,054	0,099	0,130	0,151	0,167	0,179	0,188	0,195	0,201	0,207	0,211	0,05
	0,10	0,025	0,117	0,181	0,220	0,246	0,265	0,279	0,289	0,298	0,304	0,310	0,315	0,10
	0,25	0,172	0,389	0,494	0,553	0,591	0,617	0,637	0,650	0,661	0,670	0,680	0,684	0,25
	0,50	1,00	1,50	1,71	1,82	1,89	1,94	1,98	2,00	2,03	2,04	2,05	2,07	0,50
	0,75	5,83	7,50	8,20	8,58	8,82	8,98	9,10	9,19	9,26	9,32	9,36	9,41	0,75
	0,90	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,5	60,7	0,90
	0,95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	0,95
	0,975	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	973	977	0,975
	0,99	405^{1}	500^{2}	540^{1}	562^{1}	576^{1}	586^{1}	593^{1}	598^{1}	602^{1}	606^{1}	608^{1}	611^{1}	0,99
	0,995	162^{2}	200^{2}	216^{2}	225^{2}	231^{2}	234^{2}	237^{2}	239^{2}	241^{2}	242^{2}	243^{2}	244^{2}	0,995
	0,999	406^{3}	500^{3}	540^{3}	562^{3}	576^{3}	586^{3}	593^{3}	598^{3}	602^{3}	606^{3}	609^{3}	611^{3}	0,999
	0,9995	162^{4}	200^{4}	216^{4}	225^{4}	231^{4}	234^{4}	237^{4}	239^{4}	241^{4}	242^{4}	243^{4}	244^{4}	0,9995
2	0,0005	$0,0^{6}50$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}42$	0,011	0,020	0,029	0,037	0,044	0,050	0,056	0,061	0,065	0,0005
	0,001	$0,0^{5}20$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}68$	0,016	0,027	0,037	0,046	0,054	0,061	0,067	0,072	0,077	0,001
	0,005	$0,0^{4}50$	$0,0^{2}50$	0,020	0,038	0,055	0,069	0,081	0,091	0,099	0,106	0,112	0,118	0,005
	0,01	$0,0^{3}20$	0,010	0,032	0,056	0,075	0,092	0,105	0,116	0,125	0,132	0,139	0,144	0,01
	0,025	$0,0^{2}13$	0,026	0,062	0,094	0,119	0,138	0,153	0,165	0,175	0,183	0,190	0,196	0,025
	0,05	$0,0^{2}50$	0,053	0,105	0,144	0,173	0,194	0,211	0,224	0,235	0,244	0,251	0,257	0,05
	0,10	0,020	0,111	0,183	0,231	0,265	0,289	0,307	0,321	0,333	0,342	0,350	0,356	0,10
	0,25	0,133	0,333	0,439	0,500	0,540	0,568	0,588	0,604	0,616	0,626	0,633	0,641	0,25
	0,50	0,667	1,00	1,13	1,21	1,25	1,28	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	0,50
	0,75	2,57	3,00	3,15	3,23	3,28	3,31	3,34	3,35	3,37	3,38	3,39	3,39	0,75
	0,90	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41	0,90
	0,95	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	0,95
	0,975	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	0,975
	0,99	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	0,99
	0,995	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	0,995
	0,999	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	0,999
	0,9995	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	0,9995
3	0,0005	$0,0^{6}46$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}44$	0,012	0,023	0,033	0,043	0,052	0,060	0,067	0,074	0,079	0,0005
	0,001	$0,0^{5}19$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}71$	0,018	0,030	0,042	0,053	0,063	0,072	0,079	0,086	0,093	0,001
	0,005	$0,0^{4}46$	$0,0^{2}50$	0,021	0,041	0,060	0,077	0,092	0,104	0,115	0,124	0,132	0,138	0,005
	0,01	$0,0^{3}19$	0,010	0,034	0,060	0,083	0,102	0,118	0,132	0,143	0,153	0,161	0,168	0,01
	0,025	$0,0^{2}12$	0,026	0,065	0,100	0,129	0,152	0,170	0,185	0,197	0,207	0,216	0,224	0,025
	0,05	$0,0^{2}46$	0,052	0,108	0,152	0,185	0,210	0,230	0,246	0,259	0,270	0,279	0,287	0,05
	0,10	0,019	0,109	0,185	0,239	0,276	0,304	0,325	0,342	0,356	0,367	0,376	0,384	0,10
	0,25	0,122	0,317	0,424	0,489	0,531	0,561	0,582	0,600	0,613	0,624	0,633	0,641	0,25
	0,50	0,585	0,881	1,00	1,06	1,10	1,13	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	0,50
	0,75	2,02	2,28	2,36	2,39	2,41	2,42	2,43	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45	0,75
	0,90	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22	0,90
	0,95	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	0,95
	0,975	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,4	14,3	0,975
	0,99	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1	0,99
	0,995	55,6	49,8	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,1	43,9	43,7	43,5	43,4	0,995
	0,999	167	149	141	137	135	133	132	131	130	129	129	128	0,999
	0,9995	266	237	225	218	214	211	209	208	207	206	204	204	0,9995

Вероятность \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Вероятность	ν_2
0,0005	0,051	0,058	0,062	0,066	0,069	0,072	0,074	0,077	0,078	0,080	0,081	0,083	0,0005	1
0,001	0,060	0,067	0,071	0,075	0,079	0,082	0,084	0,087	0,088	0,089	0,091	0,092	0,001	
0,005	0,093	0,101	0,105	0,109	0,113	0,116	0,118	0,121	0,122	0,124	0,126	0,127	0,005	
0,01	0,115	0,124	0,128	0,132	0,137	0,139	0,141	0,145	0,146	0,148	0,150	0,151	0,01	
0,025	0,161	0,170	0,175	0,180	0,184	0,187	0,189	0,193	0,194	0,196	0,198	0,199	0,025	
0,05	0,220	0,230	0,235	0,240	0,245	0,248	0,250	0,254	0,255	0,257	0,259	0,261	0,05	
0,10	0,325	0,336	0,342	0,247	0,353	0,356	0,358	0,362	0,364	0,366	0,368	0,370	0,10	
0,25	0,698	0,712	0,719	0,727	0,734	0,738	0,741	0,747	0,749	0,752	0,754	0,756	0,25	
0,50	2,09	2,12	2,13	2,15	2,16	2,17	2,17	2,18	2,18	2,19	2,19	2,20	0,50	
0,75	9,49	9,58	9,63	9,67	9,71	9,74	9,76	9,78	9,80	9,82	9,84	9,85	0,75	
0,90	61,2	61,7	62,0	62,3	62,5	62,7	62,8	63,0	63,1	63,2	63,3	63,3	0,90	
0,95	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	0,95	
0,975	985	993	997	100^{1}	101^{1}	101^{1}	101^{1}	101^{1}	101^{1}	102^{1}	102^{1}	102^{1}	0,975	
0,99	616^{1}	621^{1}	623^{1}	626^{1}	629^{1}	630^{1}	631^{1}	633^{1}	634^{1}	635^{1}	636^{1}	637^{1}	0,99	
0,995	246^{2}	248^{2}	249^{2}	250^{2}	251^{2}	252^{2}	253^{2}	253^{2}	254^{2}	254^{2}	254^{2}	255^{2}	0,995	
0,999	616^{3}	621^{3}	623^{3}	626^{3}	629^{3}	630^{3}	631^{3}	633^{3}	634^{3}	635^{3}	626^{3}	637^{3}	0,999	
0,9995	246^{4}	248^{4}	249^{4}	250^{4}	251^{4}	252^{4}	252^{4}	253^{4}	253^{4}	253^{4}	254^{4}	254^{4}	0,9995	
0,0005	0,076	0,088	0,094	0,101	0,108	0,113	0,116	0,122	0,124	0,127	0,130	0,132	0,0005	2
0,001	0,088	0,100	0,107	0,114	0,121	0,126	0,129	0,135	0,137	0,140	0,143	0,145	0,001	
0,005	0,130	0,143	0,150	0,157	0,165	0,169	0,173	0,179	0,181	0,184	0,187	0,189	0,005	
0,01	0,157	0,171	0,178	0,186	0,193	0,198	0,201	0,207	0,209	0,212	0,215	0,217	0,01	
0,025	0,210	0,224	0,232	0,239	0,247	0,251	0,255	0,261	0,263	0,266	0,269	0,271	0,025	
0,05	0,272	0,286	0,294	0,302	0,309	0,314	0,317	0,324	0,326	0,329	0,332	0,334	0,05	
0,10	0,371	0,386	0,394	0,402	0,410	0,415	0,418	0,424	0,426	0,429	0,433	0,434	0,10	
0,25	0,657	0,672	0,680	0,689	0,697	0,702	0,705	0,711	0,713	0,716	0,719	0,721	0,25	
0,50	1,38	1,39	1,40	1,41	1,42	1,42	1,43	1,43	1,43	1,44	1,44	1,44	0,50	
0,75	3,41	3,43	3,43	3,44	3,45	3,45	3,46	3,47	3,47	3,48	3,48	3,48	0,75	
0,90	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,47	9,48	9,48	9,49	9,49	9,49	0,90	
0,95	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	0,95	
0,975	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	0,975	
0,99	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	0,99	
0,995	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200	0,995	
0,999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	990	0,999	
0,9995	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	0,9995	
0,0005	0,093	0,109	0,117	0,127	0,136	0,143	0,147	0,156	0,158	0,162	0,166	0,169	0,0005	3
0,001	0,107	0,123	0,132	0,142	0,152	0,158	0,162	0,171	0,173	0,177	0,181	0,184	0,001	
0,005	0,154	0,172	0,181	0,191	0,201	0,207	0,211	0,220	0,222	0,227	0,231	0,234	0,005	
0,01	0,185	0,203	0,212	0,222	0,232	0,238	0,242	0,251	0,253	0,258	0,262	0,264	0,01	
0,025	0,241	0,259	0,269	0,279	0,289	0,295	0,299	0,308	0,310	0,314	0,318	0,321	0,025	
0,05	0,304	0,323	0,332	0,342	0,352	0,358	0,363	0,370	0,373	0,377	0,382	0,384	0,05	
0,10	0,402	0,420	0,430	0,439	0,449	0,455	0,459	0,467	0,469	0,474	0,476	0,480	0,10	
0,25	0,658	0,675	0,684	0,693	0,702	0,708	0,711	0,719	0,721	0,724	0,728	0,730	0,25	
0,50	1,21	1,23	1,23	1,24	1,25	1,25	1,25	1,26	1,26	1,26	1,27	1,27	0,50	
0,75	2,46	2,46	2,46	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	0,75	
0,90	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,15	5,14	5,14	5,14	5,14	5,13	0,90	
0,95	8,70	8,66	8,63	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55	8,55	8,54	8,53	8,53	0,95	
0,975	14,3	14,2	14,1	14,1	14,0	14,0	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9	13,9	0,975	
0,99	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,2	26,1	26,1	0,99	
0,995	43,1	42,8	42,6	42,5	42,3	42,2	42,1	42,0	42,0	41,9	41,9	41,8	0,995	
0,999	127	126	126	125	125	125	124	124	124	124	124	123	0,999	
0,9995	203	201	200	199	199	198	198	197	197	197	196	196	0,9995	

Продолжение табл. А.7

ν_2	Вероятность \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Вероятность
4	0,0005	$0{,}0^{6}44$	$0{,}0^{3}50$	$0{,}0^{2}46$	0,013	0,024	0,036	0,047	0,057	0,066	0,075	0,082	0,089	0,0005
	0,001	$0{,}0^{5}18$	$0{,}0^{2}10$	$0{,}0^{2}73$	0,019	0,032	0,046	0,058	0,069	0,079	0,089	0,097	0,104	0,001
	0,005	$0{,}0^{4}44$	$0{,}0^{2}50$	0,022	0,043	0,064	0,083	0,100	0,114	0,126	0,137	0,145	0,153	0,005
	0,01	$0{,}0^{3}18$	0,010	0,035	0,063	0,088	0,103	0,127	0,143	0,156	0,167	0,176	0,185	0,01
	0,025	$0{,}0^{2}11$	0,026	0,066	0,104	0,135	0,161	0,181	0,198	0,212	0,224	0,234	0,243	0,025
	0,05	$0{,}0^{2}44$	0,052	0,110	0,157	0,193	0,221	0,243	0,261	0,275	0,288	0,298	0,307	0,05
	0,10	0,018	0,108	0,187	0,243	0,284	0,314	0,338	0,356	0,371	0,384	0,394	0,403	0,10
	0,25	0,117	0,309	0,418	0,484	0,528	0,560	0,583	0,601	0,615	0,627	0,637	0,645	0,25
	0,50	0,549	0,828	0,941	1,00	1,04	1,06	1,08	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	0,50
	0,75	1,81	2,00	2,05	2,06	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	0,75
	0,90	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90	0,90
	0,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	0,95
	0,975	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,79	8,75	0,975
	0,99	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,4	0,99
	0,995	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,1	21,0	20,8	20,7	0,995
	0,999	74,1	61,2	56,2	53,4	51,7	50,5	49,7	49,0	48,5	48,0	47,7	47,4	0,999
	0,9995	106	87,4	80,1	76,1	73,6	71,9	70,6	69,7	68,9	68,3	67,8	67,4	0,9995
5	0,0005	$0{,}0^{6}43$	$0{,}0^{3}50$	$0{,}0^{2}47$	0,014	0,025	0,038	0,050	0,061	0,070	0,081	0,089	0,096	0,0005
	0,001	$0{,}0^{5}17$	$0{,}0^{2}10$	$0{,}0^{2}75$	0,019	0,034	0,048	0,062	0,074	0,085	0,095	0,104	0,112	0,001
	0,005	$0{,}0^{4}43$	$0{,}0^{2}50$	0,022	0,045	0,067	0,087	0,105	0,120	0,134	0,146	0,156	0,165	0,005
	0,01	$0{,}0^{3}17$	0,010	0,035	0,064	0,091	0,114	0,134	0,151	0,165	0,177	0,188	0,197	0,01
	0,025	$0{,}0^{2}11$	0,025	0,067	0,107	0,140	0,167	0,189	0,208	0,223	0,236	0,248	0,257	0,025
	0,05	$0{,}0^{2}43$	0,052	0,111	0,160	0,198	0,228	0,252	0,271	0,287	0,301	0,313	0,322	0,05
	0,10	0,017	0,108	0,188	0,247	0,290	0,322	0,347	0,367	0,383	0,397	0,408	0,418	0,10
	0,25	0,113	0,305	0,415	0,483	0,528	0,560	0,584	0,604	0,618	0,631	0,641	0,650	0,25
	0,50	0,528	0,799	0,907	0,965	1,00	1,02	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	0,50
	0,75	1,69	1,85	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	0,75
	0,90	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27	0,90
	0,95	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	0,95
	0,975	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,57	6,52	0,975
	0,99	16,3	13,3	12,4	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89	0,99
	0,995	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8	13,6	13,5	13,4	0,995
	0,999	47,2	37,1	33,2	31,1	29,7	28,8	28,2	27,6	27,2	26,9	26,6	26,4	0,999
	0,9995	63,6	49,8	44,4	41,5	39,7	38,5	37.6	36,9	36,4	35,9	35,6	35,2	0,9995
6	0,0005	$0{,}0^{6}43$	$0{,}0^{3}50$	$0{,}0^{2}47$	0,014	0,026	0,039	0,052	0,064	0,075	0,085	0,094	0,103	0,0005
	0,001	$0{,}0^{5}17$	$0{,}0^{2}10$	$0{,}0^{2}75$	0,020	0,035	0,050	0,064	0,078	0,090	0,101	0,111	0,119	0,001
	0,005	$0{,}0^{4}43$	$0{,}0^{2}50$	0,022	0,045	0,069	0,090	0,109	0,126	0,140	0,153	0,164	0,174	0,005
	0,01	$0{,}0^{3}17$	0,010	0,036	0,066	0,094	0,118	0,139	0,157	0,172	0,186	0,197	0,207	0,01
	0,025	$0{,}0^{2}11$	0,025	0,068	0,109	0,143	0,172	0,195	0,215	0,231	0,246	0,258	0,268	0,025
	0,05	$0{,}0^{2}43$	0,052	0,112	0,162	0,202	0,233	0,259	0,279	0,296	0,311	0,324	0,334	0,05
	0,10	0,017	0,107	0,189	0,249	0,294	0,327	0,354	0,375	0,392	0,406	0,418	0,429	0,10
	0,25	0,111	0,302	0,413	0,481	0,524	0,561	0,586	0,606	0,622	0,635	0,645	0,654	0,25
	0,50	0,515	0,780	0,886	0,942	0,977	1,00	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	0,50
	0,75	1,62	1,76	1,78	1,79	1,79	1,78	1,78	1,76	1,77	1,77	1,77	1,77	0,75
	0,90	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90	0,90
	0,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	0,95
	0,975	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,41	5,37	0,975
	0,99	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	0,99
	0,995	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4	10,2	10,1	10,0	0,995
	0,999	35,5	27,0	23,7	21,9	20,8	20,0	19,5	19,0	18,7	18,4	18,2	18,0	0,999
	0,9995	46,1	34,8	30,4	28,1	26,6	25,6	24,9	24,3	23,9	23,5	23,2	23,0	0,9995

Вероятность \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Вероятность	ν_2
0,0005	0,105	0,125	0,135	0,147	0,159	0,166	0,172	0,183	0,186	0,191	0,196	0,200	0,0005	4
0,001	0,121	0,141	0,152	0,163	0,176	0,183	0,188	0,200	0,202	0,208	0,213	0,217	0,001	
0,005	0,172	0,193	0,204	0,216	0,229	0,237	0,242	0,253	0,255	0,260	0,266	0,269	0,005	
0,01	0,204	0,226	0,237	0,249	0,261	0,269	0,274	0,285	0,287	0,293	0,298	0,301	0,01	
0,025	0,263	0,284	0,296	0,308	0,320	0,327	0,332	0,342	0,346	0,351	0,356	0,359	0,025	
0,05	0,327	0,349	0,360	0,372	0,384	0,391	0,396	0,407	0,409	0,413	0,418	0,422	0,05	
0,10	0,424	0,445	0,456	0,467	0,478	0,485	0,490	0,500	0,502	0,508	0,510	0,514	0,10	
0,25	0,664	0,683	0,692	0,702	0,712	0,718	0,722	0,731	0,733	0,737	0,740	0,743	0,25	
0,50	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,18	1,18	1,18	1,19	1,19	1,19	0,50	
0,75	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	0,75	
0,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,80	3,79	3,78	3,78	3,77	3,76	3,76	0,90	
0,95	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66	5,66	5,65	5,64	5,63	0,95	
0,975	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,38	8,36	8,32	8,31	8,29	8,27	8,26	0,975	
0,99	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5	0,99	
0,995	20,4	20,2	20,0	19,9	19,8	19,7	19,6	19,5	19,5	19,4	19,4	19,3	0,995	
0,999	46,8	46,1	45,8	45,4	45,1	44,9	44,7	44,5	44,4	44,3	44,1	44,0	0,999	
0.9995	66,5	65,5	65,1	64,6	64,1	63,8	63,6	63,2	63,1	62,9	62,7	62,6	0,9995	
0,0005	0,115	0,137	0,150	0,163	0,177	0,186	0,192	0,205	0,209	0,216	0,222	0,226	0,0005	5
0,001	0,132	0,155	0,167	0,181	0,195	0,204	0,210	0,223	0,227	0,233	0,239	0,244	0,001	
0,005	0,186	0,210	0,223	0,237	0,251	0,260	0,266	0,279	0,282	0,288	0,294	0,299	0,005	
0,01	0,219	0,244	0,257	0,270	0,285	0,293	0,299	0,312	0,315	0,322	0,328	0,331	0,01	
0,025	0,280	0,304	0,317	0,330	0,344	0,353	0,359	0,370	0,374	0,380	0,386	0,390	0,025	
0,05	0,345	0,369	0,382	0,395	0,408	0,417	0,422	0,432	0,437	0,442	0,448	0,452	0,05	
0,10	0,440	0,463	0,476	0,488	0,501	0,508	0,514	0,524	0,527	0,532	0,538	0,541	0,10	
0,25	0,669	0,690	0,700	0,711	0,722	0,728	0,732	0,741	0,743	0,748	0,752	0,755	0,25	
0,50	1,10	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14	1,15	1,15	1,15	0,50	
0,75	1,89	1,88	1,88	1,88	1,88	1,88	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	0,75	
0,90	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,12	3,12	3,11	3,10	0,90	
0,95	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41	4,40	4,39	4,37	4,36	0,95	
0,975	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,14	6,12	6,08	6,07	6,05	6,03	6,02	0,975	
0,99	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13	9,11	9,08	9,04	9,02	0,99	
0,995	13,1	12,9	12,8	12,7	12,5	12,5	12,4	12,3	12,3	12,2	12,2	12,1	0,995	
0,999	25,0	25,4	25,1	24,9	24,6	24,4	24,3	24,1	24,1	23,9	23,8	23,8	0,999	
0,9995	34,6	33,9	33,5	33,1	32,7	32,5	[illegible]	32,1	32,0	31,8	31,7	31,6	0,9995	
0,0005	0,123	0,148	0,162	0,177	0,193	0,203	0,210	0,225	0,229	0,236	0,244	0,249	0,0005	6
0,001	0,141	0,166	0,180	0,195	0,211	0,222	0,229	0,243	0,247	0,255	0,262	0,267	0,001	
0,005	0,197	0,224	0,238	0,253	0,269	0,279	0,286	0,301	0,304	0,312	0,318	0,324	0,005	
0,01	0,232	0,258	0,273	0,288	0,304	0,313	0,321	0,334	0,338	0,346	0,352	0,357	0,01	
0,025	0,293	0,320	0,334	0,349	0,364	0,375	0,381	0,394	0,398	0,405	0,412	0,415	0,025	
0,05	0,358	0,385	0,399	0,413	0,428	0,437	0,444	0,457	0,460	0,467	0,472	0,476	0,05	
0,10	0,453	0,478	0,491	0,505	0,519	0,526	0,533	0,546	0,548	0,556	0,559	0,564	0,10	
0,25	0,675	0,696	0,707	0,718	0,729	0,736	0,741	0,751	0,753	0,758	0,762	0,765	0,25	
0,50	1,07	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12	1,12	1,12	0,50	
0,75	1,76	1,76	1,75	1,75	1,75	1,75	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	0,75	
0,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,73	2,72	0,90	
0,95	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71	3,70	3,69	3,68	3,67	0,95	
0,975	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,98	4,96	4,92	4,90	4,88	4,86	4,85	0,975	
0,99	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,06	6,99	6,97	6,93	6,90	6,88	0,99	
0,995	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,17	9,12	9,03	9,00	8,95	8,91	8,88	0,995	
0,999	17,6	17,1	16,9	16,7	16,4	16,3	16,2	16,0	16,0	15,9	15,8	15,7	0,999	
0,9995	22,4	21,9	21,7	21,4	21,1	20,9	20,7	20,5	20,4	20,3	20,2	20,1	0,9995	

Продолжение табл. А.7

ν_2	ν_1 / Вероятность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Вероятность
7	0,0005	$0,0^{6}42$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}48$	0,014	0,027	0,040	0,053	0,066	0,078	0,088	0,099	0,108	0,0005
	0,001	$0,0^{5}17$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}76$	0,020	0,035	0,051	0,067	0,081	0,093	0,105	0,115	0,125	0,001
	0,005	$0,0^{4}42$	$0,0^{2}50$	0,023	0,046	0,070	0,093	0,113	0,130	0,145	0,159	0,171	0,181	0,005
	0,01	$0,0^{3}17$	0,010	0,036	0,067	0,096	0,121	0,143	0,162	0,178	0,192	0,205	0,216	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,068	0,110	0,146	0,176	0,200	0,221	0,238	0.253	0,266	0,277	0,025
	0,05	$0,0^{2}42$	0,052	0,113	0,164	0,205	0,238	0,264	0,286	0,304	0,319	0,332	0,343	0,05
	0,10	0,017	0,107	0,190	0,251	0,297	0,332	0,359	0,381	0,399	0,414	0,427	0,438	0,10
	0,25	0.110	0,300	0,412	0,481	0,528	0,562	0,588	0,608	0.624	0,637	0,649	0,658	0,25
	0,50	0,506	0,767	0,871	0,926	0,960	0,983	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,04	0,50
	0,75	1,57	1,70	1,72	1,72	1,71	1,71	1,70	1,70	1,69	1,69	1,69	1,68	0,75
	0,90	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2.83	2,78	2,75	2,72	2,70	2.68	2,67	0,90
	0,95	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3.57	0,95
	0,975	8,07	6,54	5,89	5,52	5.29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,71	4,67	0,975
	0,99	12,2	9,55	8.45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	0,99
	0,995	16,2	12.4	10,9	10,0	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	8,27	8,18	0 995
	0,999	29,2	21,7	18,8	17,2	16,2	15,5	15,0	14,6	14,3	14,1	13,9	13,7	0,999
	0,9995	37,0	27,2	23,5	21,4	20,2	19.3	18,7	18,2	17,8	17,5	17,2	17,0	0,9995
8	0,0005	$0,0^{5}42$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}48$	0,014	0,027	0,041	0,055	0,068	0,081	0,092	0,102	0,112	0,0005
	0,001	$0,0^{5}17$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}76$	0,020	0,036	0,053	0,068	0,083	0,096	0,109	0,120	0,130	0,001
	0,005	$0,0^{4}42$	$0,0^{2}50$	0,027	0,047	0,072	0,095	0,115	0,133	0,149	0,164	0,176	0,187	0,005
	0,01	$0,0^{3}17$	0,010	0.036	0,068	0,097	0,123	0,146	0,166	0,183	0,198	0,211	0,222	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,069	0,111	0,148	0,179	0,204	0,226	0,244	0,259	0,273	0,285	0,025
	0,05	$0,0^{2}42$	0,052	0,113	0,166	0,208	0,241	0,268	0,291	0,310	0,326	0,339	0,351	0,05
	0,10	0,017	0,107	0,190	0,253	0,299	0,335	0,363	0,386	0,405	0,421	0,435	0,445	0,10
	0,25	0,109	0,298	0,411	0,481	0,529	0,563	0,589	0,610	0,627	0,640	0,654	0,661	0,25
	0,50	0,499	0,757	0,860	0,915	0,948	0,971	0,988	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03	0,50
	0,75	1,54	1,66	1,67	1,66	1,66	1,65	1,64	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62	0,75
	0,90	3,46	3,11	2.92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50	0,90
	0,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3.31	3,28	0,95
	0,975	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,24	4,20	0,975
	0,99	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5.73	5,67	0,99
	0,995	14,7	11,0	9,60	8,81	8,30	7,95	7.69	7,50	7,34	7,21	7,10	7,01	0,995
	0,999	25,4	18,5	15,8	14,4	13,5	12,9	12,4	12,0	11,8	11,5	11,4	11,2	0,999
	0,9995	31,6	22,8	19,4	17,6	16,4	15,7	15,1	14,6	14,3	14,0	13,8	13,6	0,9995
9	0,005	$0,0^{6}41$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}48$	0,015	0,027	0,042	0,056	0,070	0,083	0,094	0,105	0,115	0,0005
	0,001	$0,0^{5}17$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}77$	0,021	0,037	0,054	0,070	0,085	0,099	0,112	0,123	0,134	0,001
	0,005	$0,0^{4}42$	$0,0^{2}50$	0,023	0,047	0,073	0,096	0,117	0,136	0,153	0,168	0,181	0,192	0,005
	0.01	$0,0^{3}17$	0,010	0,037	0,068	0 098	0,125	0,149	0,169	0,187	0,202	0,216	0,228	0,01
	0 025	$0,0^{2}10$	0,025	0,069	0,112	0,150	0,181	0,207	0,230	0,248	0,265	0,279	0,291	0,025
	0,05	$0,0^{2}40$	0,052	0,113	0,167	0,210	0,244	0,272	0,296	0,315	0,331	0,345	0,358	0,05
	0,10	0,017	0,107	0,191	0,254	0,302	0,338	0,367	0,390	0,410	0,426	0,441	0,452	0,10
	0,25	0,108	0,297	0,410	0,480	0,529	0,564	0,591	0,612	0,629	0,643	0,654	0,664	0,25
	0,50	0,494	0,749	0,852	0,906	0,939	0,962	0,978	0,990	1,00	1,01	1,01	1,02	0,50
	0,75	1,51	1,62	1,63	1,63	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58	0,75
	0,90	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38	0,90
	0,95	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	0,95
	0,975	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,91	3,87	0,975
	0,99	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5.11	0,99
	0,995	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,31	6,23	0,995
	0,999	22,9	16,4	13,9	12,6	11,7	11,1	10,7	10,4	10,1	9,89	9,71	9,57	0,999
	0,9995	28,0	19,9	16.8	15,1	14,1	13,3	12,8	12,4	12,1	11,8	11,6	11,4	0,9995

ν_1 / Вероятность	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Вероятность	ν_2
0,0005	0,130	0,157	0,172	0,188	0,206	0,217	0,225	0,242	0,246	0,255	0,263	0,268	0,0005	7
0,001	0,148	0,176	0,191	0,208	0,225	0,237	0,245	0,261	0,266	0,274	0,282	0,288	0,001	
0,005	0,206	0,235	0,251	0,267	0,285	0,296	0,304	0,319	0,324	0,332	0,340	0,345	0,005	
0,01	0,241	0,270	0,286	0,303	0,320	0,331	0,339	0,355	0,358	0,366	0,373	0,379	0,01	
0,025	0,304	0,333	0,348	0,364	0,381	0,392	0,399	0,413	0,418	0,426	0,433	0,437	0,025	
0,05	0,369	0,398	0,413	0,428	0,445	0,455	0,461	0,476	0,479	0,485	0,493	0,498	0,05	
0,10	0,463	0,491	0,504	0,519	0,534	0,543	0,550	0,562	0,566	0,571	0,578	0,582	0,10	
0 25	0,679	0,702	0,713	0,725	0,737	0,745	0.749	0,760	0,762	0,767	0,772	0,775	0,25	
0,50	1,05	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	0,50	
0,75	1,68	1,67	1,67	1,66	1,66	1,66	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	0,75	
0,90	2,63	2,59	2,56	2,50	2,54	2,52	2,51	2,50	2,49	2,48	2,48	2,47	0,90	
0,95	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27	3,27	3,25	3,24	3,23	0,95	
0,975	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,28	4,25	4,21	4,20	4,18	4,16	4,14	0,975	
0,99	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75	5,74	5,70	5,67	5,65	0,99	
0,995	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,35	7,31	7,22	7,19	7,15	7,10	7,08	0,995	
0,999	13,3	12,9	12,7	12,5	12,3	12,2	12,1	11,9	11,9	11,8	11,7	11,7	0,999	
0,9995	16,5	16,0	15,7	15,5	15,2	15,1	15,0	14,7	14,7	14.6	14,5	14,4	0,9995	
0,0005	0,136	0,164	0,181	0,198	0,218	0,230	0,239	0,257	0,262	0,271	0,281	0,287	0,0005	8
0,001	0,155	0,184	0,200	0,218	0,238	0,250	0,259	0,277	0,282	0,292	0,300	0.306	0,001	
0,005	0,214	0,244	0,261	0,279	0,299	0,311	0,319	0,337	0,341	0,351	0,358	0,364	0,005	
0,01	0,250	0,281	0,297	0,315	0,334	0,346	0,354	0,372	0,376	0,385	0,392	0,398	0,01	
0,025	0,313	0,343	0,360	0,377	0,395	0,407	0,415	0,431	0,435	0,442	0,450	0,456	0,025	
0,05	0,379	0,409	0,425	0,441	0,459	0,469	0,477	0,493	0,496	0.505	0,510	0,516	0,05	
0,10	0,472	0,500	0,515	0,531	0,547	0,556	0,563	0,578	0,581	0,588	0,595	0,599	0,10	
0,25	0,684	0,700	0,718	0,730	0,743	0,751	0,756	0,767	0,769	0,775	0,780	0,783	0,25	
0,50	1,04	1,05	1,06	1,07	1,07	1,07	1,08	1.08	1,08	1,09	1,09	1,09	0,50	
0,75	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,59	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	0,75	
0,90	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,35	2,34	2,32	2,32	2,31	2,30	2,29	0,90	
0,95	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97	2,97	2,95	2,94	2,93	0,95	
0,975	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,81	3,78	3,74	3,73	3,70	3,68	3,67	0,975	
0,99	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96	4,95	4,91	4,88	4,86	0,99	
0,995	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,22	6,18	6,09	6.06	6,02	5.98	5,95	0,995	
0,999	10,8	10,5	10,3	10,1	9,92	9,80	9,73	9,57	9,54	9,46	9,39	9,34	0,999	
0,9995	13,1	12,7	12,5	12,2	12,0	11,8	11,8	11,6	11,5	11,4	11,4	11,3	0,9995	
0,0005	0,141	0,171	0,188	0,207	0,228	0,242	0,251	0,270	0,276	0,287	0,297	0,303	0,0005	9
0,001	0,160	0,191	0,208	0,228	0,249	0,262	0,271	0,291	0,296	0,307	0,316	0,323	0,001	
0.005	0,220	0,253	0,271	0,290	0,310	0,324	0,332	0,351	0,356	0,366	0,376	0,382	0,005	
0,01	0,257	0,289	0,307	0,326	0,346	0,358	0,368	0,386	0,391	0,400	0,410	0,415	0,01	
0.025	0,320	0,352	0,370	0,388	0,408	0,420	0,428	0,446	0,450	0,459	0,467	0,473	0,025	
0,05	0,386	0,418	0,435	0,452	0,471	0,483	0,490	0,508	0,510	0,518	0,526	0,532	0,05	
0,10	0,479	0,509	0,525	0,541	0,558	0,568	0,575	0,588	0,594	0,602	0,610	0,613	0,10	
0,25	0,687	0,711	0,723	0,736	0,749	0,757	0,762	0,773	0,776	0,782	0,787	0,791	0,25	
0,50	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,07	1,08	1,08	1,08	0,50	
0,75	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54	1,54	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53	0,75	
0,90	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	0,90	
0,95	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76	2,75	2,73	2,72	2,71	0,95	
0,975	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,47	3,45	3,40	3,39	3,37	3,35	3,33	0,975	
0,99	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42	4,40	4,36	4,33	4,31	0,99	
0,995	6,03	5,83	5,73	5,62	5,52	5,45	5,41	5,32	5,30	5,26	5,21	5,19	0,995	
0,999	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,26	8,19	8,04	8,00	7,93	7,86	7,81	0,999	
0,9995	11,0	10,6	10,4	10,2	9,94	9,80	9,71	9,53	9,49	9,40	9,32	9,26	0,9995	

Продолжение табл. А.7

ν_2	ν_1 / Вероятность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Вероятность
10	0,0005	$0,0^{6}41$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}49$	0,015	0,028	0,043	0,057	0,071	0,085	0,097	0,108	0,119	0,0005
	0,001	$0,0^{5}17$	$0,0^{2}70$	$0,0^{2}77$	0,021	0,037	0,054	0,071	0,087	0,101	0,114	0,126	0,137	0,001
	0,005	$0,0^{4}41$	$0,0^{2}50$	0,023	0,048	0,073	0,098	0,119	0,139	0,156	0,171	0,185	0,197	0,005
	0,01	$0,0^{3}17$	0,010	0,037	0,069	0,100	0,127	0,151	0,172	0,190	0,206	0,220	0,233	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,069	0,113	0,151	0,183	0,210	0,233	0,252	0,269	0,283	0,296	0,025
	0,05	$0,0^{2}41$	0,052	0,114	0,168	0,211	0,246	0,275	0,299	0,319	0,336	0,351	0,363	0,05
	0,10	0,017	0,106	0,191	0,255	0,303	0,340	0,370	0,394	0,414	0,430	0,444	0,457	0,10
	0,25	0,107	0,296	0,409	0,480	0,529	0,565	0,592	0,613	0,631	0,645	0,657	0,667	0,25
	0,50	0,490	0,743	0,845	0,899	0,932	0,954	0,971	0,983	0,992	1,00	1,01	1,01	0,50
	0,75	1,49	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54	0,75
	0,90	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28	0,90
	0,95	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	3,91	0,95
	0,975	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,66	3,62	0,975
	0,99	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	0,99
	0,995	12,8	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,75	5,66	0,995
	0,999	21,0	14,9	12,6	11,3	10,5	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75	8,58	8,44	0,999
	0,9995	25,5	17,9	15,0	13,4	12,4	11,8	11,3	10,9	10,6	10,3	10,1	9,93	0,9995
11	0,0005	$0,0^{6}41$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}49$	0,015	0,028	0,043	0,058	0,072	0,086	0,099	0,111	0,121	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}78$	0,021	0,038	0,055	0,072	0,088	0,103	0,116	0,129	0,140	0,001
	0,005	$0,0^{4}40$	$0,0^{2}50$	0,023	0,048	0,074	0,099	0,121	0,141	0,158	0,174	0,188	0,200	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,037	0,069	0,100	0,128	0,153	0,175	0,193	0,210	0,224	0,237	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,069	0,114	0,152	0,185	0,212	0,236	0,256	0,273	0,288	0,301	0,025
	0,05	$0,0^{2}41$	0,052	0,114	0,168	0,212	0,248	0,278	0,302	0,323	0,340	0,355	0,368	0,05
	0,10	0,017	0,106	0,192	0,256	0,305	0,342	0,373	0,397	0,417	0,435	0,448	0,461	0,10
	0,25	0,107	0,295	0,408	0,481	0,529	0,565	0,592	0,614	0,633	0,645	0,658	0,667	0,25
	0,50	0,486	0,739	0,840	0,893	0,926	0,948	0,964	0,977	0,986	0,994	1,00	1,01	0,50
	0,75	1,47	1,58	1,58	1,57	1,56	1,55	1,54	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51	0,75
	0,90	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21	0,90
	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	0,95
	0,975	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,47	3,43	0,975
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	0,99
	0,995	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,32	5,24	0,995
	0,999	19,7	13,8	11,6	10,3	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,76	7,62	0,999
	0,9995	23,6	16,4	13,6	12,2	11,2	10,6	10,1	9,76	9,48	9,24	9,04	8,88	0,9995
12	0,0005	$0,0^{6}41$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}49$	0,015	0,029	0,044	0,058	0,073	0,087	0,101	0,113	0,124	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}78$	0,021	0,038	0,056	0,073	0,089	0,104	0,118	0,131	0,143	0,001
	0,005	$0,0^{4}39$	$0,0^{2}50$	0,023	0,048	0,075	0,100	0,122	0,143	0,161	0,177	0,191	0,204	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,037	0,070	0,101	0,130	0,155	0,176	0,196	0,212	0,227	0,241	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,070	0,114	0,153	0,186	0,214	0,238	0,259	0,276	0,292	0,305	0,025
	0,05	$0,0^{2}41$	0,052	0,114	0,169	0,214	0,250	0,280	0,305	0,325	0,343	0,358	0,372	0,05
	0,10	0,016	0,106	0,192	0,257	0,306	0,344	0,375	0,400	0,420	0,438	0,452	0,466	0,10
	0,25	0,106	0,295	0,408	0,480	0,530	0,566	0,594	0,616	0,633	0,649	0,662	0,671	0,25
	0,50	0,484	0,735	0,835	0,888	0,921	0,943	0,959	0,972	0,981	0,989	0,995	1,00	0,50
	0,75	1,46	1,56	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49	0,75
	0,90	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15	0,90
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	0,95
	0,975	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,32	3,28	0,975
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	0,99
	0,995	11,8	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,99	4,91	0,995
	0,999	18,6	13,0	10,8	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,14	7,01	0,999
	0,9995	22,2	15,3	12,7	11,2	10,4	9,74	9,28	8,94	8,66	8,43	8,24	8,08	0,9995

ν_1 / Вероятность	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Вероятность	ν_2
0,0005	0,145	0,177	0,195	0,215	0,238	0,251	0,262	0,282	0,288	0,299	0,311	0,319	0,0005	10
0,001	0,164	0,197	0,216	0,236	0,258	0,272	0,282	0,303	0,309	0,321	0,331	0,338	0,001	
0,005	0,226	0,260	0,279	0,299	0,321	0,334	0,344	0,365	0,370	0,380	0,391	0,397	0,005	
0,01	0,263	0,297	0,316	0,336	0,357	0,370	0,380	0,400	0,405	0,415	0,424	0,431	0,01	
0,025	0,327	0,360	0,379	0,398	0,419	0,431	0,441	0,459	0,464	0,474	0,483	0,488	0,025	
0,05	0,393	0,426	0,444	0,462	0,481	0,493	0,502	0,518	0,523	0,532	0,541	0,546	0,05	
0,10	0,486	0,516	0,532	0,549	0,567	0,578	0,586	0,602	0,605	0,614	0,621	0,625	0,10	
0,25	0,691	0,714	0,727	0,740	0,754	0,762	0,767	0,779	0,782	0,788	0,793	0,797	0,25	
0,50	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	1,06	1,07	1,07	1,07	0,50	
0,75	1,53	1,52	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49	1,49	1,49	1,48	1,48	0,75	
0,90	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,12	2,11	2,09	2,08	2,07	2,06	2,06	0,90	
0,95	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59	2,58	2,56	2,55	2,54	0,95	
0,975	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,22	3,20	3,15	3,14	3,12	3,09	3,08	0,975	
0,99	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01	4,00	3,96	3,93	3,91	0,99	
0,955	5,47	5,27	5,17	5,07	4,97	4,90	4,86	4,77	4,75	4,71	4,67	4,64	0,995	
0,999	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,19	7,12	6,98	6,94	6,87	6,81	6,76	0,999	
0,9995	9,56	9,16	8,96	8,75	8,54	8,42	8,33	8,16	8,12	8,04	7,96	7,90	0,9995	
0,0005	0,148	0,182	0,201	0,222	0,246	0,261	0,271	0,293	0,299	0,312	0,324	0,331	0,0005	11
0,001	0,168	0,202	0,222	0,243	0,266	0,282	0,292	0,313	0,320	0,332	0,343	0,353	0,001	
0,005	0,231	0,266	0,286	0,308	0,330	0,345	0,355	0,376	0,382	0,394	0,403	0,412	0,005	
0,01	0,268	0,304	0,324	0,344	0,366	0,380	0,391	0,412	0,417	0,427	0,439	0,444	0,01	
0,025	0,332	0,368	0,386	0,407	0,429	0,442	0,450	0,472	0,476	0,485	0,495	0,503	0,025	
0,05	0,398	0,433	0,452	0,469	0,490	0,503	0,513	0,529	0,535	0,543	0,552	0,559	0,05	
0,10	0,490	0,524	0,541	0,559	0,578	0,588	0,595	0,614	0,617	0,625	0,633	0,637	0,10	
0,25	0,694	0,719	0,730	0,744	0,758	0,767	0,773	0,780	0,788	0,794	0,799	0,803	0,25	
0,50	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	0,50	
0,75	1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47	1,47	1,46	1,46	1,46	1,45	1,45	0,75	
0,90	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,04	2,03	2,00	2,00	1,99	1,98	1,97	0,90	
0,95	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46	2,45	2,43	2,42	2,40	0,95	
0,975	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,03	3,00	2,96	2,94	2,92	2,90	2,88	0,975	
0,99	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,81	3,78	3,71	3,69	3,66	3,62	3,60	0,99	
0,995	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,49	4,45	4,36	4,34	4,29	4,25	4,23	0,995	
0,999	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,41	6,35	6,21	6,17	6,10	6,04	6,00	0,999	
0,9995	8,52	8,14	7,94	7,75	7,55	7,43	7,35	7,18	7,14	7,06	6,98	6,93	0,9995	
0,0005	0,152	0,186	0,206	0,228	0,253	0,269	0,280	0,305	0,311	0,323	0,337	0,345	0,0005	12
0,001	0,172	0,207	0,228	0,250	0,275	0,291	0,302	0,326	0,332	0,344	0,357	0,365	0,001	
0,005	0,235	0,272	0,292	0,315	0,339	0,355	0,365	0,388	0,393	0,405	0,417	0,424	0,005	
0,01	0,273	0,310	0,330	0,352	0,375	0,391	0,401	0,422	0,428	0,441	0,450	0,458	0,01	
0,025	0,337	0,374	0,394	0,416	0,437	0,450	0,461	0,481	0,487	0,498	0,508	0,514	0,025	
0,05	0,404	0,439	0,458	0,478	0,499	0,513	0,522	0,541	0,545	0,556	0,565	0,571	0,05	
0,10	0,496	0,528	0,546	0,564	0,583	0,595	0,604	0,621	0,625	0,633	0,641	0,647	0,10	
0,25	0,695	0,721	0,734	0,748	0,762	0,771	0,777	0,789	0,792	0,799	0,804	0,808	0,25	
0,50	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	0,50	
0,75	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44	1,43	1,43	1,43	1,42	1,42	0,75	
0,90	2,11	2,06	2,04	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,92	1,91	1,90	0,90	
0,95	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35	2,34	2,32	2,31	2,30	0,95	
0,975	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,87	2,85	2,80	2,79	2,76	2,74	2,72	0,975	
0,99	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47	3,45	3,41	3,38	3,36	0,99	
0,995	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,17	4,12	4,04	4,01	3,97	3,93	3,90	0,995	
0,999	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,83	5,76	5,63	5,59	5,52	5,46	5,42	0,999	
0,9995	7,74	7,37	7,18	7,00	6,80	6,68	6,61	6,45	6,41	6,33	6,25	6,20	0,9995	

Продолжение табл. A.7

ν_2	ν_1 / Вероятность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Вероятность
15	0,0005	$0,0^{6}41$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}49$	0,015	0,029	0,045	0,061	0,076	0,091	0,105	0,117	0,129	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}79$	0,021	0,039	0,057	0,075	0,092	0,108	0,123	0,137	0,149	0,001
	0,005	$0,0^{4}39$	$0,0^{2}50$	0,023	0,049	0,076	0,102	0,125	0,147	0,166	0,183	0,198	0,212	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,037	0,070	0,103	0,132	0,158	0,181	0,202	0,219	0,235	0,249	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,070	0,116	0,156	0,190	0,219	0,244	0,265	0,284	0,300	0,315	0,025
	0,05	$0,0^{2}41$	0,051	0,115	0,170	0,216	0,254	0,285	0,311	0,333	0,351	0,368	0,382	0,05
	0,10	0,016	0,106	0,192	0,258	0,309	0,348	0,380	0,406	0,427	0,446	0,461	0,475	0,10
	0,25	0,105	0,293	0,407	0,480	0,531	0,568	0,596	0,618	0,637	0,652	0,667	0,676	0,25
	0,50	0,478	0,726	0,826	0,878	0,911	0,933	0,948	0,960	0,970	0,977	0,984	0,989	0,50
	0,75	1,43	1,52	1,52	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,44	0,75
	0,90	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	0,90
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	0,95
	0,975	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	3,01	2,96	0,975
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	0,99
	0,995	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,33	4,25	0,995
	0,999	16,6	11,3	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08	5,93	5,81	0,999
	0,9995	19,5	13,2	10,8	9,48	8,66	8,10	7,68	7,36	7,11	6,91	6,75	6,60	0,9995
20	0,0005	$0,0^{6}40$	$0,0^{3}60$	$0,0^{2}50$	0,015	0,029	0,046	0,063	0,079	0,094	0,109	0,123	0,136	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}79$	0,022	0,039	0,058	0,077	0,095	0,112	0,128	0,143	0,156	0,001
	0,005	$0,0^{4}39$	$0,0^{2}50$	0,023	0,050	0,077	0,104	0,129	0,151	0,171	0,190	0,206	0,221	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,037	0,071	0,105	0,135	0,162	0,187	0,208	0,227	0,244	0,259	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,071	0,117	0,158	0,193	0,224	0,250	0,273	0,292	0,310	0,325	0,025
	0,05	$0,0^{2}40$	0,051	0,115	0,172	0,219	0,258	0,290	0,318	0,340	0,360	0,377	0,393	0,05
	0,10	0,016	0,106	0,193	0,260	0,312	0,353	0,385	0,412	0,435	0,454	0,472	0,485	0,10
	0,25	0,104	0,292	0,407	0,480	0,531	0,569	0,598	0,622	0,641	0,656	0,671	0,681	0,25
	0,50	0,472	0,718	0,816	0,868	0,900	0,922	0,938	0,950	0,959	0,966	0,972	0,977	0,50
	0,75	1,40	1,49	1,48	1,47	1,45	1,44	1,43	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39	0,75
	0,90	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,91	1,89	0,90
	0,95	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	0,95
	0,975	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,72	2,68	0,975
	0,99	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	0,99
	0,995	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,76	3,68	0,995
	0,999	14,8	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,03	4,94	4,82	0,999
	0,9995	17,2	11,4	9,20	8,02	7,28	6,76	6,38	6,08	5,85	5,66	5,51	5,38	0,9995
24	0,0005	$0,0^{6}40$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}50$	0,015	0,030	0,046	0,064	0,080	0,096	0,112	0,126	0,139	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}79$	0,022	0,040	0,059	0,079	0,097	0,115	0,131	0,146	0,160	0,001
	0,005	$0,0^{4}40$	$0,0^{2}50$	0,023	0,050	0,078	0,106	0,131	0,154	0,175	0,193	0,210	0,226	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,038	0,072	0,106	0,137	0,165	0,189	0,211	0,231	0,249	0,264	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,071	0,117	0,159	0,195	0,227	0,253	0,277	0,297	0,315	0,331	0,025
	0,05	$0,0^{2}40$	0,051	0,116	0,173	0,221	0,260	0,293	0,321	0,345	0,365	0,383	0,399	0,05
	0,10	0,016	0,106	0,193	0,261	0,312	0,355	0,388	0,416	0,439	0,459	0,476	0,491	0,10
	0,25	0,104	0,291	0,406	0,480	0,532	0,570	0,600	0,623	0,643	0,659	0,671	0,684	0,25
	0,50	0,469	0,714	0,812	0,863	0,895	0,917	0,932	0,944	0,953	0,961	0,967	0,972	0,50
	0,75	1,39	1,47	1,46	1,44	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,38	1,37	1,36	0,75
	0,90	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83	0,90
	0,95	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	0,95
	0,975	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,59	2,54	0,975
	0,99	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	0,99
	0,995	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69	3,59	3,50	3,42	0,995
	0,999	14,0	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99	4,80	4,64	4,50	4,39	0,999
	0,9995	16,2	10,6	8,52	7,39	6,68	6,18	5,82	5,54	5,31	5,13	4,98	4,85	0,9995

ν_1 / Вероятность	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Вероятность	ν_2
0,0005	0,159	0,197	0,220	0,244	0,272	0,290	0,303	0,330	0,339	0,353	0,368	0,377	0,0005	15
0,001	0,181	0,219	0,242	0,266	0,294	0,313	0,325	0,352	0,360	0,375	0,388	0,398	0,001	
0,005	0,246	0,286	0,308	0,333	0,360	0,377	0,389	0,415	0,422	0,435	0,448	0,457	0,005	
0,01	0,284	0,324	0,346	0,370	0,397	0,413	0,425	0,450	0,456	0,469	0,483	0,490	0,01	
0,025	0,349	0,389	0,410	0,433	0,458	0,474	0,485	0,508	0,514	0,526	0,538	0,546	0,025	
0,05	0,416	0,454	0,474	0,496	0,519	0,535	0,545	0,565	0,571	0,581	0,592	0,600	0,05	
0,10	0,507	0,542	0,561	0,581	0,602	0,614	0,624	0,641	0,647	0,658	0,667	0,672	0,10	
0,25	0,701	0,728	0,742	0,757	0,772	0,782	0,788	0,802	0,805	0,812	0,818	0,822	0,25	
0,50	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	0,50	
0,75	1,43	1,41	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	0,75	
0,90	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,83	1,82	1,79	1,79	1,77	1,76	1,76	0,90	
0,95	2,40	2,33	2,39	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12	2,11	2,10	2,08	2,07	0,95	
0,975	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,55	2,52	2,47	2,46	2,44	2,41	2,40	0,975	
0,99	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98	2,96	2,92	2,89	2,87	0,99	
0,995	4,07	3,88	3,79	3,69	3,59	3,52	3,48	3,39	3,37	3,33	3,29	3,26	0,995	
0,999	5,54	5,25	5,10	4,95	4,80	4,70	4,64	4,51	4,47	4,41	4,35	4,31	0,999	
0,9995	6,27	5,93	5,75	5,58	5,40	5,29	5,21	5,06	5,02	4,94	4,87	4,83	0,9995	
0,0005	0,169	0,211	0,235	0,263	0,295	0,316	0,331	0,364	0,375	0,391	0,408	0,422	0,0005	20
0,001	0,191	0,233	0,258	0,286	0,318	0,339	0,354	0,386	0,395	0,413	0,429	0,441	0,001	
0,005	0,258	0,301	0,327	0,354	0,385	0,405	0,419	0,448	0,457	0,474	0,490	0,500	0,005	
0,01	0,297	0,340	0,365	0,392	0,422	0,441	0,455	0,483	0,491	0,508	0,521	0,532	0,01	
0,025	0,363	0,406	0,430	0,456	0,484	0,503	0,514	0,541	0,548	0,562	0,575	0,585	0,025	
0,05	0,430	0,471	0,493	0,518	0,544	0,562	0,572	0,595	0,603	0,617	0,629	0,637	0,05	
0,10	0,520	0,557	0,578	0,600	0,623	0,637	0,648	0,671	0,675	0,685	0,694	0,704	0,10	
0,25	0,708	0,736	0,751	0,767	0,784	0,794	0,801	0,816	0,820	0,827	0,835	0,840	0,25	
0,50	0,989	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	0,50	
0,75	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,33	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29	0,75	
0,90	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,69	1,68	1,65	1,64	1,63	1,62	1,61	0,90	
0,95	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,95	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84	0,95	
0,975	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,25	2,22	2,17	2,16	2,13	2,10	2,09	0,975	
0,99	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,61	2,54	2,52	2,48	2,44	2,42	0,99	
0,995	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,96	2,92	2,83	2,81	2,76	2,72	2,69	0,995	
0,999	4,56	4,29	4,15	4,01	3,86	3,77	3,70	3,58	3,54	3,48	3,42	3,38	0,999	
0,9995	5,07	4,75	4,53	4,42	4,24	4,15	4,07	3,93	3,90	3,82	3,75	3,70	0,9995	
0,0005	0,174	0,218	0,244	0,274	0,309	0,331	0,349	0,384	0,395	0,416	0,434	0,449	0,0005	24
0,001	0,196	0,241	0,268	0,298	0,332	0,354	0,371	0,405	0,417	0,437	0,455	0,469	0,001	
0,005	0,264	0,310	0,337	0,367	0,400	0,422	0,437	0,469	0,479	0,498	0,515	0,527	0,005	
0,01	0,304	0,350	0,376	0,405	0,437	0,459	0,473	0,505	0,513	0,529	0,546	0,558	0,01	
0,025	0,370	0,415	0,441	0,468	0,498	0,518	0,531	0,562	0,568	0,585	0,599	0,610	0,025	
0,05	0,437	0,480	0,504	0,530	0,558	0,575	0,588	0,613	0,622	0,637	0,649	0,659	0,05	
0,10	0,527	0,566	0,588	0,611	0,635	0,651	0,662	0,685	0,691	0,704	0,715	0,723	0,10	
0,25	0,712	0,741	0,757	0,773	0,791	0,802	0,809	0,825	0,829	0,837	0,844	0,850	0,25	
0,50	0,983	0,994	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	0,50	
0,75	1,35	1,33	1,32	1,32	1,30	1,29	1,29	1,28	1,28	1,27	1,27	1,26	0,75	
0,90	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,62	1,61	1,58	1,57	1,56	1,54	1,53	0,90	
0,95	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,84	1,80	1,79	1,77	1,75	1,73	0,95	
0,975	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,11	2,08	2,02	2,01	1,98	1,95	1,94	0,975	
0,99	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33	2,31	2,27	2,24	2,21	0,99	
0,995	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,70	2,66	2,57	2,55	2,50	2,46	2,43	0,995	
0,999	4,14	3,87	3,74	3,59	3,45	3,35	3,29	3,16	3,14	3,07	3,01	2,97	0,999	
0,9995	4,55	4,25	4,09	3,93	3,76	3,66	3,59	3,44	3,41	3,33	3,27	3,22	0,9995	

20 Зак. 198.

Продолжение табл. А.7

ν_2	Вероятность \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Вероятность
30	0,0005	$0,0^{6}40$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}50$	0,015	0,030	0,047	0,065	0,082	0,098	0,114	0,129	0,143	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}80$	0,022	0,040	0,060	0,080	0,099	0,117	0,134	0,150	0,164	0,001
	0,005	$0,0^{4}40$	$0,0^{2}50$	0,024	0,050	0,079	0,107	0,133	0,156	0,178	0,197	0,215	0,231	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,038	0,072	0,107	0,138	0,167	0,192	0,215	0,235	0,254	0,270	0,01
	0,025	$0,0^{2}10$	0,025	0,071	0,118	0,161	0,197	0,229	0,257	0,281	0,302	0,321	0,337	0,025
	0,05	$0,0^{2}40$	0,051	0,116	0,174	0,222	0,263	0,296	0,325	0,349	0,370	0,389	0,406	0,05
	0,10	0,016	0,106	0,193	0,262	0,315	0,357	0,391	0,420	0,443	0,464	0,481	0,497	0,10
	0,25	0,103	0,290	0,406	0,480	0,532	0,571	0,601	0,625	0,645	0,661	0,676	0,688	0,25
	0,50	0,466	0,709	0,807	0,858	0,890	0,912	0,927	0,939	0,948	0,955	0,961	0,966	0,50
	0,75	1,38	1,45	1,44	1,42	1,41	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34	0,75
	0,90	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77	0,90
	0,95	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	0,95
	0,975	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,46	2,41	0,975
	0,99	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	0,99
	0,995	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,25	3,18	0,995
	0,999	13,3	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24	4,11	4,00	0,999
	0,9995	15,2	9,90	7,90	6,82	6,14	5,66	5,31	5,04	4,82	4,65	4,51	4,38	0,9995
40	0,0005	$0,0^{6}40$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}50$	0,016	0,030	0,048	0,66	0,084	0,100	0,117	0,132	0,147	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}80$	0,022	0,042	0,061	0,081	0,101	0,119	0,137	0,153	0,169	0,001
	0,005	$0,0^{4}40$	$0,0^{2}50$	0,024	0,051	0,080	0,108	0,135	0,159	0,181	0,201	0,220	0,237	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,038	0,073	0,108	0,140	0,169	0,195	0,219	0,240	0,259	0,276	0,01
	0,025	$0,0^{3}99$	0,025	0,071	0,119	0,162	0,199	0,232	0,260	0,285	0,307	0,327	0,344	0,025
	0,05	$0,0^{2}40$	0,051	0,116	0,175	0,224	0,265	0,299	0,329	0,354	0,376	0,395	0,412	0,05
	0,10	0,016	0,106	0,194	0,263	0,317	0,360	0,394	0,424	0,448	0,469	0,488	0,504	0,10
	0,25	0,103	0,290	0,405	0,480	0,533	0,572	0,603	0,627	0,647	0,664	0,680	0,691	0,25
	0,50	0,463	0,705	0,802	0,854	0,885	0,907	0,922	0,934	0,943	0,950	0,956	0,961	0,50
	0,75	1,36	1,44	1,42	1,40	1,39	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,32	1,31	0,75
	0,90	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,73	1,71	0,90
	0,95	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	0,95
	0,975	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,33	2,29	0,975
	0,99	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	0,99
	0,995	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	3,03	2,95	0,995
	0,999	12,6	8,25	6,60	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,75	3,64	0,999
	0,9995	14,4	9,25	7,33	6,30	5,64	5,19	4,85	4,59	4,38	4,21	4,07	3,95	0,9995
60	0,0005	$0,0^{6}40$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}51$	0,016	0,031	0,048	0,067	0,085	0,103	0,120	0,136	0,152	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}80$	0,022	0,041	0,062	0,083	0,103	0,122	0,140	0,157	0,174	0,001
	0,005	$0,0^{4}40$	$0,0^{2}50$	0,024	0,051	0,081	0,110	0,137	0,162	0,185	0,206	0,225	0,243	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,038	0,073	0,109	0,142	0,172	0,199	0,223	0,245	0,265	0,283	0,01
	0,025	$0,0^{3}99$	0,025	0,071	0,120	0,163	0,202	0,235	0,264	0,290	0,313	0,333	0,351	0,025
	0,05	$0,0^{2}40$	0,051	0,116	0,176	0,226	0,267	0,303	0,333	0,359	0,382	0,402	0,419	0,05
	0,10	0,016	0,106	0,194	0,264	0,318	0,362	0,398	0,428	0,453	0,475	0,493	0,510	0,10
	0,25	0,102	0,289	0,405	0,480	0,534	0,573	0,604	0,629	0,650	0,667	0,680	0,695	0,25
	0,50	0,461	0,701	0,798	0,849	0,880	0,901	0,917	0,928	0,937	0,945	0,951	0,956	0,50
	0,75	1,35	1,42	1,41	1,38	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,29	0,75
	0,90	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,68	1,66	0,90
	0,95	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	0,95
	0,975	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,22	2,17	0,975
	0,99	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	0,99
	0,995	8,49	5,80	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,82	2,74	0,995
	0,999	12,0	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,87	3,69	3,54	3,43	3,31	0,999
	0,9995	13,6	8,65	6,81	5,82	5,20	4,76	4,44	4,18	3,98	3,82	3,69	3,57	0,9995

Вероятность \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Вероятность	ν_2
0,0005	0,179	0,226	0,254	0,287	0,325	0,350	0,369	0,410	0,420	0,444	0,467	0,483	0,0005	30
0,001	0,202	0,250	0,278	0,311	0,348	0,373	0,391	0,431	0,442	0,465	0,488	0,503	0,001	
0,005	0,271	0,320	0,349	0,381	0,416	0,441	0,457	0,495	0,504	0,524	0,543	0,559	0,005	
0,01	0,311	0,360	0,388	0,419	0,454	0,476	0,493	0,529	0,538	0,559	0,575	0,590	0,01	
0,025	0,378	0,426	0,453	0,482	0,515	0,535	0,551	0,585	0,592	0,610	0,625	0,639	0,025	
0,05	0,445	0,490	0,516	0,543	0,573	0,592	0,606	0,637	0,644	0,658	0,676	0,685	0,05	
0,10	0,534	0,575	0,598	0,623	0,649	0,667	0,678	0,704	0,710	0,725	0,735	0,746	0,10	
0,25	0,716	0,746	0,763	0,780	0,798	0,810	0,818	0,835	0,839	0,848	0,856	0,862	0,25	
0,50	0,978	0,989	0,994	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	0,50	
0,75	1,32	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	1,26	1,25	1,24	1,24	1,23	1,23	0,75	
0,90	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,55	1,54	1,51	1,50	1,48	1,47	1,46	0,90	
0,95	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70	1,68	1,66	1,64	1,62	0,95	
0,975	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,97	1,94	1,88	1,87	1,84	1,81	1,79	0,975	
0,99	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13	2,11	2,07	2,03	2,01	0,99	
9,995	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,46	2,42	2,32	2,30	2,25	2,21	2,18	0,995	
0,999	3,75	3,49	3,36	3,22	3,07	2,98	2,92	2,79	2,76	2,69	2,63	2,59	0,999	
0,9995	4,10	3,80	3,65	3,48	3,32	3,22	3,15	3,00	2,97	2,89	2,82	2,78	0,9995	
0,0005	0,185	0,236	0,266	0,301	0,343	0,373	0,393	0,441	0,453	0,480	0,504	0,525	0,0005	40
0,001	0,209	0,259	0,290	0,326	0,367	0,396	0,415	0,461	0,473	0,500	0,524	0,545	0,001	
0,005	0,279	0,331	0,362	0,396	0,436	0,463	0,481	0,524	0,534	0,559	0,581	0,599	0,005	
0,01	0,319	0,371	0,401	0,435	0,473	0,498	0,516	0,556	0,567	0,592	0,613	0,628	0,01	
0,025	0,387	0,437	0,466	0,498	0,533	0,556	0,573	0,610	0,620	0,641	0,662	0,674	0,025	
0,05	0,454	0,502	0,529	0,558	0,591	0,613	0,627	0,658	0,669	0,685	0,704	0,717	0,05	
0,10	0,542	0,585	0,609	0,636	0,664	0,683	0,696	0,724	0,731	0,747	0,762	0,772	0,10	
0,25	0,720	0,752	0,769	0,787	0,806	0,819	0,828	0,846	0,851	0,861	0,870	0,877	0,25	
0,50	0,972	0,983	0,989	0,994	1,00	1,00	1,01	1,01	0,01	1,01	1,02	1,02	0,50	
0,75	1,30	1,28	1,26	1,25	1,24	1,23	1,22	1,21	1,21	1,20	1,19	1,19	0,75	
0,90	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,48	1,47	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38	0,90	
0,95	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59	1,58	1,55	1,53	1,51	0,95	
0,975	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,83	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,64	0,975	
0,99	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94	1,92	1,87	1,83	1,80	0,99	
0,995	2,78	2,60	2,50	2,40	2,30	2,23	2,18	2,09	2,06	2,01	1,96	1,93	0,995	
0,999	3,40	3,15	3,01	2,87	2,73	2,64	2,57	2,44	2,41	2,34	2,28	2,23	0,999	
0,9995	3,68	3,39	3,24	3,08	2,92	2,82	2,74	2,60	2,57	2,49	2,41	2,37	0,9905	
0,0005	0,192	0,246	0,278	0,318	0,365	0,398	0,421	0,478	0,493	0,527	0,561	0,585	0,0005	60
0,001	0,216	0,270	0,304	0,343	0,389	0,421	0,444	0,497	0,512	0,545	0,579	0,602	0,001	
0,005	0,287	0,343	0,376	0,414	0,458	0,488	0,510	0,559	0,572	0,602	0,633	0,652	0,005	
0,01	0,328	0,383	0,416	0,453	0,495	0,524	0,545	0,592	0,604	0,633	0,658	0,679	0,01	
0,025	0,396	0,450	0,481	0,515	0,555	0,581	0,600	0,641	0,654	0,680	0,704	0,720	0,025	
0,05	0,463	0,514	0,543	0,575	0,611	0,633	0,652	0,690	0,700	0,719	0,746	0,759	0,05	
0,10	0,550	0,596	0,622	0,650	0,682	0,703	0,717	0,750	0,758	0,776	0,793	0,806	0,10	
0,25	0,725	0,758	0,776	0,796	0,816	0,830	0,840	0,860	0,865	0,877	0,888	0,896	0,25	
0,50	0,967	0,978	0,983	0,989	0,994	0,998	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,01	0,50	
0,75	1,27	1,25	1,24	1,22	1,21	1,20	1,19	1,17	1,17	1,16	1,15	1,15	0,75	
0,90	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,41	1,40	1,36	1,35	1,33	1,31	1,29	0,90	
0,95	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48	1,47	1,44	1,41	1,39	0,95	
0,975	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,70	1,67	1,60	1,58	1,54	1,51	1,48	0,975	
0,99	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,84	1,75	1,73	1,68	1,63	1,60	0,99	
0,995	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	2,01	1,96	1,86	1,83	1,78	1,73	1,69	0,995	
0,999	3,08	2,83	2,69	2,56	2,41	2,31	2,25	2,11	2,09	2,01	1,93	1,89	0,999	
0,9995	3,30	3,02	2,87	2,71	2,55	2,45	2,38	2,23	2,19	2,11	2,03	1,98	0,9995	

Продолжение табл. A.7

ν_2	Вероятность \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Вероятность
120	0,0005	$0,0^{6}40$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}51$	0,016	0,031	0,049	0,067	0,087	0,105	0,123	0,140	0,156	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}81$	0,023	0,042	0,063	0,084	0,105	0,125	0,144	0,162	0,179	0,001
	0,005	$0,0^{4}39$	$0,0^{2}50$	0,024	0,051	0,081	0,111	0,139	0,165	0,189	0,211	0,230	0,249	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,038	0,074	0,110	0,143	0,174	0,202	0,227	0,250	0,271	0,290	0,01
	0,025	$0,0^{3}99$	0,025	0,072	0,120	0,165	0,204	0,238	0,268	0,295	0,318	0,340	0,359	0,025
	0,05	$0,0^{2}39$	0,051	0,117	0,177	0,227	0,270	0,306	0,337	0,364	0,388	0,408	0,427	0,05
	0,10	0,016	0,105	0,194	0,265	0,320	0,365	0,401	0,432	0,458	0,480	0,500	0,518	0,10
	0,25	0,102	0,288	0,405	0,481	0,534	0,574	0,606	0,631	0,652	0,670	0,685	0,699	0,25
	0,50	0,458	0,697	0,793	0,844	0,875	0,896	0,912	0,923	0,932	0,939	0,945	0,950	0,50
	0,75	1,34	1,40	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	0,75
	0,90	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,62	1,60	0,90
	0,95	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	0,95
	0,975	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,10	2,05	0,975
	0,99	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	0,99
	0,995	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81	2,71	2,62	2,54	0,995
	0,999	11,4	7,32	5,79	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	3,12	3,02	0,999
	0,9995	12,8	8,10	6,34	5,39	4,79	4,37	4,07	3,82	3,63	3,47	3,34	3,22	0,9995
∞	0,0005	$0,0^{6}39$	$0,0^{3}50$	$0,0^{2}51$	0,016	0,032	0,050	0,069	0,088	0,108	0,127	0,144	0,161	0,0005
	0,001	$0,0^{5}16$	$0,0^{2}10$	$0,0^{2}81$	0,023	0,042	0,063	0,085	0,107	0,128	0,148	0,167	0,185	0,001
	0,005	$0,0^{4}39$	$0,0^{2}50$	0,024	0,052	0,82	0,113	0,141	0,168	0,193	0,216	0,236	0,256	0,005
	0,01	$0,0^{3}16$	0,010	0,038	0,074	0,111	0,145	0,177	0,206	0,232	0,256	0,278	0,298	0,01
	0,025	$0,0^{3}98$	0,025	0,072	0,121	0,166	0,206	0,241	0,272	0,300	0,325	0,347	0,367	0,025
	0,05	$0,0^{2}39$	0,051	0,117	0,178	0,229	0,273	0,310	0,342	0,369	0,394	0,417	0,436	0,05
	0,10	0,016	0,105	0,195	0,266	0,322	0,367	0,405	0,436	0,463	0,487	0,508	0,525	0,10
	0,25	0,102	0,288	0,404	0,481	0,535	0,576	0,608	0,634	0,655	0,674	0,690	0,703	0,25
	0,50	0,455	0,693	0,789	0,839	0,870	0,891	0,907	0,918	0,927	0,934	0,939	0,945	0,50
	0,75	1,32	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,29	1,28	1,27	1,25	1,24	1,24	0,75
	0,90	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,57	1,55	0,90
	0,95	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	0,95
	0,975	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,99	1,94	0,975
	0,99	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	0,99
	0,995	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62	2,52	2,43	2,36	0,995
	0,999	10,8	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27	3,10	2,96	2,84	2,74	0,999
	0,9995	12,1	7,60	5,91	5,00	4,42	4,02	3,72	3,48	3,30	3,14	3,02	2,90	0,9995

Вероятность \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Вероятность	ν_2
0,0005	0,199	0,256	0,293	0,338	0,390	0,429	0,458	0,524	0,543	0,578	0,614	0,676	0,0005	120
0,001	0,223	0,282	0,319	0,363	0,415	0,453	0,480	0,542	0,568	0,595	0,631	0,691	0,001	
0,005	0,297	0,356	0,393	0,434	0,484	0,520	0,545	0,605	0,623	0,661	0,702	0,733	0,005	
0,01	0,338	0,397	0,433	0,474	0,522	0,556	0,579	0,636	0,652	0,688	0,725	0,755	0,1	
0,025	0,406	0,464	0,498	0,536	0,580	0,611	0,633	0,684	0,698	0,729	0,762	0,789	0,025	
0,05	0,473	0,527	0,559	0,594	0,634	0,661	0,682	0,727	0,740	0,767	0,785	0,819	0,05	
0,10	0,560	0,609	0,636	0,667	0,702	0,726	0,742	0,781	0,791	0,815	0,838	0,855	0,10	
0,25	0,730	0,765	0,784	0,805	0,828	0,843	0,853	0,877	0,884	0,897	0,911	0,923	0,25	
0,50	0,961	0,972	0,978	0,983	0,989	0,992	0,994	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	0,50	
0,75	1,24	1,22	1,21	1,19	1,18	1,17	1,16	1,14	1,13	1,12	1,11	1,10	0,75	
0,90	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,34	1,32	1,27	1,26	1,24	1,21	1,19	0,90	
0,95	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,46	1,43	1,37	1,35	1,32	1,28	1,25	0,95	
0,975	1,95	1,82	1,76	1,69	1,61	1,56	1,53	1,45	1,43	1,39	1,34	1,31	0,975	
0,99	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,70	1,66	1,56	1,53	1,48	1,42	1,38	0,99	
0,995	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,80	1,75	1,64	1,61	1,54	1,48	1,43	0,995	
0,999	2,78	2,53	2,40	2,26	2,11	2,02	1,95	1,82	1,76	1,70	1,62	1,54	0,999	
0,9995	2,96	2,67	2,53	2,38	2,21	2,11	2,01	1,88	1,84	1,75	1,67	1,60	0,9995	
0,0005	0,207	0,270	0,311	0,360	0,422	0,469	0,505	0,599	0,624	0,704	0,804	1,00	0,0005	∞
0,001	0,232	0,296	0,338	0,386	0,448	0,493	0,527	0,617	0,649	0,719	0,819	1,00	0,001	
0,005	0,307	0,372	0,412	0,460	0,518	0,559	0,592	0,671	0,699	0,762	0,843	1,00	0,005	
0,001	0,349	0,413	0,452	0,499	0,554	0,595	0,625	0,699	0,724	0,782	0,858	1,00	0,01	
0,025	0,418	0,480	0,517	0,560	0,611	0,645	0,675	0,741	0,763	0,813	0,878	1,00	0,25	
0,05	0,484	0,543	0,577	0,617	0,663	0,694	0,720	0,781	0,797	0,840	0,896	1,00	0,05	
0,10	0,570	0,622	0,652	0,687	0,726	0,752	0,774	0,826	0,838	0,877	0,919	1,00	0,10	
0,25	0,736	0,773	0,793	0,816	0,842	0,860	0,872	0,901	0,910	0,932	0,957	1,00	0,25	
0,50	0,956	0,967	0,972	0,978	0,983	0,987	0,989	0,993	0,994	0,997	0,999	1,00	0,50	
0,75	1,22	1,19	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1,09	1,08	1,07	1,04	1,00	0,75	
0,90	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,26	1,24	1,18	1,17	1,13	1,08	1,00	0,90	
0,95	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,32	1,24	1,22	1,17	1,11	1,00	0,95	
0,975	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,43	1,39	1,30	1,27	1,21	1,13	1,00	0,975	
0,99	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,47	1,36	1,32	1,25	1,15	1,00	0,99	
0,995	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,59	1,53	1,40	1,36	1,28	1,17	1,00	0,995	
0,999	2,51	2,27	2,13	1,99	1,84	1,73	1,66	1,49	1,45	1,34	1,21	1,00	0,999	
0,9995	2,65	2,37	2,22	2,07	1,91	1,79	1,71	1,53	1,48	1,36	1,22	1,00	0,9995	

$0^{3}56$ означает 0,00056; $200^{1} = 2000$; $162^{4} = 1\,620\,000$ и т. д. Для $\alpha < 0,5$ значения таблицы обратны значениям, соответствующим $1 - \alpha$ (с перестановкой ν_1 и ν_2). Отсутствующие в таблице величины можно получить интерполяцией. В случае объема выборки $n > 30$ хорошим приближением для процентилей F_α служит формула $\lg F_\alpha(\nu_1, \nu_2) \approx a(h-b)^{-1/2} - cg$, где $h = 2\nu_1\nu_2/(\nu_1+\nu_2)$, $g = (\nu_2-\nu_1)/\nu_1\nu_2$, а параметры a, b, c в зависимости от α задаются таблицей

α	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
a	0	0,5859	1,1131	1,4287	1,7023	2,0206	2,2373	2,6841	2,8580
b	–	0,58	0,77	0,95	1,14	1,40	1,61	2,09	2,30
c	0,290	0,355	0,527	0,681	0,846	1,073	1,250	1,672	1,857

Таблица A.8

Односторонние границы доверительного интервала нормального распределения

Коэффициент K означает, что $(1-\alpha)$-я доля распределения с доверительной вероятностью γ меньше $\overline{X}+Ks$ (или больше $\overline{X}-Ks$), где $\overline{X}$ и s — оценки среднего значения и стандартного отклонения выборки объема n

Lieberman G. J., Tables for One-sided Statistical Tolerance Limits, Industrial Quality Control, vol. XIV, № 10, p. 8, April, 1958.

n \ α	$\gamma=0,75$					$\gamma=0,90$					$\gamma=0,95$					$\gamma=0,99$				
	0,25	0,10	0,05	0,01	0,001	0,25	0,10	0,05	0,01	0,001	0,25	0,10	0,05	0,01	0,001	0,25	0,10	0,05	0,01	0,001
3	1,464	2,501	3,152	4,396	5,805	2,602	4,258	5,310	7,340	9,651	3,804	6,158	7,655	10,552	13,857					
4	1,256	2,134	2,680	3,726	4,910	1,972	3,187	3,957	5,437	7,128	2,619	4,163	5,145	7,042	9,215					
5	1,152	1,961	2,463	3,421	4,507	1,698	2,742	3,400	4,666	6,112	2,149	3 407	4,202	5,741	7,501					
6	1,087	1,860	2,336	3,243	4,273	1,540	2,494	3,091	4,242	5,556	1,895	3,006	3,707	5,062	6,612	2,849	4,408	5,409	7,334	9,540
7	1,043	1,791	2,250	3,126	4,118	1,435	2,333	2,894	3,972	5,201	1,732	2,755	3,399	4,641	6,061	2,490	3,856	4,730	6,411	8,348
8	1,010	1,740	2,19[illegible]	3,042	4,008	1,360	2,219	2,755	3,783	4,955	1,617	2,582	3,188	4,353	5,686	2,252	3,496	4,287	5,811	7,566
9	0,984	1,70[illegible]	2,141	2,977	3,924	1,302	2,133	2,649	3,641	4,772	1,532	2,454	3,031	4,143	5,414	2,085	3 242	3,971	5,389	7,014
10	0,964	1,671	2,103	2,927	3,858	1,257	2,065	2,568	3,532	4,629	1,465	2,355	2,911	3,981	5,203	1,954	3,048	3,739	5,075	6,603
11	0,947	1,646	2,073	2,885	3,804	1,219	2,012	2,503	3,444	4,515	1,411	2,275	2,815	3,852	5,036	1,854	2,897	3,557	4,828	6,284
12	0,933	1,624	2,048	2,851	3,760	1,188	1,966	2,448	3,371	4,420	1,366	2,210	2,736	3,747	4,900	1,771	2,773	3,410	4,633	6,032
13	0,919	1,606	2,026	2,822	3,722	1,162	1,928	2,403	3,310	4,341	1,329	2,155	2,670	3,659	4,787	1,702	2,677	3,290	4,472	5,826
14	0,909	1,591	2,007	2,796	3,690	1,139	1,895	2,363	3,257	4,274	1,296	2 108	2,614	3,585	4,690	1,645	2,592	3,189	4,336	5,651
15	0,899	1,577	1,991	2,776	3,661	1,119	1,866	2,329	3,212	4,215	1,268	2,068	2,566	3,520	4,607	1,596	2,521	3,102	4,224	5,507
16	0,891	1,566	1,977	2,756	3,637	1,101	1,842	2,299	3,172	4,164	1,242	2,032	2,523	3,463	4,534	1,553	2,458	3,028	4,124	5,374
17	0,883	1,554	1,964	2,739	3,615	1,085	1,820	2,272	3,136	4,118	1,220	2,001	2,486	3,415	4,471	1,514	2,405	2,962	4,038	5,268
18	0,876	1,544	1,951	2,723	3,595	1,071	1,800	2,249	3,106	4,078	1,200	1,974	2,453	3,370	4,415	1,481	2,357	2,906	3,961	5,167
19	0,870	1,536	1,942	2,710	3,577	1,058	1,781	2,228	3,078	4,041	1,183	1,949	2,423	3,331	4,364	1,450	2,315	2,855	3,893	5,078
20	0,865	1,528	1,933	2,697	3,561	1,046	1,765	2,208	3,052	4,009	1,167	1,926	3,396	3,295	4,319	1,424	2,275	2,807	3,832	5,003
21	0,859	1,520	1,923	2,686	3,545	1,035	1,750	2,190	3,028	3,979	1,152	1,905	2,371	3,262	4,276	1,397	2,241	2,768	3,776	4,932
22	0,854	1 514	1,916	2,675	3,532	1,025	1,736	2,174	3,007	3,952	1,138	1,887	2,350	3,233	4,238	1,376	2,208	2,729	3,727	4,866
23	0,849	1,508	1,907	2,665	3,520	1,016	1,724	2,159	2,987	3,927	1,126	1,869	2,329	3,206	4,204	1,355	2,179	2,693	3,680	4,806
24	0,845	1,502	1,901	2,656	3,509	1,007	1,712	2,145	2,969	3,904	1,114	1,853	2,300	3,181	4,171	1,336	2,154	2,663	3,638	4,755
25	0,842	1,496	1,895	2,647	3,497	0,999	1,702	2,132	2,952	3,882	1,103	1,838	2,292	3,158	4,143	1,319	2,129	2,632	3,601	4,706
30	0,825	1,475	1,869	2,613	3,454	0,966	1,657	2,080	2,884	3,794	1,059	1,778	2,220	3,064	4,022	1,249	2,029	2,516	3,446	4,508
35	0,812	1,458	1,849	2,588	3,421	0,942	1,623	2,041	2,833	3,730	1,025	1,732	2,166	2,994	3,934	1,195	1,957	2,431	3,334	4,364
40	0,803	1,445	1,834	2,568	3,395	0,923	1,598	2,010	2,793	3,679	0,999	1,697	2,126	2,941	3,866	1,154	1,902	2,365	3,250	4,255
45	0,795	1,435	1,821	2,552	3,375	0,908	1,577	1,986	2,762	3,638	0,978	1,669	2,092	2,897	3,811	1,122	1,857	2,313	3,181	4,168
50	0,788	1,426	1,811	2,538	3,358	0,894	1,560	1,965	2,735	3,604	0,961	1,646	2,065	2,863	3,766	1,096	1,821	2,296	3,124	4,096

Таблица А.9

Двусторонние границы доверительного интервала нормального распределения

Dixon W. J., Massey F. J., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed., Jr., 1957, McGraw-Hill.

P / N	$\gamma = 0{,}75$					$\gamma = 0{,}90$					$\gamma = 0{,}95$					$\gamma = 0{,}99$				
	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999
2	4,498	6,301	7,414	9,531	11,920	11,407	15,978	18,800	24,167	30,227	22,858	32,019	37,674	48,430	60,573	114,363	160,193	188,491	242,300	303,054
3	2,501	3,538	4,187	5,431	6,844	4,132	5,847	6,919	8,974	11,309	5,922	8,380	9,916	12,861	16,208	13,378	18,930	22,401	29,055	36,616
4	2,035	2,892	3,431	4,471	5,657	2,932	4,166	4,943	6,440	8,149	3,779	5,369	6.370	8,299	10,502	6,014	9,398	11,150	14,527	18,383
5	1,825	2,599	3,088	4,033	5,117	2,454	3,494	4,152	5,423	6,879	3,002	4,275	5,079	6,634	8,415	4,643	6,612	7,855	10,260	13,015
6	1,704	2,429	2,880	3.779	4,802	2,196	3,131	3,783	4,870	6,188	2,604	3,712	4,414	5,775	7,337	3,743	5,337	6,345	8,301	10,548
7	1,624	2,318	2,757	3,611	4,593	2,034	2,902	3,452	4,521	5,750	2,361	3,369	4.007	5,248	6,676	3,233	4.613	5,488	7,187	9,142
8	1,568	2,238	2,663	3,491	4,444	1,921	2,743	3,264	4,278	5,446	2,197	3,136	3,732	4,891	6,226	2,905	4,147	4,936	6,468	8,234
9	1,525	2,178	2,593	3,400	4,330	1,839	2,626	3,125	4,098	5,220	2,078	2,967	3,532	4,631	5,899	2,677	3,822	4,550	5,966	7,600
10	1,492	2,131	2,537	3,328	4,241	1,775	2,535	3,018	3,959	5,046	1,987	2,839	3,379	4,433	5,649	2,508	3,582	4,265	5.594	7,129
11	1,465	2,093	2,493	3,271	4,169	1,724	2.463	2,933	3,849	4,906	1,916	2,737	3,259	4,277	5,452	2,378	3,397	4,045	5,308	6,766
12	1,443	2,062	2,456	3,223	4,110	1,683	2,404	2,863	3,758	4,792	1,858	2,655	3,162	4,150	5,291	2,274	3,250	3,870	5,079	6,477
13	1,425	2,036	2,424	3,183	4,059	1.648	2,355	2,805	3,682	4,697	1,810	2,587	3,081	4,044	5,158	2,190	3,130	3,727	4,893	6,240
14	1,409	2,013	2,398	3,148	4,016	1,619	2,314	2,756	3,618	4,615	1,770	2,529	3,012	3,955	5,045	2,120	3,029	3,608	4,737	6,043
15	1,395	1,994	2,375	3,118	3,979	1,594	2,278	2,713	3,562	4,545	1,735	2,480	2,954	3,878	4,949	2,060	2,945	3,507	4,605	5,876
16	1,383	1.977	2,355	3,092	3,946	1,572	2,246	2,676	3,514	4,484	1,705	2,437	2,903	3,812	4,865	2,009	2,872	3,421	4,492	5,732
17	1,372	1,962	2,337	3,069	3,917	1,552	2,219	2,643	3,471	4,430	1,679	2,400	2,858	3,754	4,791	1,965	2,808	3,345	3,393	5,607
18	1,363	1.948	2,321	3,048	3,891	1,535	2,194	2,614	3,433	4,382	1,655	2,366	2,819	3,702	4,725	1 926	2,753	3,279	4,307	5,497
19	1,355	1,936	2,307	3,030	3,867	1,520	2,172	2,588	3,399	4,339	1,635	2,337	2,784	3,656	4,667	1,891	2,703	3,221	4,230	5,399
20	1,347	1,925	2,294	3,013	3,846	1,506	2,152	2,564	3,368	4,300	1,616	2,310	2,752	3,615	4,614	1,860	2,659	3,168	4,161	5,312
21	1,340	1,915	2,282	2,998	3,827	1,493	2,135	2 543	3,340	4,264	1,599	2,286	2,723	3,577	4,567	1,833	2,620	3,121	4,100	5,234
22	1,334	1,906	2,271	2,981	3,809	1,482	2,118	2,524	3,315	4,232	1,584	2,264	2,697	3,543	4,523	1,808	2,584	3,078	4,044	5,163
23	1,328	1,898	2,261	2,971	3,793	1,471	2,103	2,506	3,292	4,203	1,570	2,244	2,673	3,512	4,484	1.785	2,551	3,040	3,993	5,098
24	1,322	1,891	2,252	2,950	3,778	1,462	2,089	2,480	3,270	4,176	1,557	2,225	2,651	3,483	4,447	1,764	2.522	3,004	3,947	5,039
25	1,317	1,883	2,244	2,948	3,764	1,453	2,077	2,474	3,251	4,151	1,545	2.208	2,631	3,457	4,413	1,745	2,494	2,972	3,904	4,985
26	1,313	1,877	2,236	2.938	3,751	1,444	2,065	2,460	3,232	4,127	1,534	2,193	2,612	3,432	4,382	1,727	2,460	2,941	3,865	4,935
27	1,309	1,871	2,229	2,929	3,740	1,437	2,054	2,447	3,215	4,106	1,523	2,178	2,595	3,409	4,353	1,711	2,446	2,914	3,828	4,888
30	1,297	1,855	2,210	2,304	3,708	1,417	2,025	2,413	3,170	4,049	1,497	2,140	2,549	3,350	4,278	1,668	2,385	2,841	3,733	4,768
35	1,283	1,834	2,185	2,871	3,667	1,390	1,988	2,368	3,112	3,974	1,462	2,090	2,490	3,272	4,179	1,613	2,306	2,748	3,611	4,611
40	1,271	1,818	2.166	2,846	3,635	1,370	1,959	2,334	3,066	3,917	1,435	2,052	2,445	3,213	4,104	1,571	2,247	2.677	3,518	4,493

Продолжение табл. А.9

N \ P	$\gamma=0,75$					$\gamma=0,90$					$\gamma=0,95$					$\gamma=0,99$				
	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999
45	1,262	1,805	2,150	2,826	3,609	1,354	1,935	2,306	3,030	3,871	1,414	2,021	2,408	3,165	4,012	1,539	2,200	2,621	3,444	4,399
50	1,255	1,794	2,138	2,809	3,588	1,340	1,916	2,284	3,001	3,833	1,396	1,996	2,379	3,126	3,993	1,512	2,162	2,576	3,385	4,323
55	1,249	1,785	2,127	2,795	3,571	1,329	1,901	2,265	2,976	3,801	1,382	1,976	2,354	3,094	3,951	1,490	2,130	2,538	3,335	4,260
60	1,243	1,778	2,118	2,784	3,556	1,320	1,887	2,248	2,955	3,774	1,369	1,958	2,333	3,066	3,916	1,471	2,103	2,506	3,293	4,206
65	1,239	1,771	2,110	2,773	3,543	1,312	1,875	2,235	2,937	3,751	1,359	1,943	2,315	3,042	3,886	1,455	2,080	2,478	3,257	4,160
70	1,235	1,765	2,104	2,764	3,531	1,304	1,865	2,222	2,920	3,730	1,349	1,929	2,299	3,021	3,859	1,440	2,060	2,454	3,225	4,120
75	1,231	1,760	2,098	2,757	3,521	1,298	1,856	2,211	2,906	3,712	1,341	1,917	2,285	3,002	3,835	1,428	2,042	2,433	3,197	4,084
80	1,228	1,756	2,092	2,749	3,512	1,292	1,848	2,202	2,894	3,696	1,334	1,907	2,272	2,986	3,814	1,417	2,026	2,414	3,173	4,053
85	1,225	1,752	2,087	2,743	3,504	1,287	1,841	2,193	2,882	3,682	1,327	1,897	2,261	2,971	3,795	1,407	2,012	2,397	3,150	4,024
90	1,223	1,748	2,083	2,737	3,497	1,283	1,834	2,185	2,872	3,669	1,321	1,889	2,251	2,958	3,778	1,398	1,999	2,382	3,130	3,999
95	1,220	1,745	2,079	2,732	3,490	1,278	1,828	2,178	2,863	3,657	1,315	1,881	2,241	2,945	3,763	1,390	1,987	2,368	3,112	3,976
100	1,218	1,742	2,075	2,727	3,484	1,275	1,822	2,172	2,854	3,646	1,311	1,874	2,233	2,934	3,748	1,383	1,977	2,355	3,096	3,954
110	1,214	1,736	2,069	2,719	3,473	1,268	1,813	2,160	2,839	3,626	1,302	1,861	2,218	2,915	3,723	1,369	1,958	2,333	3,066	3,917
120	1,211	1,732	2,063	2,712	3,464	1,262	1,804	2,150	2,826	3,610	1,294	1,850	2,205	2,898	3,702	1,358	1,942	2,314	3,041	3,885
130	1,208	1,728	2,059	2,705	3,456	1,257	1,797	2,141	2,814	3,595	1,288	1,841	2,194	2,883	3,683	1,349	1,928	2,298	3,019	3,857
140	1,206	1,724	2,054	2,700	3,449	1,252	1,791	2,134	2,804	3,582	1,282	1,833	2,184	2,870	3,666	1,340	1,916	2,283	3,000	3,833
150	1,204	1,721	2,051	2,695	3,443	1,248	1,785	2,127	2,795	3,571	1,277	1,825	2,175	2,859	3,652	1,332	1,905	2,270	2,983	3,811
160	1,202	1,718	2,047	2,691	3,437	1,245	1,780	2,121	2,787	3,561	1,272	1,819	2,167	2,848	3,638	1,326	1,896	2,259	2,968	3,792
170	1,200	1,716	2,044	2,687	3,432	1,242	1,775	2,116	2,780	3,552	1,268	1,813	2,160	2,839	3,627	1,320	1,887	2,248	2,955	3,774
180	1,198	1,713	2,042	2,683	3,427	1,239	1,771	2,111	2,774	3,543	1,264	1,808	2,154	2,831	3,616	1,314	1,879	2,239	2,942	3,759
190	1,197	1,711	2,039	2,680	3,423	1,236	1,767	2,106	2,768	3,536	1,261	1,803	2,148	2,823	3,606	1,309	1,872	2,230	2,931	3,744
200	1,195	1,709	2,037	2,677	3,419	1,234	1,764	2,102	2,762	3,529	1,258	1,798	2,143	2,816	3,597	1,304	1,865	2,222	2,921	3,731
250	1,190	1,702	2,028	2,665	3,404	1,224	1,750	2,085	2,740	3,501	1,245	1,780	2,121	2,788	3,561	1,286	1,839	2,191	2,880	3,678
300	1,186	1,696	2,021	2,656	3,393	1,217	1,740	2,073	2,725	3,481	1,236	1,767	2,106	2,767	3,535	1,273	1,820	2,169	2,850	3,641
400	1,181	1,688	2,012	2,644	3,378	1,207	1,726	2,057	2,703	3,452	1,223	1,749	2,084	2,739	3,499	1,255	1,794	2,138	2,809	3,589
500	1,177	1,683	2,006	2,636	3,368	1,201	1,717	2,046	2,689	3,434	1,215	1,737	2,070	2,721	3,475	1,243	1,777	2,117	2,783	3,555
600	1,175	1,680	2,002	2,631	3,360	1,196	1,710	2,038	2,678	3,421	1,209	1,729	2,060	2,707	3,458	1,234	1,764	2,102	2,763	3,530
700	1,173	1,677	1,998	2,626	3,355	1,192	1,705	2,032	2,670	3,411	1,204	1,722	2,052	2,697	3,445	1,227	1,755	2,091	2,748	3,511
800	1,171	1,675	1,996	2,623	3,350	1,189	1,701	2,027	2,663	3,402	1,201	1,717	2,046	2,688	3,434	1,222	1,747	2,082	2,736	3,495
900	1,170	1,673	1,993	2,620	3,347	1,187	1,697	2,023	2,658	3,396	1,198	1,712	2,040	2,682	3,426	1,218	1,741	2,075	2,726	3,483
1000	1,169	1,671	1,992	2,617	3,344	1,185	1,695	2,019	2,654	3,390	1,195	1,709	2,036	2,676	3,418	1,214	1,736	2,068	2,718	3,472
∞	1,150	1,645	1,960	2,576	3,291	1,150	1,645	1,960	2,576	3,291	1,150	1,645	1,960	2,576	3,291	1,150	1,645	1,960	2,576	3,291

Таблица А.10

Некоторые часто встречающиеся постоянные

$\pi = 3{,}1415926536$	$\lg 2 = 0{,}3010299957$
$\lg \pi = 0{,}4971498727$	$\ln 2 = 0{,}6931471806$
$\ln \pi = 1{,}1447298858$	$e = 2{,}7182818285$
$1/\pi = 0{,}3183098862$	$\sqrt{e} = 1{,}6487212707$
$\pi^2 = 9{,}8696044010$	$\lg e = 0{,}4342944819$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7724538509$	$\ln 10 = 2{,}3025850930$

Таблица А.11

Некоторые степени целых чисел $n = 2\ (1)\ 25$

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$1/\sqrt{n}$	$1/\sqrt{n(n-1)}$
2	4	8	1,414214	0,707107	0,707107
3	9	27	1,732051	0,577350	0,408248
4	16	64	2,000000	0,500000	0,288675
5	25	125	2,236068	0,447214	0,223607
6	36	216	2,449490	0,408248	0,182574
7	49	343	2,645751	0,377964	0,154303
8	64	512	2,828427	0,353553	0,133631
9	81	729	3,000000	0,333333	0,117851
10	100	1 000	3,162278	0,316228	0,105409
11	121	1 331	3,316625	0,301511	0,095346
12	144	1 728	3,464102	0,288678	0,087039
13	169	2 197	3,605551	0,277350	0,080064
14	196	2 744	3,741657	0,267261	0,074125
15	225	3 375	3,872983	0,258199	0,069007
16	256	4 096	4,000000	0,250000	0,064550
17	289	4 913	4,123106	0,242536	0,060634
18	324	5 832	4,242641	0,235702	0,057166
19	361	6 859	4,358899	0,229416	0,054074
20	400	8 000	4,472136	0,223607	0,051299
21	441	9 261	4,582576	0,218218	0,048795
22	484	10 648	4,690416	0,213201	0,046524
23	529	12 167	4,795832	0,208514	0,044455
24	576	13 824	4,898979	0,204124	0,042563
25	625	15 625	5,000000	0,200000	0,040825

Таблица А.12

Факториал

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	130 767 436 800

Таблица А.13

Суммы

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C\,(n,\ i)\,a^{n-i}b^i$$

$$(1+X)^n = \sum_{i=0}^{n} C\,(n,\ i)\,X^i$$

$$\frac{(1-X)^n}{1-X} = \sum_{i=0}^{n-1} X^i$$

$$\frac{1}{(1-X)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} C\,(n+i-1,\ i)\,X^i$$

$$\frac{X}{(1-X)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} iX^i,\ |X| < 1$$

$$e^X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n\,(n+1)/2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)/6$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2\,(n+1)^2\Big/4 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \sum_{i=1}^{n} i^2\left[6\sum_{i=1}^{n} i - 1\right]\Big/5$$

Таблица А.14

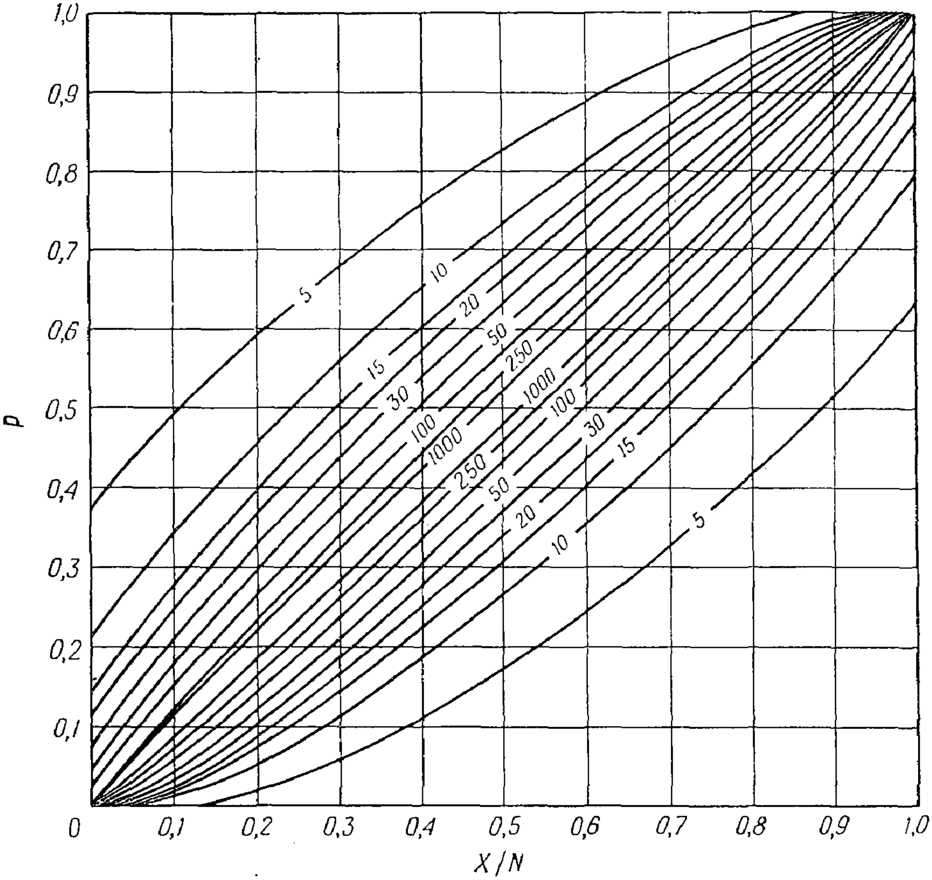
Значения e^{-x}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	1,00000	0,99900	0,99800	0,99700	0,99600	0,99501	0,99401	0,99302	0,99203	0,99104
0,01	0,99004	0,98906	0,98807	0,98708	0,98609	0,98511	0,98412	0,98314	0,98216	0,98117
0,02	0,98019	0,97921	0,97824	0,97726	0,97628	0,97350	0,97433	0,97336	0,97238	0,97141
0,03	0,97044	0,96947	0,96850	0,96753	0,96657	0,96560	0,96464	0,96367	0,96271	0,96175
0,04	0,96078	0,95982	0,95886	0,95791	0,95695	0,95599	0,95504	0,95408	0,95313	0,95218
0,05	0,95122	0,95027	0,94932	0,94838	0,94743	0,94648	0,94553	0,94459	0,94364	0,94270
0,06	0,94176	0,94082	0,93988	0,93894	0,93800	0,93706	0,93613	0,93519	0,93426	0,93332
0,07	0,93239	0,93146	0,93053	0,92960	0,92867	0,92774	0,92681	0,92588	0,92496	0,92404
0,08	0,92312	0,92219	0,92127	0,92035	0,91943	0,91851	0,91759	0,91668	0,91576	0,91485
0,09	0,91393	0,91302	0,91211	0,91119	0,91028	0,90937	0,90846	0,90755	0,90665	0,90574
0,10	0,90484	0,90393	0,90302	0,90212	0,90122	0,90032	0,89942	0,89853	0,89763	0,89673

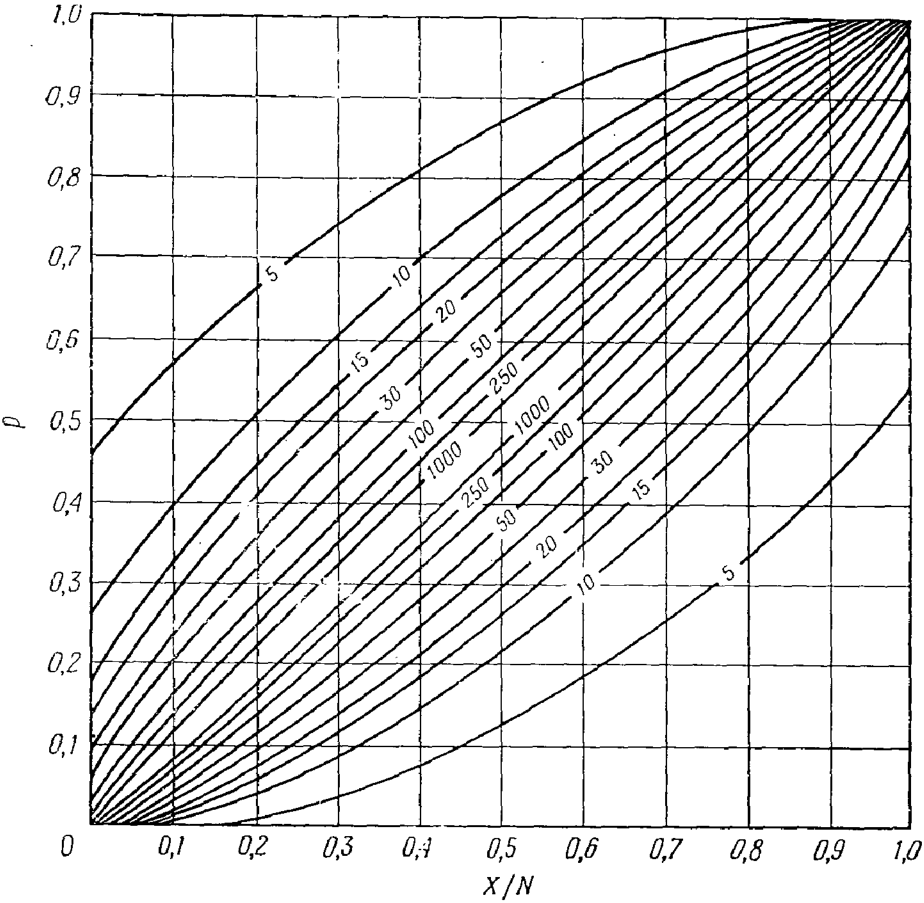
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-x}	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005

Примечание. Для получения других значений e^{-x} используется соотношение $e^{-(x_1+x_2)} = e^{-x_1}e^{-x_2}$. Например, $e^{-0,24} = e^{-0,10}e^{-0,10}e^{-0,04} = (0,90484)^{-2} \cdot 0,96078 = 0,7866$

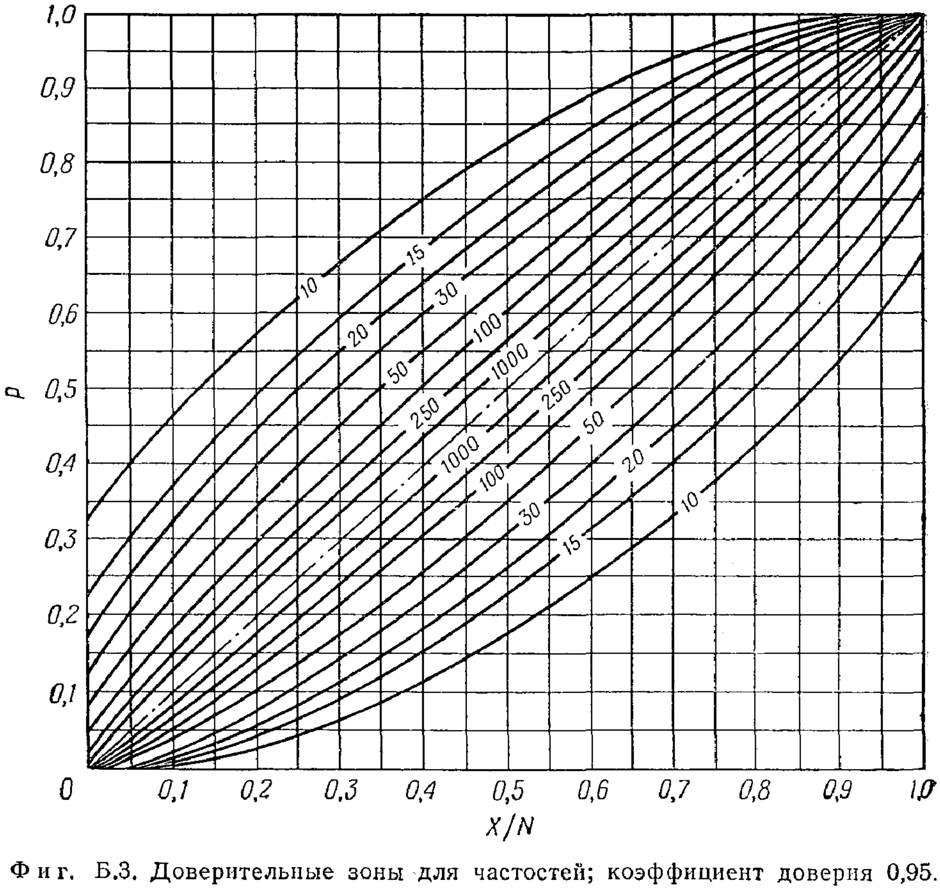
ГРАФИКИ



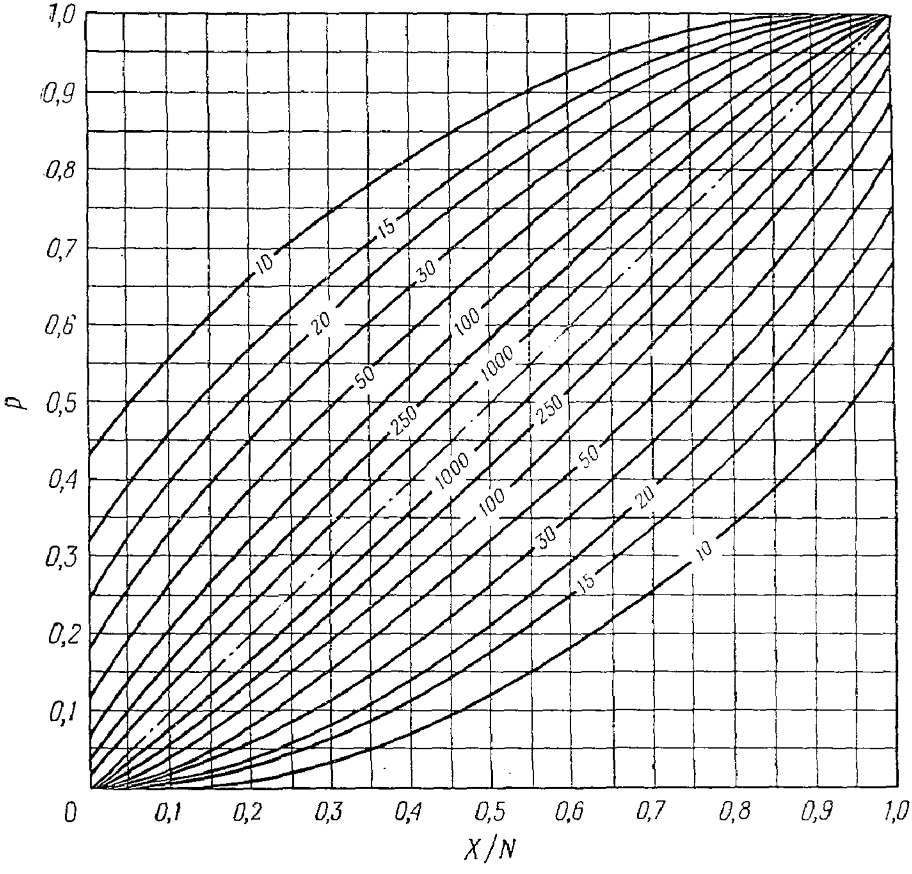
Фиг. Б.1. Доверительные зоны для частостей; коэффициент доверия 0,80. (Dixon W. J., Massey F. J., Jr., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed., 1957, McGraw-Hill.)



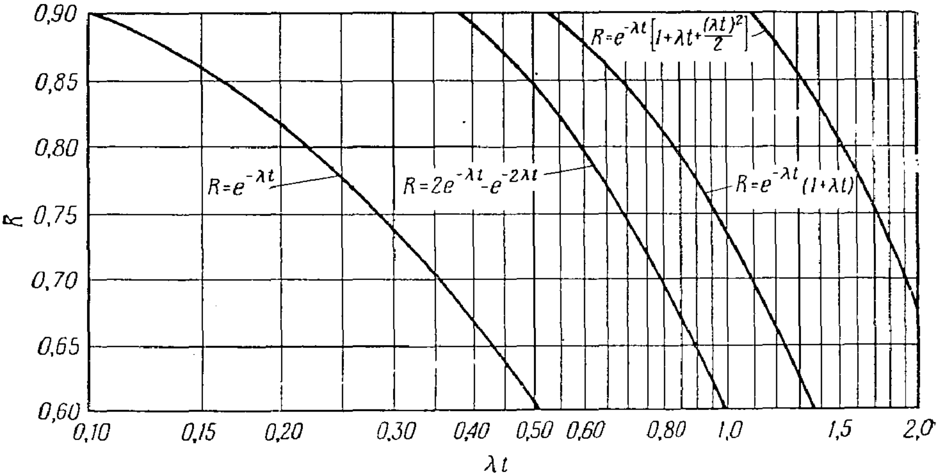
Ф и г. Б.2. Доверительные зоны для частостей; коэффициент доверия 0,90. (Dixon W. J., Massey F. J., Jr., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed., 1957, McGraw-Hill.)



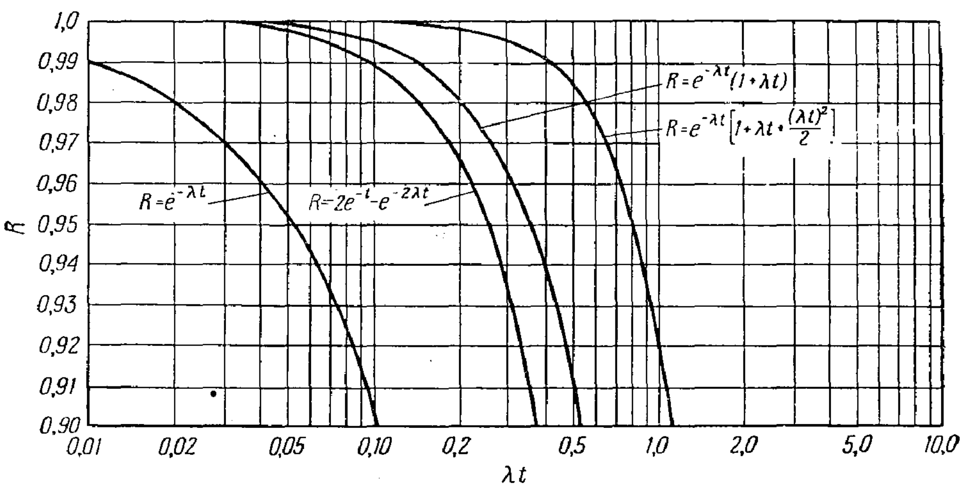
Фиг. Б.3. Доверительные зоны для частостей; коэффициент доверия 0,95. (Pearson E. S., Clopper C. J., The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial, *Biometrika*, 26, 404 (1934); Dixon W. J., Massey F. J., Jr., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed., 1957, McGraw-Hill.)



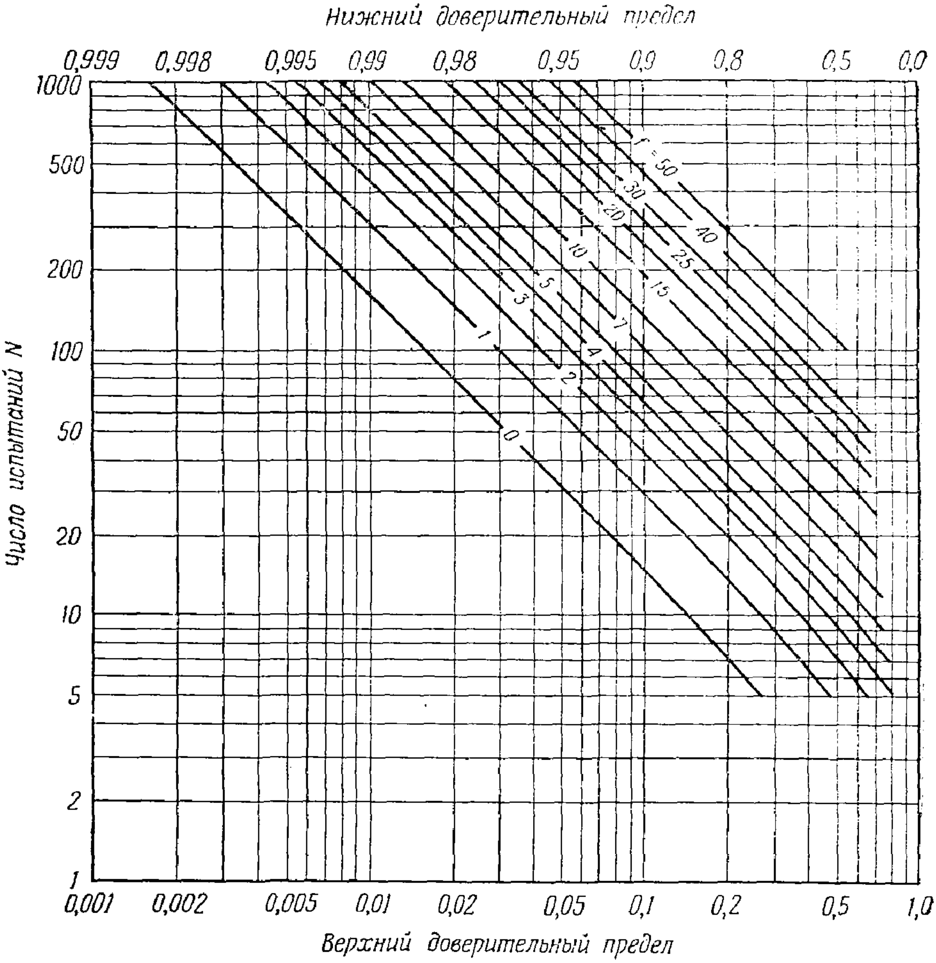
Фиг. Б.4. Доверительные зоны для частостей; коэффициент доверия 0,99. (Pearson E. S., Clopper C. J., The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial, *Biometrika*, 26, 404 (1934); Dixon W. J., Massey F. J., Jr., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed, 1957, McGraw-Hill.)



Фиг. Б.5. Надежность R в зависимости от λt для экспоненциального распределения ($0{,}60 \leqslant R \leqslant 0{,}90$).



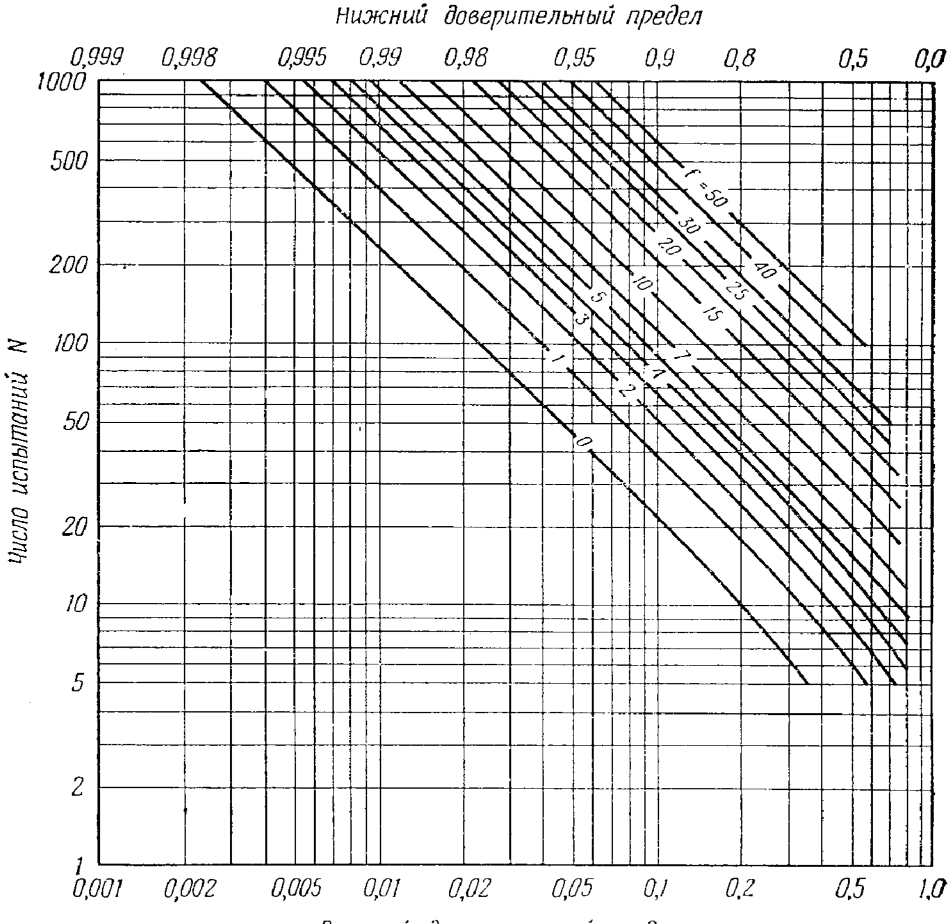
Фиг. В.6. Надежность R в зависимости от λt для экспоненциального распределения ($0{,}90 \leqslant R \leqslant 1{,}00$).



Фиг. Б.7. Доверительные пределы надежности.

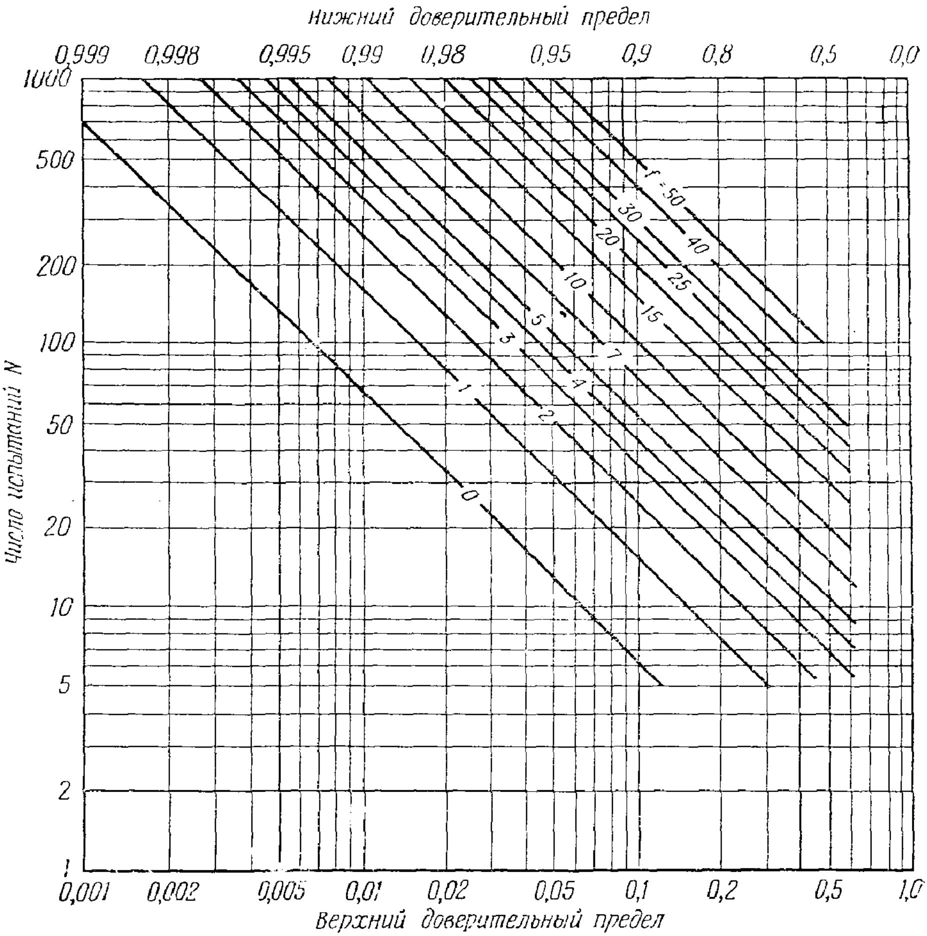
Верхний доверительный предел ненадежности = 1 − Нижний доверительный предел надежности, N — число испытаний, f — число отказов, коэффициент доверия $\gamma = 50\%$.

(Lloyd D. K., Lipow M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, 1962, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.)



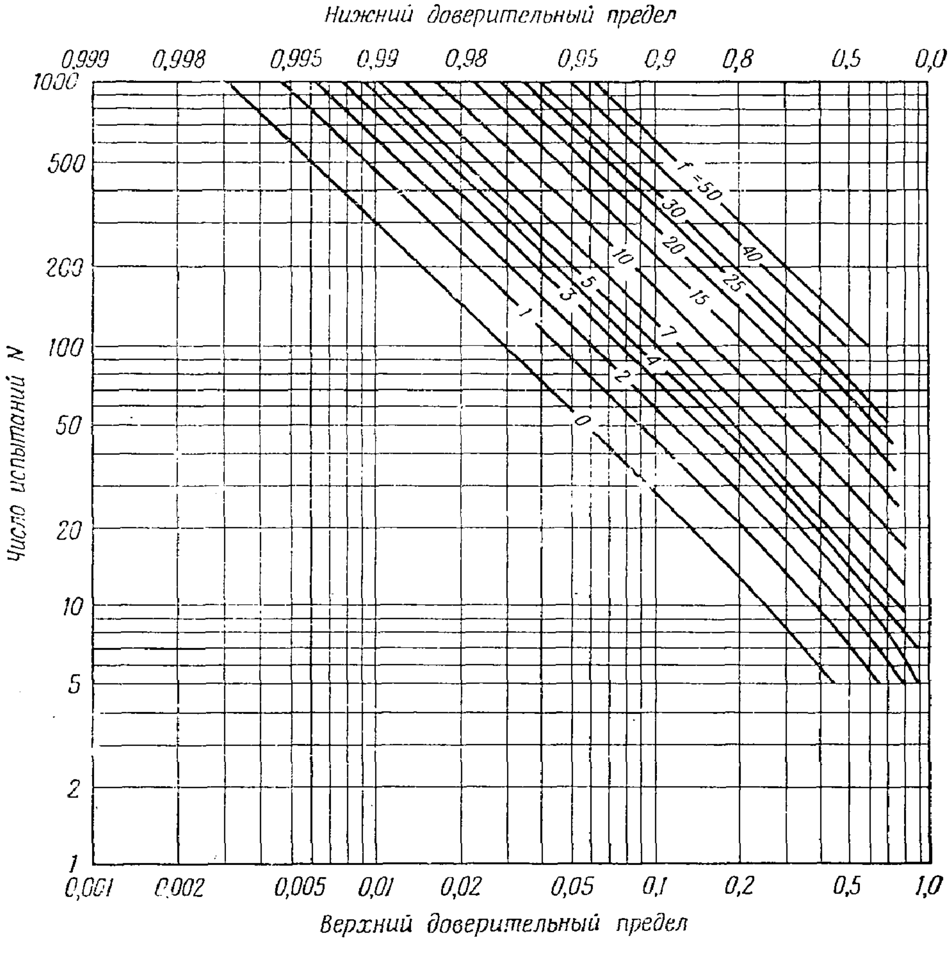
Фиг. Б.8. Доверительные пределы надежности.

Верхний доверительный предел ненадежности = 1 — Нижний доверительный предел надежности; N — число испытаний, f — число отказов, коэффициент доверия $\gamma = 80\%$.
(Lloyd D. K., Lipow M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, 1962, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.)



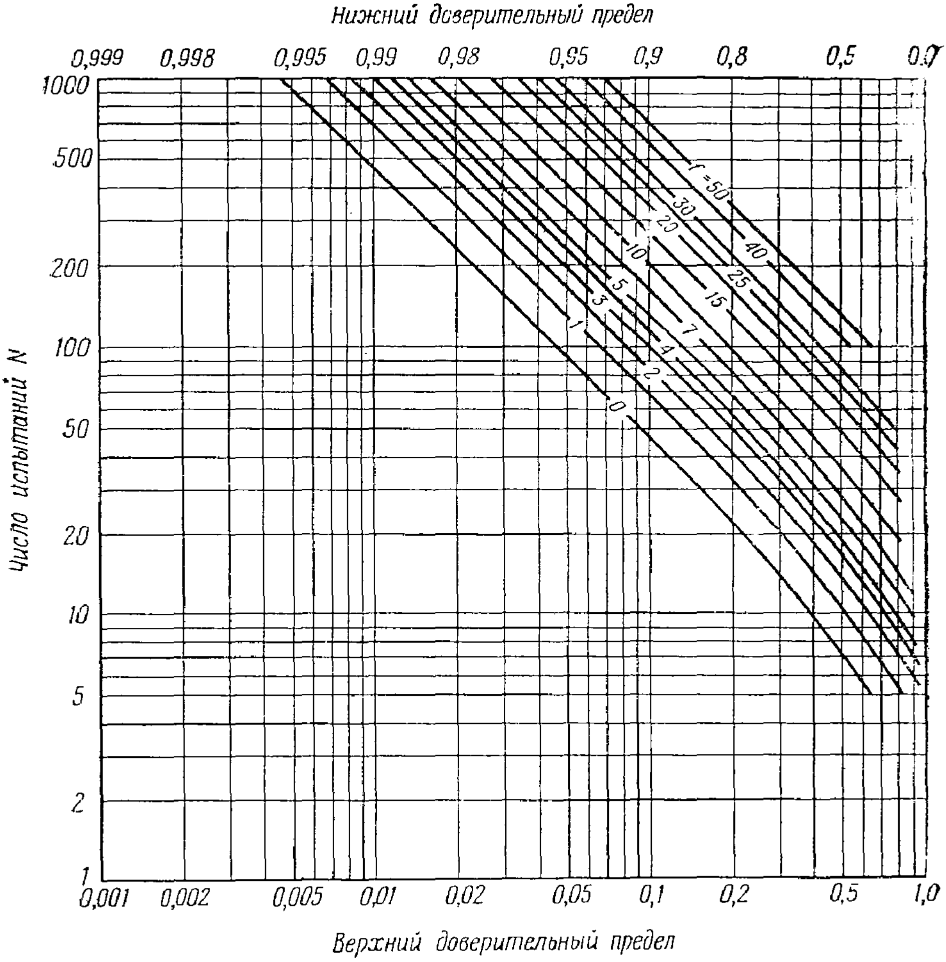
Фиг. Б.9. Доверительные пределы надежности.

Верхний доверительный предел ненадежности = 1 − Нижний доверительный предел надежности, N — число испытаний, f — число отказов, коэффициент доверия $\gamma = 90\%$.
(Lloyd D. K., Lipow M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, 1962, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.)



Фиг. Б.10. Доверительные пределы надежности.

Верхний доверительный предел ненадежности = 1 − Нижний доверительный предел надежности, N — число испытаний, f — число отказов, коэффициент доверия $\gamma = 0{,}95\%$.
(Lloyd D. K., Lipow M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, 1962, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey).



Фиг. Б.11. Доверительные пределы надежности.

Верхний доверительный предел ненадежности = 1 — Нижний доверительный предел надежности, N — число испытаний, f — число отказов, коэффициент доверия $\gamma = 99\%$.
(Lloyd D. K., Lipow M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, 1962, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.)

ИЗБРАННАЯ БИБЛИОГРАФИЯ

(систематизированная по разделам в алфавитном порядке)

Бета-распределение

Clark R. E., Percentage Points of the Incomplete Beta Function, *J. Am. Statist. Assoc.*, **148**, 831 (1953).

Foster F. G., Rees D. H., Tables of the Upper Percentage Points of the Generalized Beta Distribution, Cambridge Univ. Press (from *Biometrika*, New Statistical Table Series № XXVI), 1960.

Hartley H. O., Fitch E. R., A Chart for the Incomplete Beta Function and the Cumulative Binomial Distribution, *Biometrika*, 38, 423 (1951).

Kao J. H. K., The Beta Distribution in Reliability and Quality Control, Tech. Rept. 2, Department of Industrial Engineering, Cornell Univ., Ithaca, N. Y., Department of Navy, Office of Naval Research, Contr. Nonr-401 (43).

Pearson K., Tables of Incomplete Beta Function, Cambridge Univ. Press, London, 1932.

Thompson C. M., Tables of Percentage Points of the Incomplete Beta Function, *Biometrika*, **32**, 151 (1941).

Библиографические указатели

Balaban H. S., A Selected Bibliography on Reliability, *IRE Trans. Reliability Quality Control*, **RQC-11**, 86 (July 1962).

Buckland W. R., Fox R., Bibliography of Basic Texts and Monographs on Statistical Methods, Hafner Publ. Co., Inc., New York, 1963.

Butterbaugh G. I., A Bibliography of Statistical. Quality Control, Univ. Washington Press, Seattle, 1946.

Butterbaugh G. I., A Bibliography of Statistical Quality Control — Supplement, Univ. Washington Press, Seattle, 1951.

Doig A. G., Kendall M. G., Bibliography on Statistical Literature, Hafner Publ. Co., Inc., New York, 1962.

Greenwood J. A., Hartley H. O., Guide to Tables in Mathematical Statistics, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1962.

Mendelhall W., A Bibliography on Life Testing and Related Topics, *Biometrika*, **45**, 521 (1958).

National Aeronautics and Space Administration, Reliability Abstracts and Technical Reviews, 1961—1962, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D. C., 1962.

Биномиальное распределение

Bahadur R. R., Some Approximations to the Binomial Distribution Function, *Ann. Math. Statist.*, **31**, 43 (1960).

Blischke W. R., Moment Estimators for the Parameters of a Mixture of Two Binomial Distributions, *Ann. Math. Statist.*, 33, 444 (1962).

Blischke W. R., Estimating Parameters of Mixtures of Binomial Distributions, *J. Am. Statist. Assoc.*, **59**, 510 (1964).

Buehler R. J., Confidence Intervals for the Product of Two Binomial Parameters, *J. Am. Statist. Assoc.*, **52**, 482 (1953).

Clopper C. J., Pearson E. S., The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial, *Biometrika*, **26**, 404 (1934).

Crow E. L., Confidence Intervals for Proportions, *Biometrika*, **43**, 423 (1956).

Eagle E. L., Hatfield R. L., Binomial Confidence Tables for Reliability and Quality Control Applications (50% confidence PB 181479, 80% confidence PB 181480, 90% confidence PB 181481, 95% confidence PB 181482, 99% confidence PB 181483), U. S. Department of Commerce, Office of Technical Services, Washington, D. C., 1962.

Harvard Univ., Cumulative Binomial Probability Distribution, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1955.

National Bureau of Standards, Tables of the Binomial Probability Distribution, Applied Mathematics Series 6, Government Printing Office, Washington, D. C., 1950.

Pachares J., Tables of Confidence Limits for the Binomial Distribution, *J. Am. Statist. Assoc.*, **55**, 521 (1960).

Romig H. G., 50—100 Binomial Tables, Wiley, New York, 1953.

Steck G. P., Upper Confidence Limits for the Failure Probability of Complex Networks, Sandia Res. Rept. SC-4133, Sandia Corp., Albuquerque, N. M., 1957 (Office of Tech. Services, Washington, D. C.).

Weintraub S., Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution for Small Values of p., The Free Press of Glencoe, New York, 1963.

Вейбулловское распределение

Department of Defense, Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing Based on the Weibull Distribution (Mean Life Criterion), TR-3, Office of the Assistant Secretary of Defense (Supply and Logistics), Washington, D. C., Sept. 30, 1961.

Department of Defense, Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing Based on the Weibull Distribution (Hazard Rate Criterion), TR-4, Office of the Assistant Secretary of Defense (Supply and Logistics). Washington, D. C., Febr. 28, 1962.

Goode H., Kao J. H. K., Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing Based on the Weibull Distribution (Hazard Rate Criterion), Eighth Natl. Symp. Reliability Quality Control, Washington, D. C., 1962, p. 37.

Govindarajulu Z., Joshi M., *Best Linear Unbiased Estimation of Location and Scale Parameters of Weibull Distribution Using Ordered Observations*, AD-409 685, Office of Technical Services, Washington, D. C., Nov. 1962.

Kao J. H. K., The Weibull Distribution in Reliability Studies, Tech. Rept. 33, Res. Rept. EE 343, Cornell Univ., Ithaca, N. Y., 1957.

Kao J. H. K., Computer Methods for Estimating Weibull Parameters in Reliability Studies, IRE Trans. Reliability Quality Control, vol. PGRQC-13, p. 15, July 1958.

Kao J. H. K., A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life Testing of Electron Tubes, *Technometrics*, **1**, 389 (1959).

Mendenhall W., Lehman E. H., An Approximation to the Negative Moments of the Positive Binomial Useful in Life Testing, *Technometrics*, **2**, 227 (1960).

Menon M. V., Estimation of the Shape and Scale Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics*, **5**, № 2, 175 (1963).

Rider P. R., Estimating the Parameters of Mixed Poisson, Binomial and Weibull Distributions by the Method of Moments, *Bull. Intern. Statist. Inst.*, **39**, part 2, 225 (1962).

Weibull W., A. Statistical Distribution Function of Wide Applicability, *J. Appl. Mech.*, 18, 293 (1951).
Weibull W., A Statistical Representation of Fatigue Failure in Solids, *Roy. Inst. Tech.* (Stockholm) (Nov. 1954).

Гамма-распределение

Chapman D. C., Estimating the Parameters of a Truncated Gamma Distribution, *Ann. Math. Statist.*, 27, 498 (1956).
Greenwood J. A., Durand D., Aids for Fitting the Gamma Distribution by Maximum Likelihood, *Technometrics*, 2, 55 (Febr. 1960).
Gupta S. S., Order Statistics from the Gamma Distribution, *Technometrics*, 2, 243 (1960).
Gupta S. S., Groll P., Gamma Distribution in Acceptance Sampling Based on Life Tests, *J. Am. Statist. Assoc.*, 56, 942 (1961).
Lentner M. M., Buehler R. J., Some Inferences about Gamma Parameters with an Application to a Reliability Problem, *J. Am. Statist. Assoc.*, 58, 670 (1963).
Pearson K., Tables of Incomplete Gamma Function, Cambridge Univ. Press, London, 1922.

Гипергеометрическое распределение

Lieberman G. J., Owen D. B., Tables of the Hypergeometric Distribution, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1961.

Двумерное нормальное распределение

National Bureau of Standards, Tables of the Bivariate Normal Distribution Function and Related Functions, Applied Mathematics Series 50, Government Printing Office, Washington, D. C., 1959.
Owen D. B., Tables for Computing Bivariate Normal Probabilities, *Ann. Math. Statist.*, 27, 1075 (1956).
*Смирнов Н. В., Большев Л. Н., Таблицы для вычисления двумерного нормального распределения, АН СССР, 1962.

Допуски

Owen D. B., Tables of Factors for One-sided Tolerance Limits for a Normal Distribution, Sandia Monograph SCR-13, Sandia Corp., Albuquerque, N. M., Apr. 1958 (Office of Technical Services, Department of Commerce, Washington, D. C.).

Избыточность

Aroian L. A., Meyers R. H., Redundancy Considerations in Space and Satellite Systems, Proc. Seventh Natl. Symp. Reliability Quality Control, Philadelphia, 1961, p. 292.
Black G., Proschan F., An Optimal Redundancy, *J. Operations Res. Soc. Am.*, 7, 581 (1959).
Flehinger B. J., Reliability Improvement through Redundancy at Various Systems Levels, IRE Natl. Conv. Record, part 6 (1958).
Greveling C. J., Increasing the Reliability of Electronic Equipment by Use of Redundant Circuits, *Proc. IRE*, 44, 509 (1956).
Kneale S. G., Reliability of Parallel System with Repair and Switching, Proc. Seventh Nat. Symp. Reliability Quality Control, Philadelphia, 1961, p. 129.

Madansky A., Approximate Confidence Limits for the Reliability of Series and Parallel Systems, Rept. RM-2552, The Rand Corp., Santa Monica, Calif., Apr. 1960.

Proschan F., Bray T. A., Optimum Redundancy under Multiple Constraints, AD-408 393, Office of Technical Services, Washington, D. C., May 1963.

Wilcox R. H., Mann W. C., eds., Redundancy Techniques for Computing Systems, Spartan Books, Washington, D. C., 1962.

Инженерная статистика и контроль качества (книги)

Bowker A. H., Lieberman G. J., Engineering Statistics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1959.

Burr I. W., Engineering Statistics and Quality Control, McGraw-Hill, New York, 1953.

Duncan A. J., Quality Control and Industrial Statistics, Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Ill., 1952.

Grant E. L., Statistical Quality Control, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1964.

Hald A., Statistical Theory with Engineering Applications, Wiley, New York, 1952 (русский перевод: Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, 1956).

Juran J. M., ed., Quality Control Handbook, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1962.

Shewhart W. A., Economic Control of Quality of Manufactured Product, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1931.

Simon L. E., An Engineers Manual of Statistical Method, Wiley, New York, 1941.

Wine R. L., Statistics for Scientists and Engineers, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.

*Коуден Д., Статистические методы контроля качества, Физматгиз, 1961.

*Шор Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, изд-во «Советское радио», 1962.

Логарифмически нормальное распределение

Aitchison J., Brown J., The Log-normal Distribution, Cambridge Univ. Press, London, 1951.

Goldthwaite L. R., Failure Rate Study for the Lognormal Lifetime Model, Proc. Seventh Natl. Symp. Reliability Quality Control, Philadelphia, 1961, p. 208.

Guild R. L., Correlation of Conventional and Accelerated Test Conditions for Heater Burnouts by the Log-normal Distribution, *Ind. Qual. Control*, 19, 27 (Nov. 1952).

Kamins M., Two Notes on the Log-normal Distribution, Memo RM-3781-PR, The Rand Corp., Santa Monica, Calif., Aug. 1963.

Математическая статистика (книги)

Cramer H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, N. J., 1946 (русский перевод: Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948).

Crow E. L., Davis F. A., Maxfield M., Statistics Manual, Dover Publ., New York, 1960.

Croxton F. E., Cowden D. J., Applied General Statistics, 2d ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1955.

Dixon W. J., Massey F. J., Introduction to Statistical Analysis, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1957.
Ehrenfeld S., Littauer S. B., Introduction to Statistical Method, McGraw-Hill, New York, 1964.
Freeman H. A., Introduction to Statistical Inference, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1963.
Freund J. M., Modern Elementary Statistics, 2d ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1960.
Hoel P. G., Elementary Statistics, Wiley, New York, 1960.
Hogg R. V., Craig A. T., Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan Co., New York, 1959.
Kendall M. G., Stuart A. The Advanced Theory of Statistics, Charles Griffin & Co., London, 1962 (русский перевод: Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений, изд-во «Наука», 1966).
Lehmann E. L., Testing Statistical Hypotheses, Wiley, New York, 1959 (русский перевод: Леман Э., Проверка статистических гипотез, изд-во «Наука», 1964).
Lindgren B. W., Statistical Theory, The Macmillan Co., New York, 1962.
Lindgren B. W., McElrath G., Introduction to Probability and Statistics, The Macmillan Co., New York, 1959.
Mood A. M., Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill, New York, 1950.
Mood A. M., Graybill F. A., Introduction to the Theory of Statistics, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1963.
Natrella, Mary Gibbons, Experimental Statistics, Natl. Bur. Std. (U. S.) Handbook 91, 1963.
Statistical Research Group, Columbia Univ., Techniques of Statistical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1947.
*Вэн дер Варден Б. Л., Математическая статистика, ИЛ, 1960.
*Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, Физматгиз, 1959.
*Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, книга вторая, изд-во «Советское радио», 1968.
*Митропольский А. К., Техника статистических вычислений, Физматгиз, 1961.
*Нейман Ю., Вводный курс теории вероятностей и математической статистики, изд-во «Наука», 1968.
*Уилкс С., Математическая статистика, изд-во «Наука», 1967.
*Яноши Л., Теория и практика обработки результатов измерений, изд-во «Мир», 1968.

Математический справочник

Korn G. A., Korn T. M., Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1961.

Многомерное нормальное распределение

Johnson N. L., An Approximation to the Multinomial Distribution. Some Properties and Applications, *Biometrika*, **47**, 93 (1960).
Johnson N. L., Young D. H., Some Applications of Two Approximations to the Multinomial Distribution, *Biometrika*, **47**, 463 (1960).
Quesenberry C. P., Hurst D. C., Large Sample Simultaneous Confidence Intervals for Miltinomial Proportions, *Technometrics*, **6**, 191 (1964).
*Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, Физматгиз, 1963.

Надежность (книги)

AGREE, Reliability of Military Electronic Equipment, Goverment Printing Office, Washington, D. C., 1957

ASQC, Production and Field Reliability, Am. Soc. for Quality Control, Milwaukee, Wis., 1959.

ASQC, Research and Development Reliability, Am. Soc. for Quality Control, Milwaukee, Wis., 1961.

Bazovsky I., Reliability Theory and Practice, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962 (русский перевод: Базовский И., Надежность: теория и практика, ИЛ, 1965).

Calabro S. R., Reliability Principles and Practices, McGraw-Hill, New York, 1962.

Chorafas D. N., Statistical Processes and Reliability Engineering, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1960.

Dummer G. W. A., Griffin N., Electronic Equipment Reliability, Wiley, New York, 1960.

Gyrna F. M. et al., eds., Reliability Training Text, Am. Soc. for Quality Control, Milwaukee, Wis. and IRE, New York, 1960.

Haviland R. P., Engineering Reliability and Long Life Design, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1964.

Henney V., ed., Reliability Factors for Ground Electronic Equipment, McGraw-Hill, New York, 1856.

Landers R. R., Reliability and Product Assurance, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.

Leake C. E., Understanding Reliability, Pasadena Lithographers, Pasadena, Calif., 1960.

Lloyd D. K., Lipow M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962 (русский перевод: Ллойд Д., Липов М., Надежность: организация, исследования, методы, математический аппарат, изд-во «Советское радио», 1964).

Myers R. H., Wong K. L., Gordy H. M., eds., Reliability Engineering for Electronic Systems, Wiley, New York, 1964.

Pieruschka E., Principles of Reliability, Prentice-Hall, Engleweed Cliffs, N. J., 1963.

RADC, RADC Reliability Handbook, ASTIA Doc. № AD-148868, RADC, Rome, N. Y., RADC-TR-58-111, 1959.

Sandler G. H., System Reliability Engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963 (русский перевод: Сандлер Дж., Техника надежности систем, изд-во «Наука», 1966).

Shwap J. E., Sullivan H. J., eds., Semiconductor Reliability, Engineering Publ., Elizabeth, N. J., 1961.

Soc. of Automotive Engineers, Reliability Control in Aerospace Equipment Development, Macmillan Co., New York, 1963.

Zelen M., ed., Statistical Theory in Reliability (Proc. Advanced Seminar, Univ. Wisconsin, 1962), Univ. Wisconsin Press, Madison, Wis., 1963.

*Большаков И. А., Гуткин Л. С., Левин Б. Р., Стратонович Р. Л., Математические основы современной радиоэлектроники, изд-во «Советское радио», 1968.

*Васильев Б. В., Козлов Б. А., Ткаченко Л. Г., Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств, изд-во «Советское радио», 1964.

*Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, изд-во «Наука», 1965.

*Козлов Б. А., Ушаков И. А., Справочник по расчету надежности, изд-во «Советское радио», 1966.

*Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. 2-е, изд-во «Советское радио», 1960.
*Райкин А. Л., Элементы теории надежности для проектирования технических систем, изд-во «Советское радио», 1967.
*Шишонок Н. А., Репкин В. Ф., Бравинский Л. Л., Основы теории надежности и эксплуатации радиотехнической аппаратуры, изд-во «Советское радио», 1964.
*Barlow R. E., Proschan F., Mathematical Theory of Reliability, J. Wiley, New York, 1964 (русский перевод: Барлоу Р., Прошан Ф., Математическая теория надежности, «Советское радио», 1969).

Надежность (статьи)

Barlow R. E., Hunter L. C., Mathematical Models for System Reliability, *Sylvania Technologist*, **13**, № 1, 2 (1960).
Basu A. P., Estimates of Reliability for Some Distributions Useful in Life Testing, *Technometrics*, **6**, 215 (1964).
Connor W. S., Interpreting Reliability by Fitting Theoretical Distributions to Failure Data, *Ind. Eng. Chem.*, **52**, 75A (Ferb. 1960); 71A (Apr. 1960).
Davis D. J., An Analysis of Some Failure Data, *J. Am. Statist. Assoc.*, **47**, 113 (1952).
Drenick R. F., Mathematical Aspects of the Reliability Problem, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 8, 125 (1960).
Garver D. P., Random Hazard in Reliability Problems, *Technometrics*, **5**, 211 (1963).
Harter H. L., Some Aspects of Reliability and Life Testing, *J. Electron. Div., Am. Soc. Quality Control*, 3, № 1, 5 (1964).
Herd G. R., Estimation of Reliability Functions, ARINC Monograph 3, ARINC Research Corp., Washington, D. C., May 1956.
Herd G. R., Some Statistical Concepts and Techniques for Reliability Analysis and Prediction, Proc. Fifth Natl. Symp. Reliability Quality Control, Philadelphia, 1959, p. 126.
Luebbert W. F., Principles and Concepts of Reliability for Equipment and Systems, Part II, Simple Models for Failure of Complex Equipment, TR-91, Stanford Univ., Stanford, Calif, Aug. 18, 1955.
Weiss L., On Estimating Scale and Location Parameters, *J. Am. Statist. Assoc.*, 58, 658 (1963).
*Оптимальные задачи надежности, сборник переводов под ред. И. А. Ушакова, Изд-во Комитета стандартов при Совете Министров СССР, 1968.

Нормальное распределение

Gupta S. S., Life Test Sampling Plans for Normal and Lognormal Distributions, *Technometrics*, **4**, 151 (1962).
National Bureau of Standards, Table of the Normal Probability Functions, Government Printing Office, Washington, D. C.

Непараметрические статистики

Fraser D. A. S., Nonparametric Methods in Statistics, Wiley, New York, 1957.
Siegel S., Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences, McGraw-Hill, New York, 1956.

Обработка результатов испытаний на надежность

Bartholomew D. J., A Problem in Life Testing, *J. Am. Statist. Assoc.*, **52**, 350 (1957).
Epstein B., Statistical Developments in Life Testing, Proc. Third Natl. Symp. Reliability Quality Control, Washington, D. C., 1957, p. 106.

Epstein B., Statistical Problems in Life Testing, Quality Control Conf. Papers, Seventh Ann. Conv., Am. Soc. Quality Control.
Epstein B., Sobel M., Life Testing, *J. Am. Statist. Assoc.*, 48, 485 (1953).
Kao J. H. K., The Design and Analysis of Life-testing Experiments, Middle Atlantic Conf., *Am. Soc. Quality Control*, 1958, p. 217.
Zelen M., Problems in Life Testing: Factorial Experiments, Trans. Thirteenth Quality Control Conf., *Am. Soc. Quality Control*, 1958, p. 21.
Zelen M., Factorial Experiments in Life Testing, *Technometrics*, **1**, 269 (1959).

Порядковые статистики

Epstein B., Application of the Theory of Extreme Values in Fracture Problems, *J. Am. Statist. Assoc.*, **43**, 403 (1948).
Epstein B., Elements of the Theory of Extreme Values, *Technometrics*, **2**, 27 (Ferb. 1960).
Epstein B., Brooks H., The Theory of Extreme Values and Its Implications in the Study of the Dielectric Strength, *J. Appl. Physics*, **19**, 544 (1948).
Fisher R. A., Tippett L. H. C., Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24**, 280 (1928).
Gumbel E. J., Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications, National Bureau of Standards, Applied Mathematics, Ser. 33, Goverment Printing Office, Washington, 25, D. C., 1954.
Gumbel E. J., Statistics of Extremes, Wiley, New York, 1958 (русский перевод: Гумбель Э., Статистика экстремальных значений, изд-во «Мир», 1965).
Lieblein J., A New Method of Analyzing Extreme-value Data, Natl. Advisory Comm. Aeron. Tech. Note 3053, 1954.
National Bureau of Standards, Probability Tables for Analysis of Extreme Value Data, Applied Mathematics, Ser. 22, Government Printing Office, Washington, D. C., 1953.
Sarhan A. E., Estimation of the Mean and Standard Deviation by Order Statistics, *Ann. Math. Statist.*, **25**, 317 (1954); **26**, 576 (1955).
Sarhan A. E., Greenberg B.-G., eds., Contributions to Order Statistics, Wiley, New York, 1962.
Wilks S. S., Order Statistics, *Bull. Am. Math. Soc.*, **54**, 6 (1948).

Последовательный анализ

Wald A., Sequential Analysis, Wiley, New York, 1947 (русский перевод: Вальд А., Последовательный анализ, Физматгиз, 1960).
*Башаринов А. Е., Флейшман Б. С., Методы статистического последовательного анализа, изд-во «Советское радио», 1962.

Постановка экспериментов

Anderson R. L., Bancroft T. A., Statistical Theory in Research, McGraw-Hill, New York, 1952.
Barnett E. H., Introduction to Evolutionary Operations, *Ind. Eng. Chem.*, **52**, 500 (1960).
Box G. E. P., Evolutionary Operation: A Method for Increasing Productivity, *Appl. Statist.*, **6**, № 2 (1957).
Box G. E. P., Hunter J. S., Multi-factor Experimental Designs for Exploring Response Surfaces, *Ann. Math. Statist.*, 28, 195 (1957).

Bradley R. A., Determination of Optimum Operating Conditions by Experimental Methods, Part I. Mathematics and Statistics Fundamental to the Fitting of Response Surfaces, *Ind. Qual. Control*, **15**, № 1, 16, (1958).
Brownlee K. A., Industrial Experimentation, 2d ed., Chemical Publ. Co., Inc., New York, 1948.
Chew V., ed., Experimental Designs in Industry, Wiley, New York, 1957.
Cochran W., Some Consequences When the Assumptions for the Analysis of Variance Are Not Satisfied, *Biometrics*, **3**, 22 (1947).
Cochran W. G., Cox G. M., Experimental Designs, 2d ed., Wiley, New York, 1957.
Cox D. R., Planning of Experiments, Wiley, New York, 1958.
Crump S. L., The Estimation of Variance Components in the Analysis of Variance, *Biometrics*, **2**, 7 (1946).
Davies O. L., ed., The Design and Analysis of Industrial Experiments, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh and London, 1954.
Eisenhart C., The Assumptions Underlying the Analysis of Variance, *Biometrics*, **3**, 1 (1947).
Federer W. T., Experimental Designs, The Macmillan Co., New York, 1955.
Finney D. J., Experimental Design and Its Statistical Basis, Univ. Chicago Press, Chicago, 1955.
Fisher R. A., The Design of Experiments, 7th ed., Hafner Publ. Co., Inc. New York, 1960.
Hicks C. R., The Fundamental Analysis of Variance, Part I, The Analysis of Variance Model, *Ind. Qual. Control.*, **13**, № 2 (1956); Part II, The Components of Variance Model and the Mixed Model, *Ind. Qual. Control.*, **13**, № 3 (1956); Part III, Nested Designs in Analysis of Variance, *Ind. Qual. Control*, **13**, № 4 (1956).
Hicks C. R., Introduction to Experimental Design, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1963.
Hunter J. S., Determination of Optimum Operating Conditions by Experimental Methods, *Ind. Qual. Control*, **15** (1958).
Kempthorne O., The Design and Analysis of Experiments, Wiley, New York, 1952.
Mann H. B., Analysis and Design of Experiments, Dover Publ., New York, 1949.
McCall C. H., Jr., Linear Contrasts, Parts I, II and III, *Ind. Qual. Control*, **17** (July — Sept. 1960).
Ostle B., Statistics in Research, 2d ed., The Iowa State Univ. Press, Ames, Iowa, 1963.
Quenouille M. H., The Design and Analysis of Experiments, Hafner Publ. Co., New York, 1953.
Satterthwaite F. E., Random Balance Experimentation, *Technometrics*, **1**, № 2, 111 (1959).
Scheffe H., The Analysis of Variance, Wiley, New York, 1959.
Snedecor G. W., Statistical Methods, 5th ed., The Iowa State Univ. Press, Ames, Iowa, 1956.
Thompson C. M., Maxine Merrington, Tables for Testing the Homogeneity of a Set of Expected Variances, *Biometrika*, 33, 296 (1943).

Пуассоновское распределение

Cohen A. C., Estimating Parameters of a Modified Poisson Distribution, *J. Am. Statist. Assoc.*, **55**, 139 (1960).
Crow E. L., Gardner R. S., Table of Confidence Limits for the Expectation of Poisson Variable, Cambridge Univ. Press, London, 1960.
General Electric Co., Tables of the Individual and Cumulative Terms of the Poisson Distribution, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1962.

Molina E. C., Tables of Poisson's Exponential Limit, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1945.
Rider P. R., Estimating the Parameters of Mixed Poisson, Binomial and Weibull Distributions by the Method of Moments, *Bull. Intern. Statist. Inst.*, **39**, 225 (1962).
Weiss H., Estimation of Reliability in a Complex System with a Poisson-type Failure, *Operations Res.*, **4**, 532 (1956).

Регрессия и корреляция

Acton F. S., Analysis of Straight-line Data, Wiley, New York, 1959.
Bartlett M. S., Fitting a Straight Line When Both Variables Are Subject to Error, *Biometrics*, **5**, № 3, 207 (1949).
Eisenhart C., The Interpretation of Certain Regression Methods and the Use in Biological and Industrial Research, *Ann. Math. Statist.*, **10**, № 2, 162 (1939).
Ezekiel M., Methods of Correlation Analysis, Wiley, New York, 1941.
Fisher R. A., On the Probable Error of a Coefficient of Correlation Deduced from Small Samples, *Metron*, **1**, № 4, 3 (1921).
Graybill F. A., An Introduction to Linear Statistical Models, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1961.
Hader R. J., Grandage A. H., Simple and Multiple Regression Analyses, in «Experimental Designs in Industry», Chew V., ed., Wiley, New York, 1958.
Hartley H. O., The Modified Gauss — Newton Method for the Fitting of Nonlinear Regression Functions by Least Squares, *Technometrics*, 13, 269 (1961).
Kendall M. G., Rank Correlation Methods, Charles Criffin & Co., London, 1948.
Kramer C. Y., Simplified Computations for Multiple Regression, *Ind. Qual. Control*, 13, № 8, 8 (1957).
Madansky A., The Fitting of Straight Lines When Both Variables Are Subject to Error, *J. Am. Statist. Assoc.*, 54, 173 (1959).
Mandel J., Fitting a Straight Line to Certain Types of Cumulative Data, *J. Am. Statist. Assoc.*, **52**, 552 (1958).
Treloar A. E., Correlation Analysis, Burgess Publ. Co., Minneapolis, 1942.

Системотехника

Goode H. H., Machol R. E., System Engineering, McGraw-Hill, New York, 1957 (русский перевод: Гуд Г., Макккол Р., Введение в проектирование больших систем, изд-во «Советское радио», 1962).

Словари

Kendall M. G., Buckland W. R., A Dictionary of Statistical Terms, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh and London, 1957.
Ryerson C. M., Glossary and Dictionary of Terms Relating Specifically to Reliability, Proc. Third Natl. Symp. Reliability Quality Control, Washington, D. C., 1957, p. 59.

Статистические таблицы

Fisher R. A., Yates F., Statistical Tables for Biological, Agriculture and Medical Research, 5th ed., Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh and London, 1957.
Hald A., Statistical Tables and Formulas, Wiley, New York, 1952.

Owen D. B., Handbook of Statistical Tables, Addison-Wesley Publ.. Co., Reading, Mass., 1962.
National Bureau of Standards, Tables of Probability Functions, Applied Mathematics, Ser. 23, Government Printing Office, Washington, D. C., 1953.
Pearson E. S., Hartley H. O., Biometrika Tables for Statisticians, vol. 1, Cambridge Univ. Press, London, 1958.
Rand Corp., A Million Random Digits with 100 000 Normal Deviates, Free Press of Glencoe, New York, 1955.
*Келли Т. Л., Статистические таблицы ВЦ АН СССР, 1966.
*Слуцкий Е. Е., Таблицы для вычисления неполной гамма-функции и функции вероятности хи-квадрат, АН СССР, 1950.
*Пагурова В. И., Таблицы неполной гамма-функции, ВЦ АН СССР, 1964.
*Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, изд-во «Наука», 1965.
*Янко Я., Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, 1961.

Теория вероятностей (книги)

Feller W., Introduction to Probability Theory and Its Application, vol. 1, 2d ed., Wiley, New York, 1957 (русский перевод: Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, изд-во «Мир», 1964).
Fry T. C., Probability and Its Engineering Uses, D. Van Nostrand Co., New York, 1928.
Munroe M. E., The Theory of Probability, McGraw-Hill, New York, 1951.
Parzen E., Modern Probability Theory and Its Applications, Wiley, New York, 1960.
Uspensky J. V., Introduction to Mathematical Probability, McGraw-Hill, New York, 1937.
Von Mises R., Probability, Statistics and Truth, Macmillan Co., New York, 1939.
*Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.
*Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
*Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, книга первая, изд-во «Советское радио», 1966.

Теория массового обслуживания (книги)

*Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, изд-во «Наука», 1966.
*Кофман А., Крюон Р., Массовое обслуживание. Теория и приложения, изд-во «Мир», 1965.
*Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, изд-во «Советское радио», 1965.
*Хинчин А. Я., Работы по теории массового обслуживания, Физматгиз, 1963.

Экспоненциальное распределение

Department of Defense, Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing (Based on Exponential Distribution), H-108, Government Printing Office, Washington, D. C., 1961.
Epstein B., Truncated Life Tests in the Exponential Case, *Ann. Math. Statist.*, **25**, 555 (1954).
Epstein B., Exponential Distribution and Its Role in Life Testing, *Ind. Qual. Control*, **15**, № 6, 4 (1958).

Epstein B., Tests for the Validity of the Assumption That the Underlying Distribution of Life is Exponential, *Technometrics*, **2**, 83 (Febr. 1960); **2**, 167 (May 1960).
Epstein B., Sobel M., Some Theorems Relevant to Life Testing from an Exponential Distribution, *Ann. Math. Statist.*, **25**, 373 (1954).
Epstein B., Sobel M., Sequential Life Tests in the Exponential Case, *Ann. Math. Statist.*, **26**, 82 (1955).
Pugh E. L., The Best Estimate of Reliability in the Exponential Case, *Operations Res.*, **11**, 57 (1963).
Rider P. R., The Method of Moments Applied to a Mixture of Exponential Distributions, *Ann. Math. Statist.*, **32**, 143 (1961).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора первого тома русского издания справочника . . 5
Предисловие редактора 13

Глава 1. *Уелкер Э.* **Эффективность системы**

1.1. Эффективность системы как элемент ее ценности . . . 17
1.2. Классификация интервалов времени на основе эксплуатационных требований и состояния оборудования . . . 20
1.3. Понятия, с помощью которых исследуется и оценивается эффективность системы 21
1.4. Анализ интервалов времени на основе двух критериев . 26
1.5. Количественные определения 28
1.6. Задачи, связанные с расчетом характеристик 34
1.7. Учет пригодности конструкции 42
1.8. Учет ремонтопригодности 42
1.9. Интерпретация соотношений между интервалами времени 43
1.10. Пример 46
1.11. Требования к дальнейшим исследованиям 49

Глава 2. *Као Дж.* **Модели долговечности и их использование**

2.1. Введение 51
2.2. Закон распределения ресурса — основа оценки надежности по выборочным данным 52
2.3. Некоторые возможные семейства законов распределения ресурса 54
2.4. Построение и использование вероятностной бумаги на основе моделей долговечности 62
2.5. Получение коэффициентов нагрузки путем оценки закона распределения ресурса 75

Глава 3. *Деллинджер Д.* **Планирование испытаний на надежность**

3.1. Введение 77
3.2. Выбор однородной партии 78
3.3. Определение модели распределения 82
3.4. Использование рабочих характеристик при выборе плана испытаний 84
3.5. Выбор плана испытаний с экономической точки зрения 87
3.6. Анализ чувствительности 105

Глава 4. *Моун О. Б.* **Применение математических и статистических методов для исследования надежности и долговечности**

4.1. Основы теории множеств 108
4.2. Вероятность 110
4.3. Распределения вероятностей 117
4.4. Некоторые дискретные распределения вероятностей . . 131

4.5. Некоторые плотности вероятности 144
4.6. Выборочный метод 180
4.7. Оценка 194
4.8. Проверка гипотез 198
4.9. Регрессионный и корреляционный анализ 200
4.10. Последовательный анализ 203
4.11. Дисперсионный анализ 206

Глава 5. *Райерсон К. М.* **Приемочные испытания**

5.1. Введение 217
5.2. Виды приемочных испытаний 217
5.3. Доверительный интервал 223
5.4. Приемочные испытания элементов на надежность . . . 232
5.5. Приемочные испытания аппаратуры 256
5.6. Приемочные испытания систем 269

Приложения

Приложение А. Таблицы 275
Приложение Б. Графики 316
Приложение В. Избранная библиография 326